

S-matrix bootstrap とその周辺： **重力理論・宇宙論との接点を中心に**

野海俊文（東京大学駒場）

いただいたお題：S-matrix bootstrap とそれに関連する話題

一側面として有効理論の文脈：

散乱振幅のユニタリ性や解析性を使うと…

- ・ 低エネルギー有効理論が満たすべき整合性条件
- ・ 有効理論の背後にある高エネルギー物理の情報

いただいたお題： **S-matrix bootstrap** とそれに関連する話題

一側面として有効理論の文脈：

散乱振幅のユニタリ性や解析性を使うと…

- ・ 低エネルギー有効理論が満たすべき整合性条件
- ・ 有効理論の背後にある高エネルギー物理の情報

いただいたお題：S-matrix bootstrap とそれに関連する話題

この考え方を宇宙や量子重力に適用すると…

- ・ 量子重力と無矛盾な宇宙論・素粒子論モデルは？
- ・ インフレーションで超高エネルギーを探る！

といった方向性を議論できるかもしれない。

一側面として有効理論の文脈：

散乱振幅のユニタリ性や解析性を使うと…

- ・ 低エネルギー有効理論が満たすべき整合性条件
- ・ 有効理論の背後にある高エネルギー物理の情報

いただいたお題：S-matrix bootstrap とそれに関連する話題

ハドロン物理 = 量子重力なので、
今日はこっちメインで話します。



この考え方を宇宙や量子重力に適用すると…

- ・ 量子重力と無矛盾な宇宙論・素粒子論モデルは？
 - ・ インフレーションで超高エネルギーを探る！
- といった方向性を議論できるかもしれない。

目次

1. イントロ：量子重力と宇宙論の接点はあるのか？
2. ブートストラップ法：UV と IR を理論的に繋ぐ！
3. 重力の有効理論の地図作り

目次

1. イントロ：量子重力と宇宙論の接点はあるのか？
2. ブートストラップ法：UV と IR を理論的に繋ぐ！
3. 重力の有効理論の地図作り

このトークにおける量子重力理論の定義：

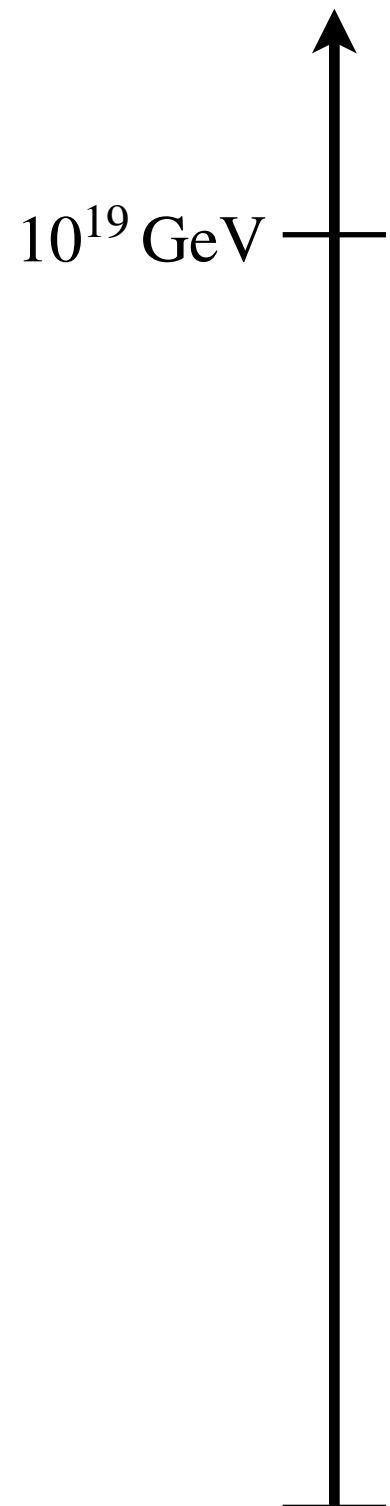
ユニタリ性や因果律など「場の量子論」の基本原則を尊重する重力理論

何を量子重力理論の原理とすべきか？はもちろん誰も知らない

弦理論を例に説明

量子重力理論としての弦理論

エネルギースケール



ミクロスケール (UV) : 量子重力理論??
※ ブラックホールや初期宇宙の理解に不可欠

マクロスケール (IR) : 一般相対性理論の成功
※ 宇宙論・素粒子論の根幹をなす



広がりを持った弦の理論



点粒子の理論

弦理論が UV における「重力の量子論」として資格を持つには？

ex. 高エネルギー散乱の振る舞い

高エネルギー散乱の振る舞い

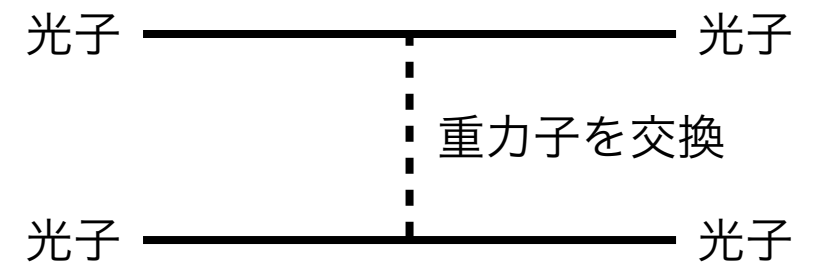
エネルギースケール

10^{19} GeV

散乱確率 > 1 (量子論として破綻)
→ 高エネルギーでは別の記述が必要

一般相対性理論を用いて
超高エネルギー散乱を解析

光子の散乱



時間

高エネルギー散乱の振る舞い

エネルギースケール

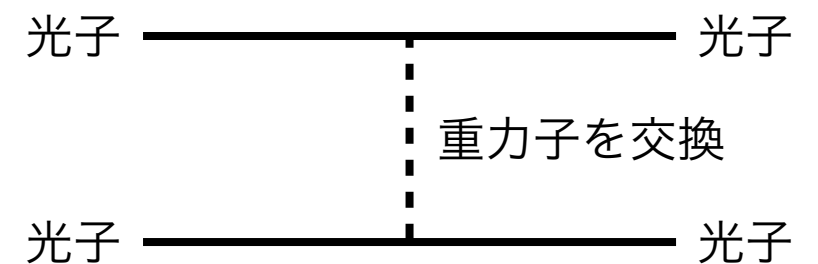
10^{19} GeV

散乱確率 > 1 (量子論として破綻)
→ 高エネルギーでは別の記述が必要

一般相対性理論を用いて
超高エネルギー散乱を解析

一般相対性理論：低エネルギー有効理論
※ IR では使えるが、UV では破綻する理論

光子の散乱



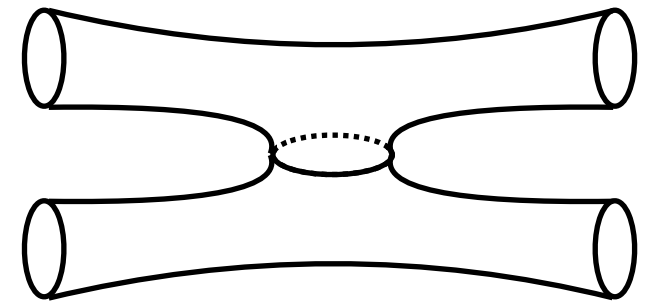
時間 →

高エネルギー散乱の振る舞い

エネルギースケール

10^{19} GeV

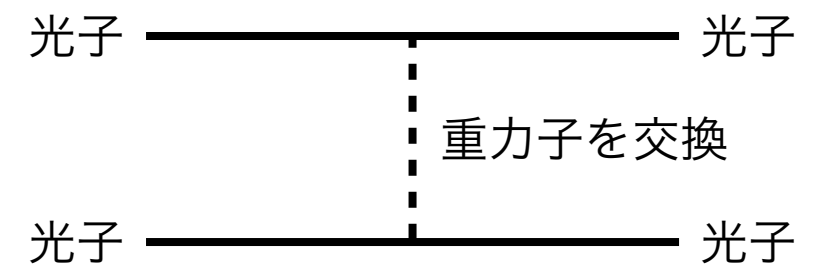
一般相対性理論：低エネルギー有効理論
※ IR では使えるが、UV では破綻する理論



