

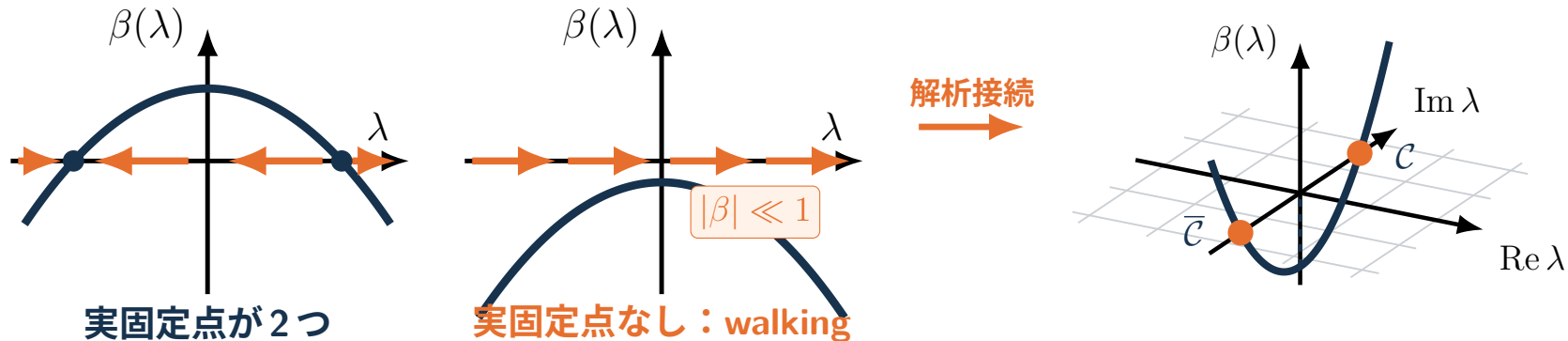
arXiv:2606.30720

Complex Conformal Manifolds

Yuma Furuta¹, Wataru Harada², Yuya Kusuki^{1,2,3}, Yin Tang¹¹九州大学 高等研究院 ²九州大学大学院 理学府 物理学専攻 ³理化学研究所 iTHEMS九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

1 研究背景：complex CFT とは何か？

通常の CFT は RG 固定点 $\beta(\lambda) = d\lambda/d\log E = 0$ で臨界現象を記述する。理論の制御パラメータを変えると、2つの実固定点が接近・衝突し、実結合空間から消えることがある。



固定点衝突後も $|\beta(\lambda)| \ll 1$ で、RG 流は中間スケールで非常に遅くなる。この **walking** は近似的なスケール不変性を生む。**では、実固定点がないのに何の CFT がこの領域を支配するのか？** Gorbenko–Rychkov–Zan は、消えた固定点が複素結合空間で**複素共役な CFT 対** $c, \bar{c}$ として残り、その近傍を通る実 RG 流が walking を示すと提案した。そして近年では以下のようなもので複素共形場理論が現れている。

統計模型での具体例

2D Potts $Q > 4$, $O(n > 2)$ loop 模型
複素固定点対に支配された擬臨界スケーリング

場の理論での提案

Gauge theory, 脱閉じ込め量子臨界性
共形窓の下端近傍での walking 型 RG 流

2 研究目的

complex CFT の研究は主に **bulk の固定点・臨界現象**に限られ、**境界・界面・共形欠陥**へのアプローチは少ない。また、既知の厳密可解 CFT からどこまで生み出せるのか、その起源も明らかでない。

本研究で問うこと

- 既知の厳密可解モデル／実の共形多様体から、**制御可能な complex CFT** を系統的に構成できるか？
- その構成を境界・界面へ拡張し、複素共形データを非エルミート格子模型の普遍量として観測できるか？

3 研究方法

$$S_{\text{CFT}}(\lambda + \delta\lambda) = S_{\text{CFT}}(\lambda) + \delta\lambda \int \phi, \quad \beta_\lambda = 0$$



Exactly marginal deformation： $\beta_\lambda = 0$ のまま結合定数 λ を連続的に変化できる。各点が CFT であり、その軌跡が**共形多様体**をなす。図の P は基準となる既知の CFT である。
複素化： λ と共形データを $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ へ解析接続し、**複素共形多様体** $\mathcal{M}_\mathbb{C}$ を生成する。

本研究は、この複素共形多様体の枠組みから前節の研究目的を議論する。

4 $c = 1$ compact free boson の結果

$c = 1$ compact free boson

$$S[R] = \frac{R^2}{4\pi} \int d^2z \partial\theta \bar{\partial}\theta.$$

$$Z(\tau, R) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n, w \in \mathbb{Z}} \exp \left[-\pi\tau_2 \left(\frac{n^2}{R^2} + w^2 R^2 \right) + 2\pi i \tau_1 n w \right]$$