弦理論における散乱
確率が1以下の理論を実現！



光子の散乱



時間 →

高エネルギー散乱の振る舞い

エネルギースケール

10^{19} GeV

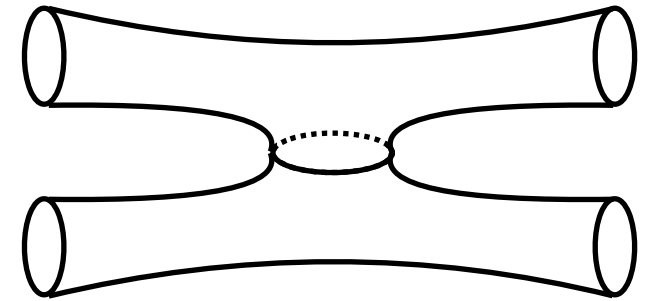
UV completion (紫外完備化) :

低エネルギー有効理論を補完し、

高エネルギーでの振る舞いが良い理論へ！

一般相対性理論：低エネルギー有効理論

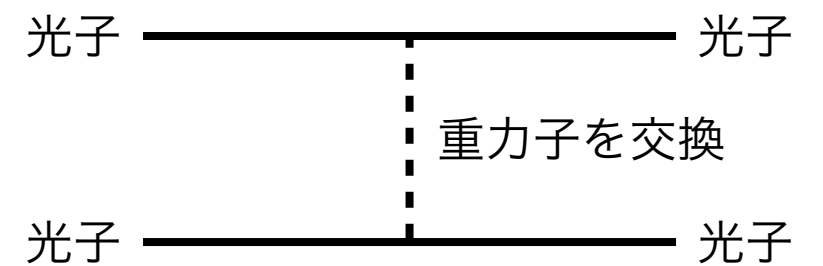
※ IR では使えるが、UV では破綻する理論



弦理論における散乱

確率が1以下の理論を実現！

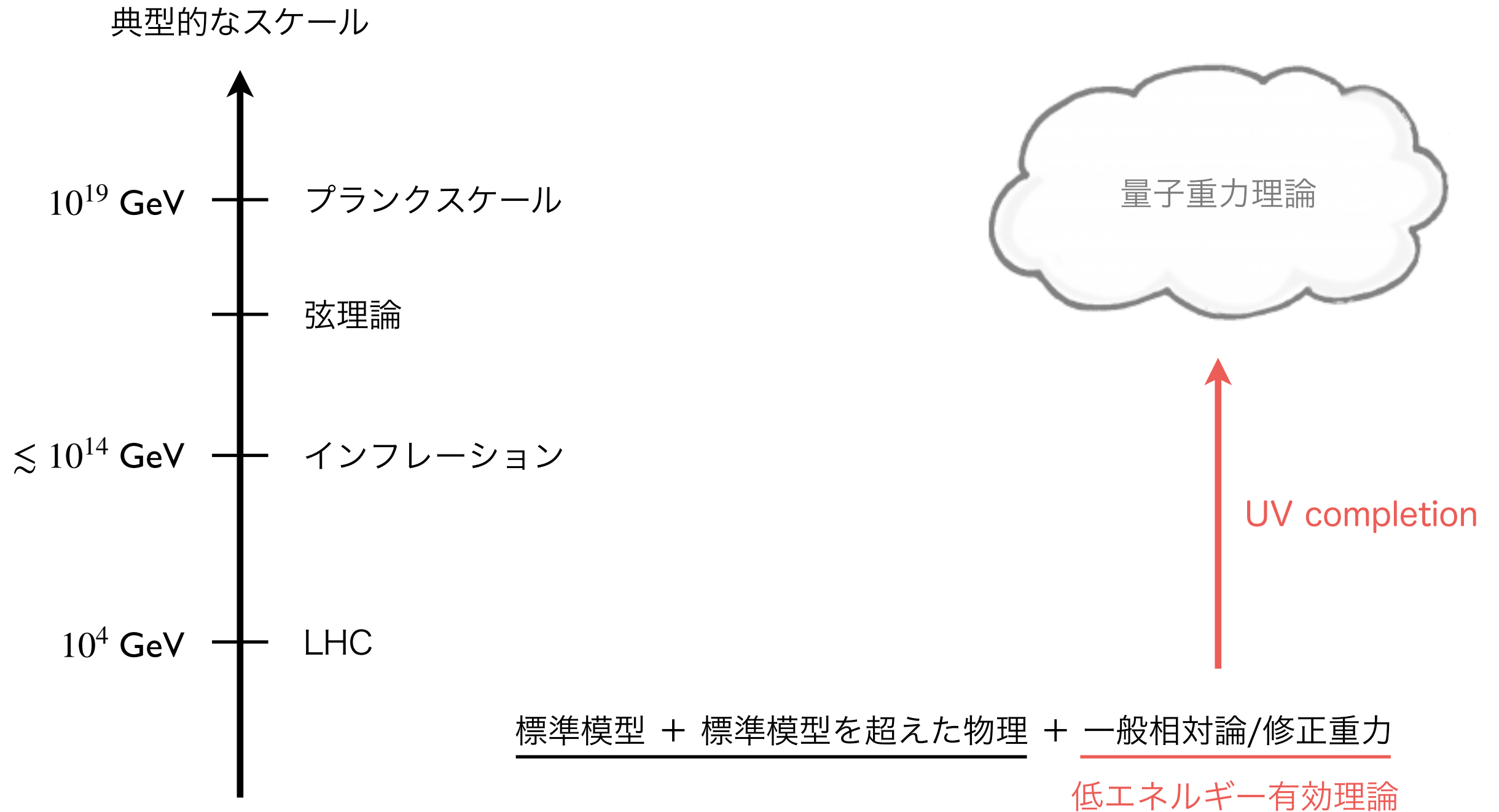
光子の散乱



時間 →

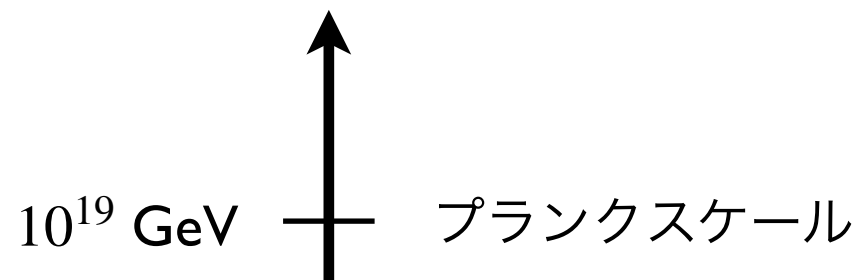
これを踏まえて量子重力と宇宙論

量子重力理論と宇宙論・素粒子論



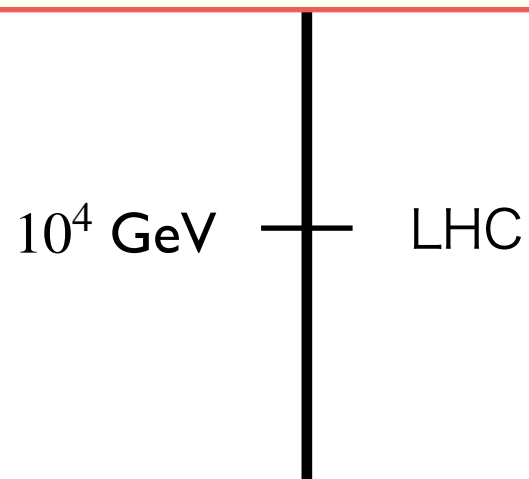
量子重力理論と宇宙論・素粒子論

典型的なスケール



量子重力と宇宙論の接点になりうる問い：

- 宇宙論で考えている有効理論はそもそも UV completion 可能か？
- できるのであれば、UV で理論をどのように変更すれば良いのか？



UV completion

標準模型 + 標準模型を超えた物理 + 一般相対論/修正重力

低エネルギー有効理論

目次

1. イントロ：量子重力と宇宙論の接点はあるのか？
2. ブートストラップ法：UV と IR を理論的に繋ぐ！
3. 重力の有効理論の地図作り

素粒子論の歴史を振り返ると …

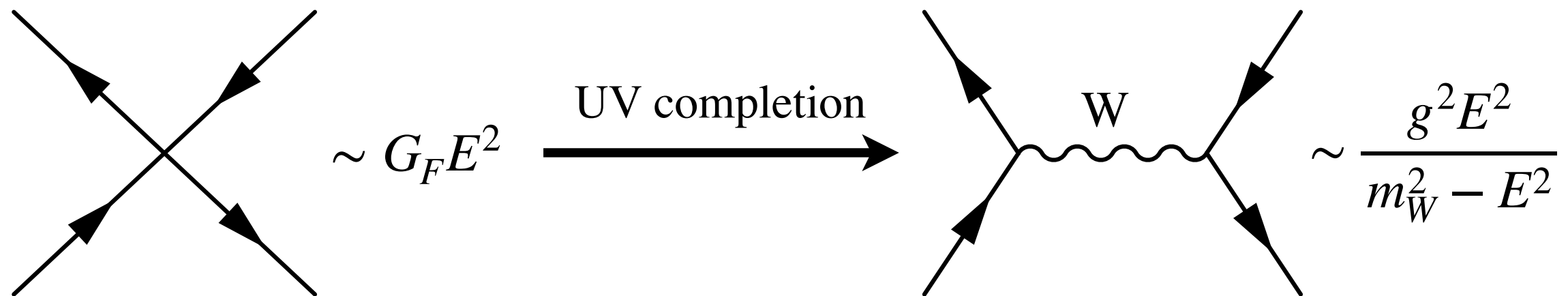
ユニタリ性や解析性を用いると UV と IR を理論的に繋げる！

ユニタリ性と新物理

散乱振幅のユニタリ性バウンド ($0 \leq \text{確率} \leq 1$):

散乱振幅 $\mathcal{M}$ の絶対値二乗が遷移確率なので、 $|\mathcal{M}| \lesssim 1$.

ex. フェルミ相互作用とウィークボソン



※ 結合定数 G_F のスケールから質量、散乱振幅の角度依存性からスピンのわかる

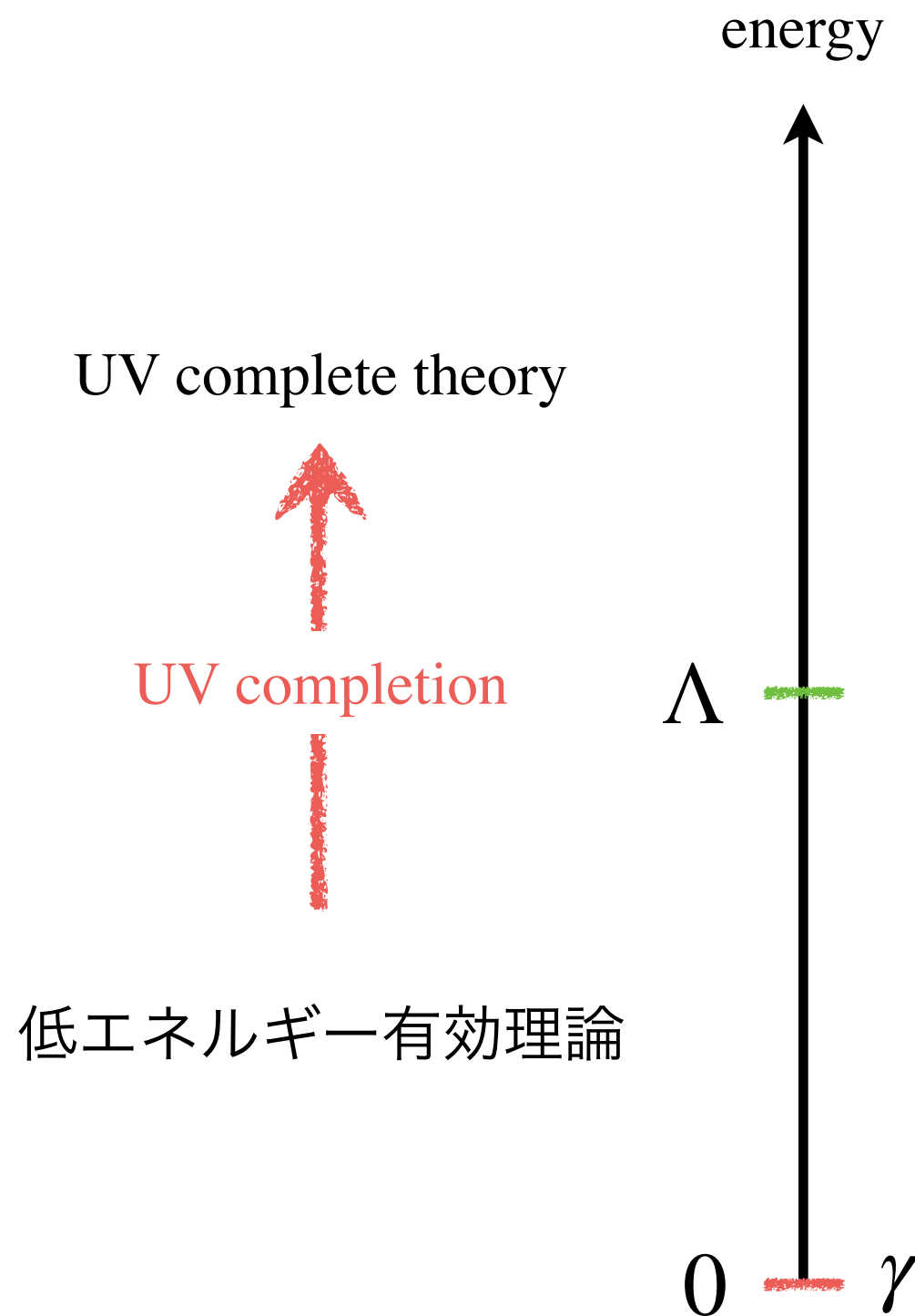
※ UV と IR のパラメータの関係： $G_F \sim \frac{g_W^2}{m_W^2}$.