半径 R は exactly marginal deformation により連続に変化する。運動量 n 、巻き数 w の状態の次元とスピンは

$$\Delta_{n,w} = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{R^2} + w^2 R^2 \right) \in \mathbb{C}, \quad J_{n,w} = h - \bar{h} = nw \in \mathbb{Z}.$$

スペクトルは複素数を取り得るが、局所性を表すスピンは整数のままである。

複素化： $R \in \mathbb{C}$ としても分配関数の全 (n, w) 項が減衰するには

$$\text{Re}(R^2) > 0 \quad \left(\Longleftrightarrow \quad \text{Re} \frac{1}{R^2} > 0 \right)$$

が必要である。したがって複素共形多様体は、分配関数が収束する図の領域に制限される。
分配関数の実軌跡：複素共役 $R \mapsto \bar{R}$ と T 双対性 $R \mapsto 1/R$ を合わせると、

$$R = \frac{1}{\bar{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad |R| = 1.$$

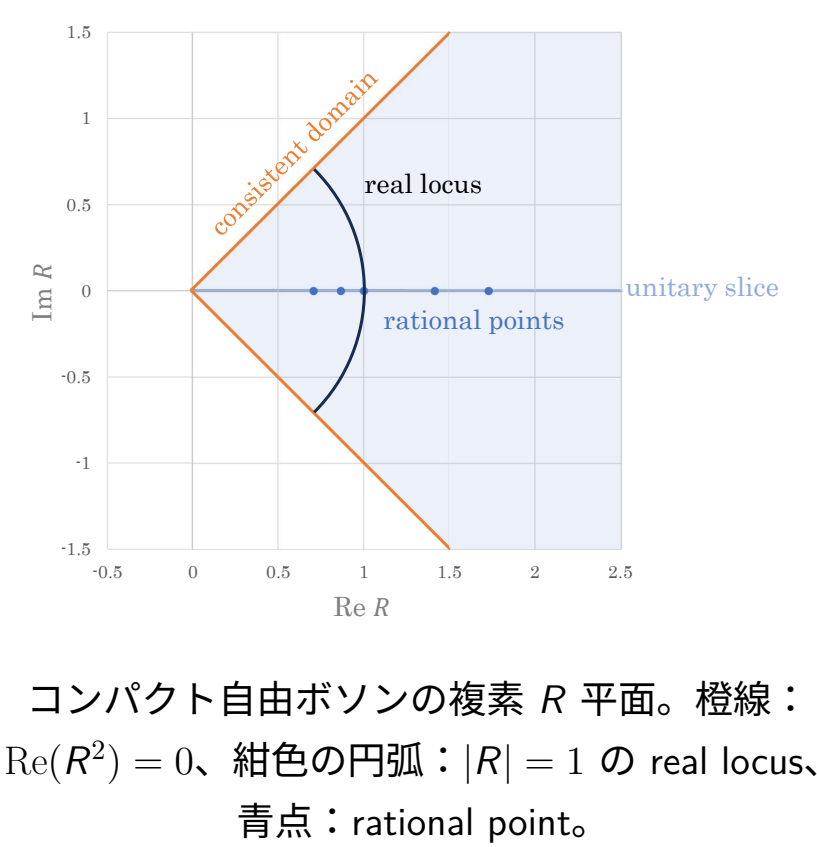
この円弧上では $\Delta_{n,w}^* = \Delta_{w,n}$ となり、**分配関数は実になる** (右上図の青線)。

複素領域でカイラル対称性は増大するか？

拡張カイラル代数には純粋に左または右へ伝播する演算子が必要であり、

$$p_R = \frac{n}{R} - wR = 0 \quad \text{または} \quad p_L = \frac{n}{R} + wR = 0 \quad \Longrightarrow \quad R^2 = \pm \frac{n}{w} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

よって $c = 1$ では、rational point は複素領域で増殖しない。



コンパクト自由ボソンの複素 R 平面。橙線： $\text{Re}(R^2) = 0$ 、紺色の円弧： $|R| = 1$ の real locus、青点：rational point。

2D RCFT の結果

中心電荷 c

トーラスにおけるモジュラーデータは

$$(ST)^3 = S^4 = 1$$

行列式から $(\det T)^{12} = 1$ ゆえに $\det T$ は1の冪根。一方、

$$\det T = \exp \left[2\pi i \left(\sum_{i=1}^N h_i - \frac{Nc}{24} \right) \right].$$