ex. 同様に、ヒッグスボソンもウィークボソン散乱の解析から予言された。

散乱振幅の解析性（因果律と関係）を用いるとさらに強力で、
UV 理論の視点で「有効理論の地図」を作れる！

議論が込み入っているので、先に結果の例を

Maxwell 有効理論



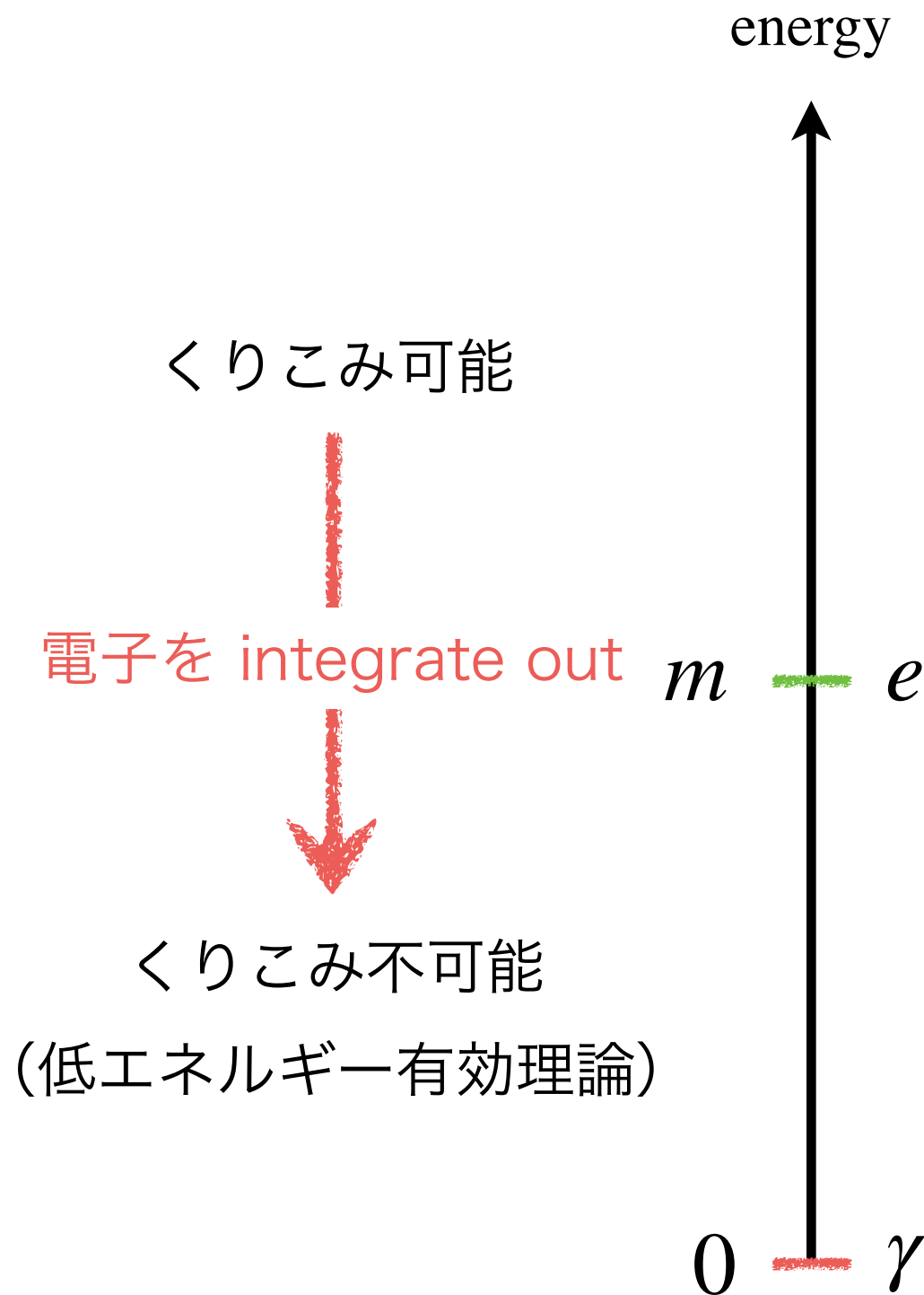
Maxwell 有効理論:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \alpha_1(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \alpha_2(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots$$

※ 対称性と微分展開を指針に理論を構成

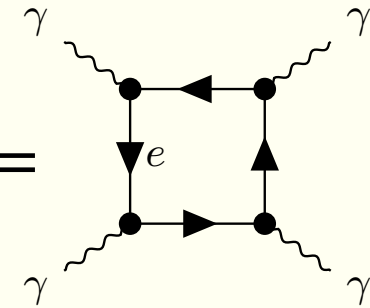
Q. UV 理論にちゃんと埋め込めるのか？ UV completion 可能か？

ex. UV 理論が QED の場合



$$\text{QED: } \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \bar{\psi}(\not{D} + m)\psi$$

$$\text{1-loop amplitude: } \mathcal{M} =$$



Euler-Heisenberg :

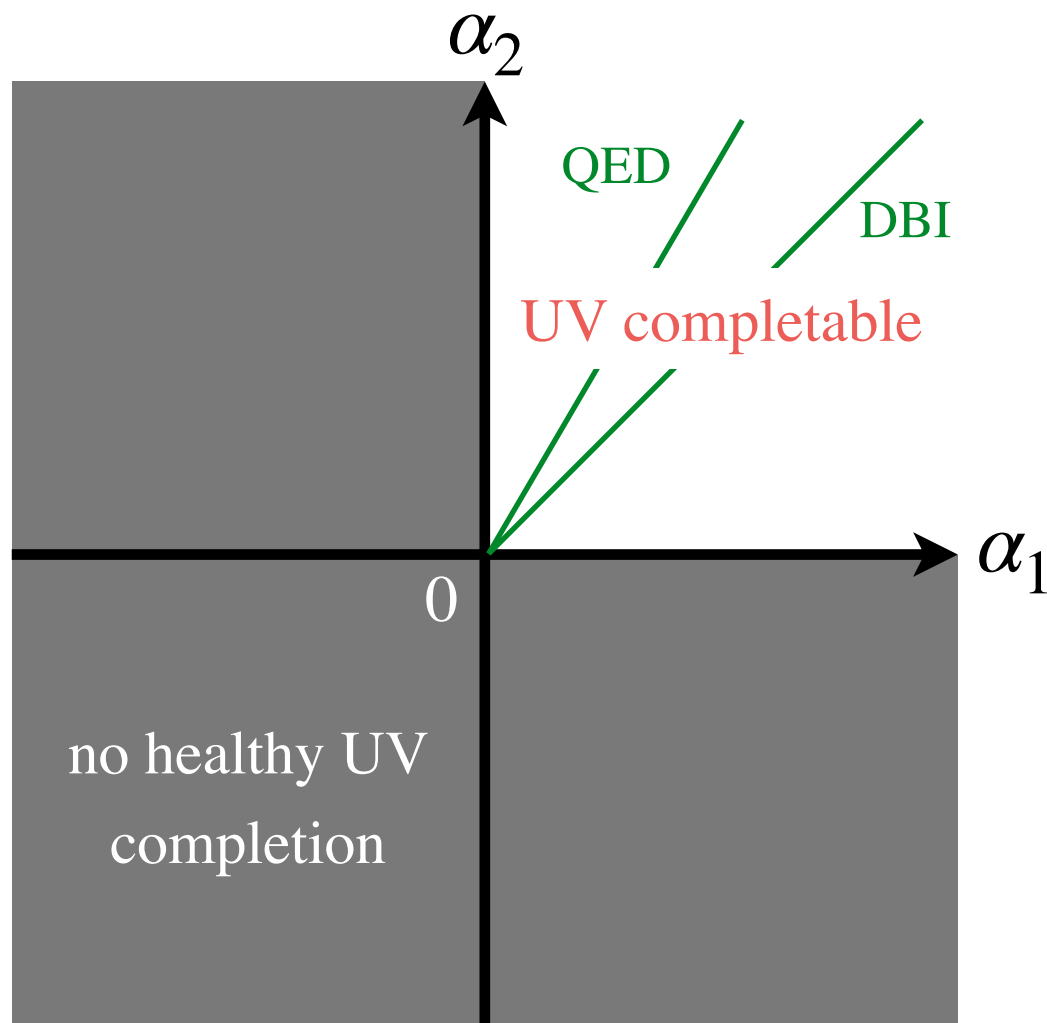
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \alpha_1(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \alpha_2(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots$$

$$\alpha_1 = \frac{e^4}{1440\pi^2 m^4}, \quad \alpha_2 = \frac{7e^4}{5760\pi^2 m^4}.$$