$h_i \in \mathbb{Q}$ と合わせると $c \in \mathbb{Q}$

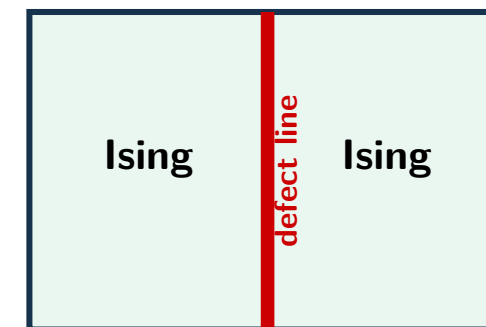
$h_i, c \in \mathbb{Q}$ ：RCFT の kinematics は complex CFT に拡張されない。

5 イジング模型での欠陥

Oshikawa–Affleck の Ising defect

2つの Ising CFT を隔てる赤い defect line 上で、defect energy operator $\epsilon(\tau)$ による exactly marginal deformation を行う：

$$S_{\text{Ising}} \longrightarrow S_{\text{Ising}} + \lambda \int_{\text{defect}} d\tau \epsilon(\tau)$$



赤線上の $\epsilon(\tau)$ を結合 λ で変形

欠陥スペクトル：crossing equation より欠陥スペクトルは

$$\Delta_n(\phi_0) = 2 \left(n + \frac{\phi_0}{\pi} \right)^2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \phi_0 = \frac{\pi}{4} + \arctan \lambda.$$

したがって複素 ϕ_0 では一般に $\Delta_n \in \mathbb{C}$ となる。

欠陥二点関数次元 Δ_n をもつ primary $\mathcal{O}_n$ に対して

$$\langle \mathcal{O}_n(\tau) \mathcal{O}_n(0) \rangle \propto |\tau|^{-2\Delta_n} = |\tau|^{-2\text{Re} \Delta_n} e^{-2i(\text{Im} \Delta_n) \log |\tau|}.$$

べき減衰の上に $\log |\tau|$ に周期的な位相が重なり、**対数周期スケーリング**が再現される。

エンタングルメントエントロピー： defect をまたぐ量子もつれは厳密に

$$S_{\text{EE}} = \frac{c_{\text{eff}}(s)}{3} \log L + O(1), \quad s = \sin(2\phi_0) \in \mathbb{C}$$

と表される。情報透過量を表す c_{eff} とエネルギー透過量を表す c_{LR} は

$$c_{\text{eff}}(s) = \frac{s}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2} \left[(s+1) \log(s+1) \log s + (s-1) \text{Li}_2(1-s) + (s+1) \text{Li}_2(-s) \right], \quad c_{LR}(s) = \frac{1}{2} s^2.$$

ユニタリ領域 $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1, \text{Im}(s) = 0$

$$s = 0: \quad c_{\text{eff}} = 0 \quad (\text{factorizing}),$$

$$s = 1: \quad c_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \quad (\text{topological}),$$

$$0 \leq c_{LR} \leq c_{\text{eff}} \leq c_{\text{Ising}} = \frac{1}{2}.$$

非ユニタリ領域 $1 \ll \text{Re}(s), \text{Im}(s) = 0$

$$c_{\text{eff}} \sim \frac{3}{2} s, \quad c_{LR} \sim \frac{1}{2} s^2$$

より $c_{LR} > c_{\text{eff}}$ **透過量のユニタリ不等式は破れる。**

6 格子模型による再現

非エルミート Ising 格子模型

中央の bond i_0 に defect を置いた

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{L-1} \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \sigma_j^z + \frac{1-b_\epsilon}{2} \sigma_{i_0}^x \sigma_{i_0+1}^x$$

を用いる。解析接続 $b_\epsilon \in \mathbb{C}$ で H は**非エルミート**になる。Jordan–Wigner 変換後、左・右基底状態の Gaussian Majorana 二点相関行列

$$(C_A)_{ij} = \frac{\langle \Psi_L | \gamma_i \gamma_j | \Psi_R \rangle}{\langle \Psi_L | \Psi_R \rangle}, \quad i, j \in A$$

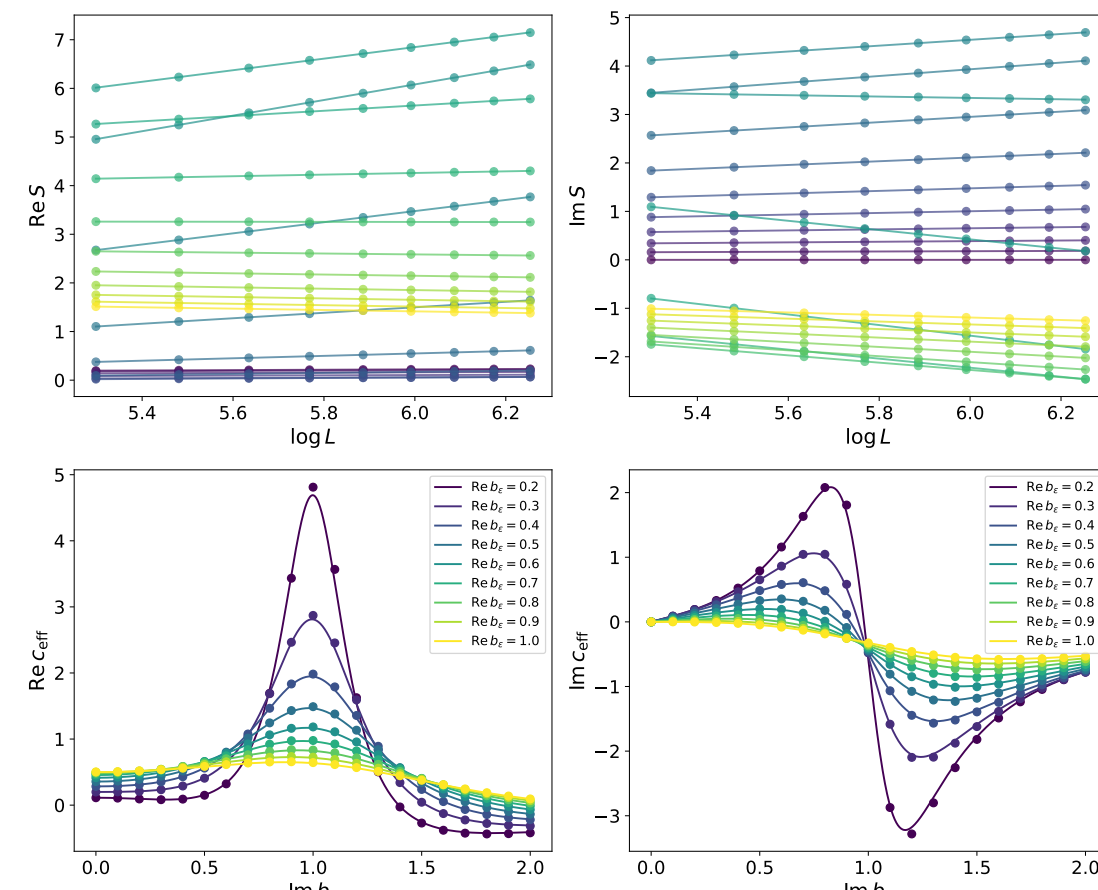
から部分系の縮約密度行列 ρ_A を構成し、 $S_A = -\text{Tr}_A(\rho_A \log \rho_A)$ を求める。

検証：

$$S(L/2) = \frac{c_{\text{eff}}}{6} \log L + \text{const.}$$

という有限サイズスケーリングが複素結合でも成立するかを調べる。

非エルミート領域でも対数スケーリングが保たれ、defect の共形対称性を数値的に確認した。



上段： $\text{Re} S, \text{Im} S$ は $\log L$ に対して直線的にスケールする。**下段**：傾きから抽出した複素 c_{eff} は解析接続した理論値（実線）と一致する。

7 結論

- 既知の厳密可解 CFT から、制御可能な complex CFT を構成できるか？
Exactly marginal coupling を解析接続すれば複素共形多様体を系統的に構成できる。ただし rational point は実領域に留まり、複素方向へは拡張しない。
- 境界・界面へ拡張し、複素共形データを格子模型で観測できるか？
Ising CFT における defect で観測した複素欠陥次元、 c_{eff} 、 c_{LR} が非エルミート格子模型の普遍量として再現され、エンタングルメントの対数スケーリングから共形対称性も確認できる。

8 今後の展望

- 非ユニタリー・ブートストラップの解析的ベンチマーク**
非ユニタリー CFT では OPE 係数の正值性を仮定できない。複素共形多様体は、共形データが独立に分かる厳密可解例として、**非ユニタリー共形ブートストラップの検証基準**を与える。
- Imaginary distance bound との関係**
Compact boson の複素結合定数の整合的定義域は、wormhole から提案された *imaginary distance bound* と正確に一致する。この一致を手がかりに bound を CFT 側から導出し、**ホログラフィック CFT 特有か、一般の CFT にも成立する普遍的制約**かを明らかにする。