※ α_i が常に正なことに注意

(このトークでは符号が大事)

有効理論の地図作り



ユニタリ性や解析性を仮定すると
healthy UV completion を持てるのは
 $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ の領域だけと示せる（次頁）。

- パラメータ空間のどの領域が UV complete 可能か
 - できる場合はどんな UV 理論が背後にあるのか
- を表す「有効理論の地図」を理論的に作れる！

地図作りの鍵になるのが散乱振幅の解析性

因果律と解析性

ex. シグナル模型

1. 入力 $f_{\text{in}}(t)$ に対する線形応答の出力 $f_{\text{out}}(t)$ を考える：
$$f_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' S(t - t') f_{\text{in}}(t').$$
2. 因果律：未来の入力は出力に影響しない $\rightarrow S(t) = 0 \ (t < 0)$.

因果律と解析性

ex. シグナル模型

1. 入力 $f_{\text{in}}(t)$ に対する線形応答の出力 $f_{\text{out}}(t)$ を考える：
$$f_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' S(t - t') f_{\text{in}}(t').$$

2. 因果律：未来の入力は出力に影響しない $\rightarrow S(t) = 0$ ($t < 0$).

3. フーリエ表示 $\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt S(t) e^{i\omega t}$ を考えると、

$S(t) = 0$ ($t < 0$) は $\tilde{S}(\omega)$ が上半平面で解析的なことと等価。

因果律と解析性

ex. シグナル模型

1. 入力 $f_{\text{in}}(t)$ に対する線形応答の出力 $f_{\text{out}}(t)$ を考える： $f_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' S(t-t') f_{\text{in}}(t')$.

2. 因果律：未来の入力は出力に影響しない $\rightarrow S(t) = 0$ ($t < 0$).

3. フーリエ表示 $\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt S(t) e^{i\omega t}$ を考えると、

$S(t) = 0$ ($t < 0$) は $\tilde{S}(\omega)$ が上半平面で解析的なことと等価。

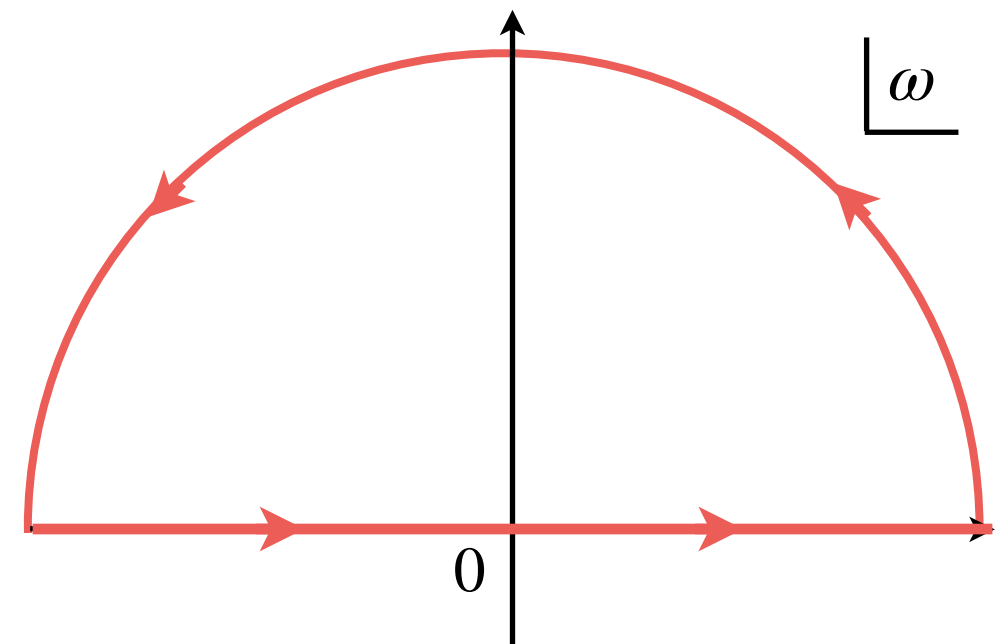
チェック

$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{S}(\omega) e^{-i\omega t}$ を $t < 0$ で評価：

$$S(t) = \oint_{C_+} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{S}(\omega) e^{-i\omega t} = 0.$$

無限遠の寄与がゼロ

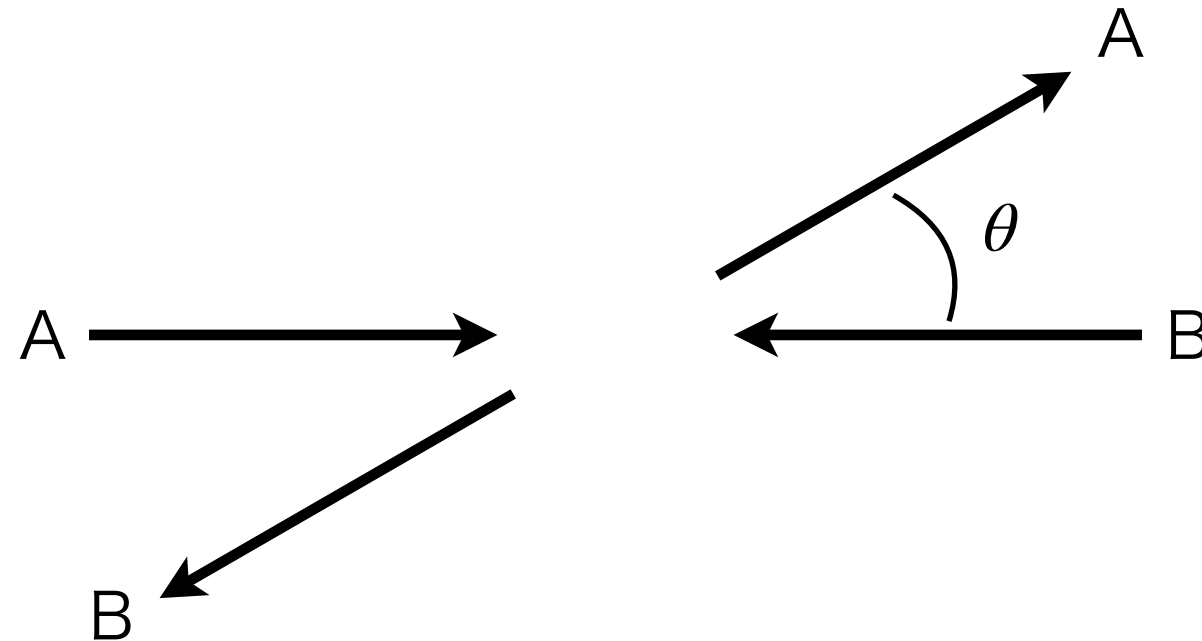
解析性



ω の複素平面

散乱振幅の解析性と UV-IR relation

2 → 2 散乱振幅の解析性



- 重心エネルギー E と散乱角 θ で特徴付け
- 特に、前方散乱 $\theta = 0$ の振幅は 1 変数 $s = E^2$ のみの関数 $\mathcal{M}(s)$.
- $\mathcal{M}(s)$ を複素関数としてみなすと、実軸上を除いて解析的

解析性から従う UV-IR relation

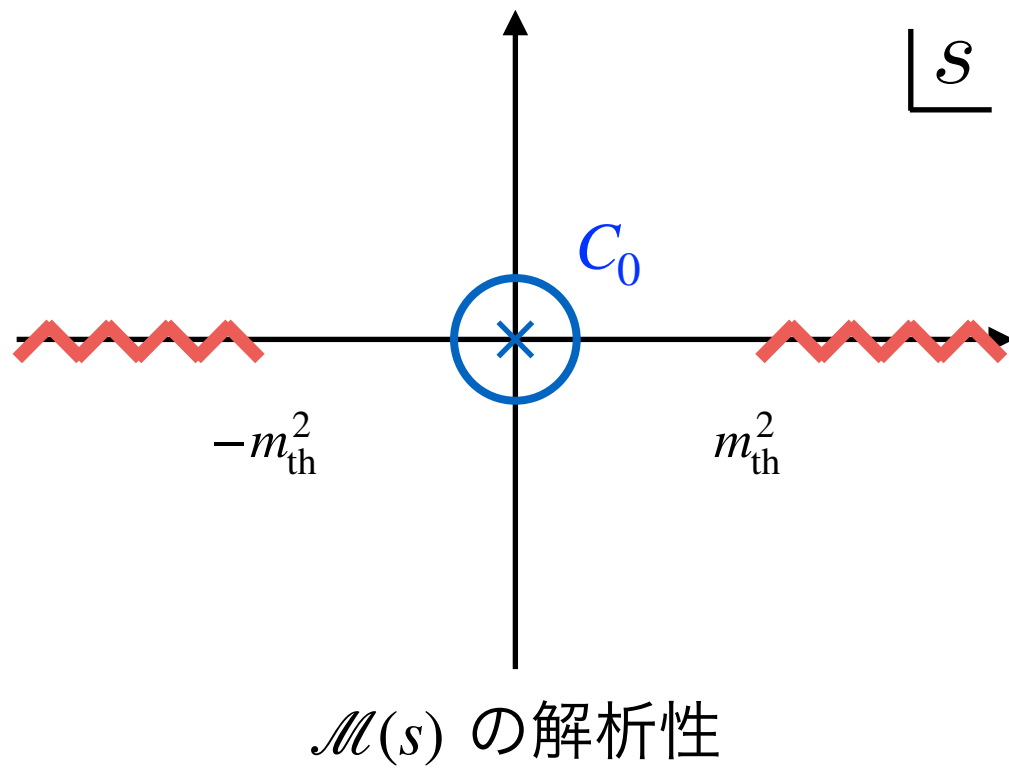
低エネルギー展開 ($s = E^2$) :

$$\mathcal{M}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} s^{2n}$$

cf. Maxwell 有効理論:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \alpha_1(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \alpha_2(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots$$

解析性から従う UV-IR relation



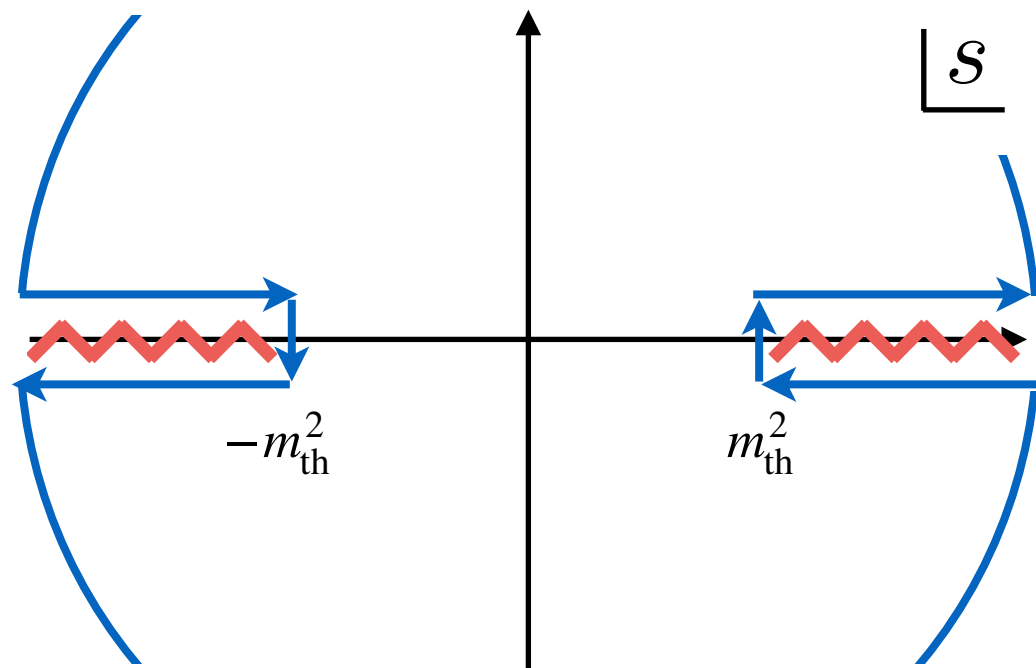
低エネルギー展開 ($s = E^2$) :

$$\mathcal{M}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} s^{2n}, \quad a_{2n} = \oint_{C_0} \frac{ds}{2\pi i} \frac{\mathcal{M}(s)}{s^{2n+1}}.$$

cf. Maxwell 有効理論:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \alpha_1(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \alpha_2(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots$$

解析性から従う UV-IR relation



$\mathcal{M}(s)$ の解析性

低エネルギー展開 ($s = E^2$) :

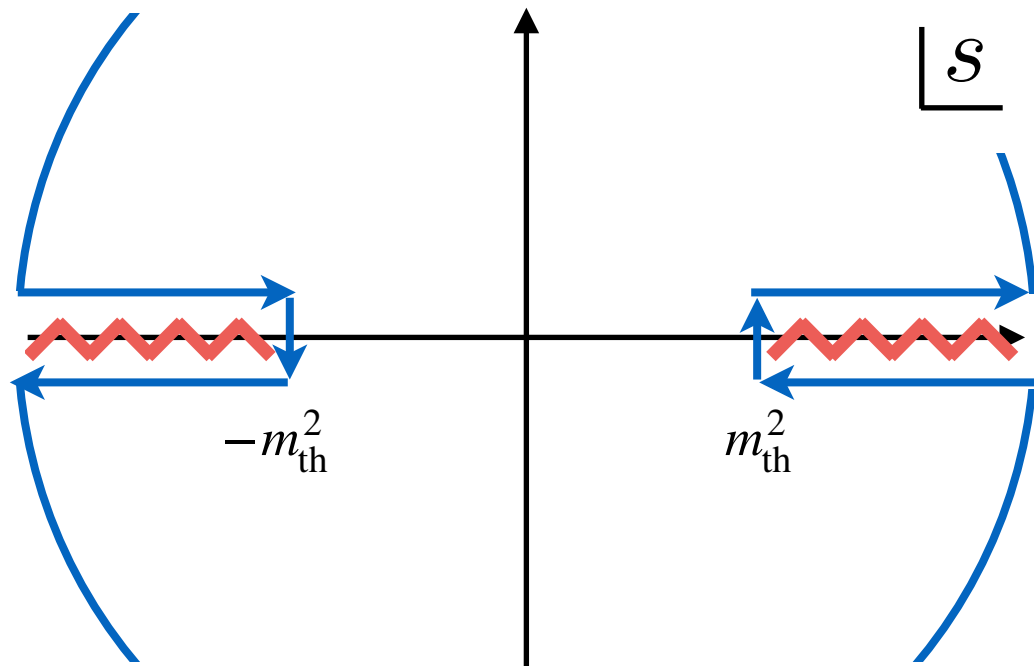
$$\mathcal{M}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} s^{2n}, \quad a_{2n} = \oint_{C_0} \frac{ds}{2\pi i} \frac{\mathcal{M}(s)}{s^{2n+1}}.$$

積分経路を変形すると、UV の情報を用いて書き換えられる！

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_{m_{\text{th}}^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} \mathcal{M}(s, t=0)}{s^{2n+1}} + \oint_{C_{\infty}} \frac{ds}{2\pi i} \frac{\mathcal{M}(s, t=0)}{s^{2n+1}}.$$

※ s - u 対称性と $\text{Disc } \mathcal{M}(s) = 2i \text{Im } \mathcal{M}(s)$ を用いた

解析性から従う UV-IR relation



$\mathcal{M}(s)$ の解析性

低エネルギー展開 ($s = E^2$) :

$$\mathcal{M}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} s^{2n}, \quad a_{2n} = \oint_{C_0} \frac{ds}{2\pi i} \frac{\mathcal{M}(s)}{s^{2n+1}}.$$

積分経路を変形すると、UV の情報を用いて言え変えられる！

$$\text{If } |\mathcal{M}(s, t=0)| < |s|^{2n}$$

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_{m_{\text{th}}^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} \mathcal{M}(s, t=0)}{s^{2n+1}} + \oint_{C_{\infty}} \frac{ds}{2\pi i} \frac{\mathcal{M}(s, t=0)}{s^{2n+1}}.$$

※ s - u 対称性と $\text{Disc } \mathcal{M}(s) = 2i \text{Im } \mathcal{M}(s)$ を用いた

一般的に $|\mathcal{M}(s)| < s^2$ ($s \rightarrow \infty$) が成り立つことが知られており、
以下の UV-IR relation、特に IR 係数の正値性が従う [Adams et al '06] :

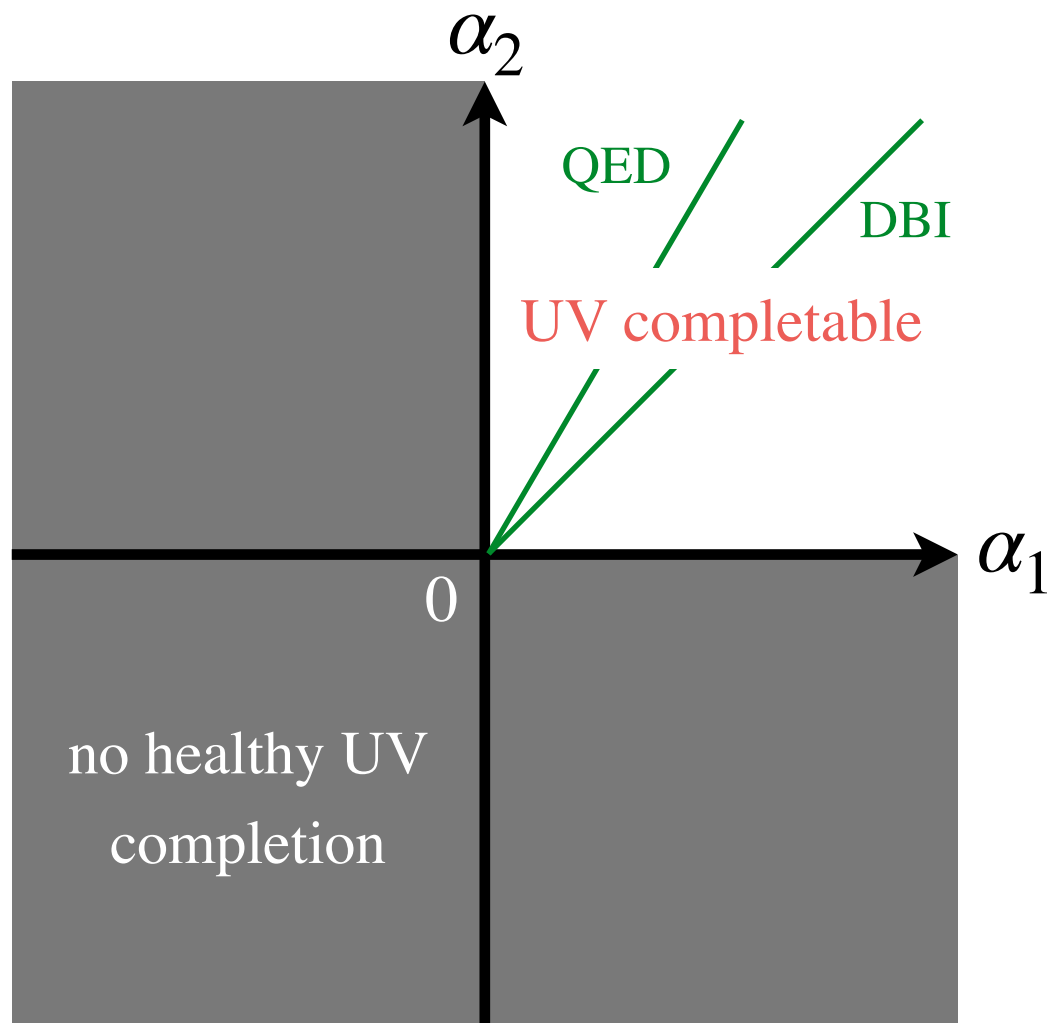
$$a_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_{m_{\text{th}}^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} \mathcal{M}(s)}{s^{2n+1}} = \frac{2}{\pi} \int_{m_{\text{th}}^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} \sigma(s)}{s^{2n}} \geq 0 \quad \text{for} \quad 2n = 2, 4, \dots$$

UV の詳細に寄らず普遍的に正

cf. Maxwell 有効理論:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \alpha_1 (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \alpha_2 (F_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots$$

有効理論の地図作り



ユニタリ性や解析性を仮定すると
healthy UV completion を持てるのは
 $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ の領域だけと示せる（次頁）。

- パラメータ空間のどの領域が UV complete 可能か
 - できる場合はどんな UV 理論が背後にあるのか
- を表す「有効理論の地図」を理論的に作れる！

さらに散乱振幅の角度依存性も考慮した解析を行うと、
UV 理論にいる粒子の「スピン」の情報を反映した UV-IR relation が得られる。

cf. de Rham-Kundu-Reece-Tolley-Zhou [arXiv:2203.06805]

“Snowmass White Paper: UV Constraints on IR Physics.”

まとめ

ユニタリ性や因果律を用いると

- UV と IR の物理を理論的に関係付けられる
- 特に、IR の有効理論の絞り込みができる。

このような考え方を**ブートストラップ法**という。

目次

1. イントロ：量子重力と宇宙論の接点はあるのか？
2. ブートストラップ法：UV と IR を理論的に繋ぐ！
3. 重力の有効理論の地図作り

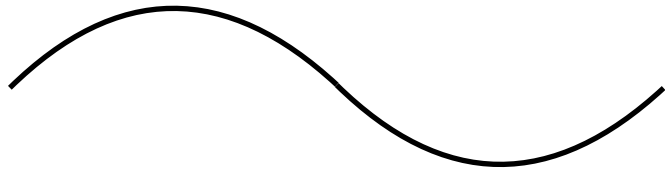
以上の議論を重力理論に応用すれば、量子重力と宇宙論の接点を探せる??

現状何が言えていて、何が今後のターゲットになるかを結果だけ

その 1 : 重力理論と高階スピン状態について

以下の説明のために弦理論とハドロン物理について補足

弦理論のスペクトルと高階スピン状態

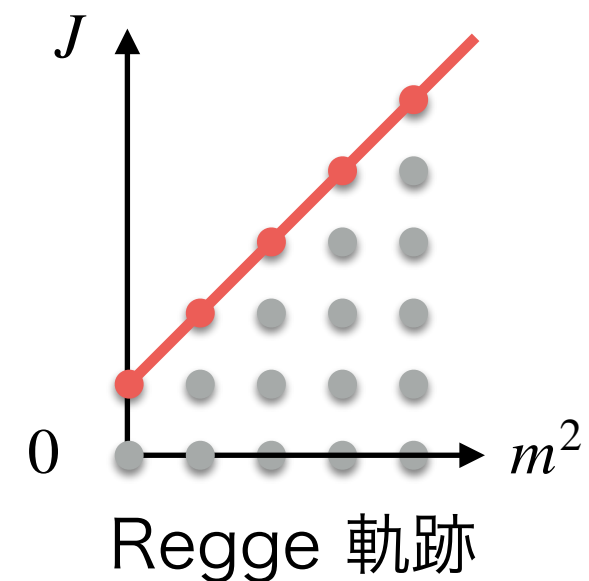


弦の振動モード：

- 節の数と振動の向き、振幅で決まる
- 量子論では振幅が離散化される

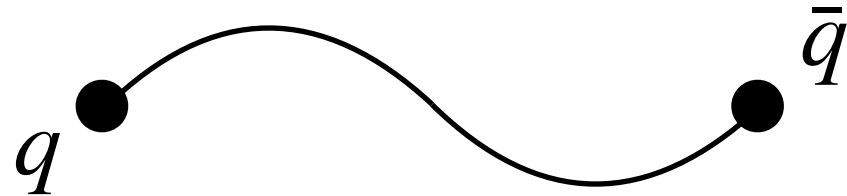
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
第二励起状態	$\oplus \oplus a_{-2}^{\mu} 0\rangle$	$\oplus \oplus \oplus a_{-1}^{\mu} a_{-1}^{\nu} 0\rangle$
第一励起状態	$\oplus \oplus a_{-1}^{\mu} 0\rangle$	
基底状態	$— 0\rangle$	

弦の励起状態に**無限個の「高階スピン状態」**が現れるのが特徴！

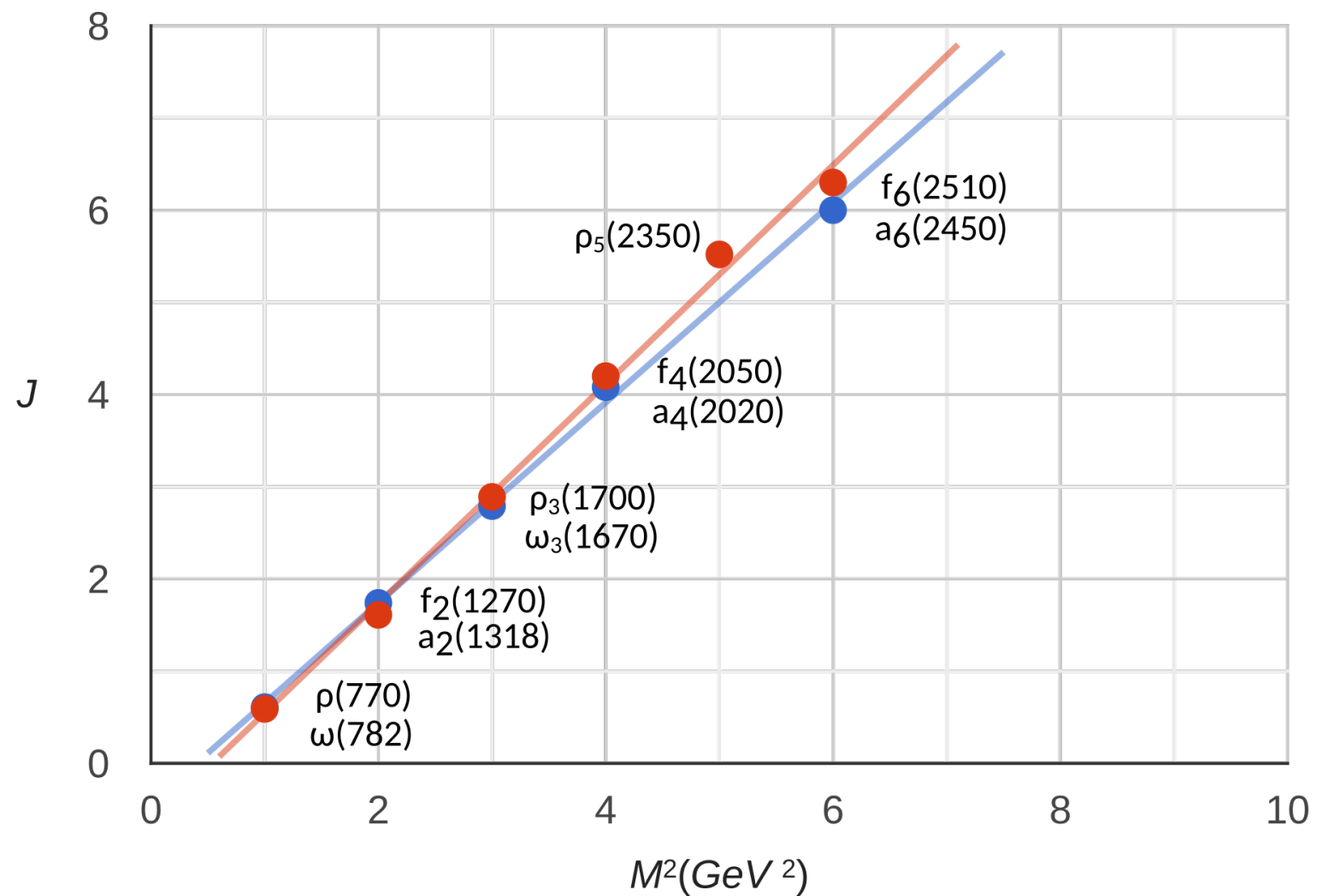


ハドロンの Regge 軌跡

弦理論はもともとハドロンの有効模型だった



ハドロンも同様の高階スピントワーを持つ



このような高階スピン状態の存在もユニタリ性や因果律から従う

アインシュタイン重力への高階微分補正と弦理論

[Camanho-Edelstein-Maldacena-Zhiboedov '14]

アインシュタイン重力の有効理論：

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \frac{1}{\Lambda^4} R_{\mu\nu\rho\sigma}^3 + \dots \right]$$

※ 4次元では、 R^2 タイプの補正は運動方程式や散乱振幅に効かない

因果律の帰結

高階微分補正のスケールがプランクスケールより低いとき $\Lambda \ll M_{\text{Pl}}$ 、

そのスケール Λ に**無限個の高階スピン状態**が必用。

cf. 弦理論の特徴：無限個の高階スピン状態（Regge tower）

massive gravity is not positive

[Bellazzini-Isabella-Ricossa-Riva '14]

「重力子が質量を持つ」とする massive gravity 模型

- 長距離での重力が弱まり、相対的に加速していると感じる。
→ 暗黒エネルギーへの alternative approach として盛んに研究
- 散乱振幅のユニタリ性や解析性を用いると
重力子の質量スケールに無限個の「高階スピン粒子」が必用！
※ これらの粒子がいると暗黒エネルギーを説明できない

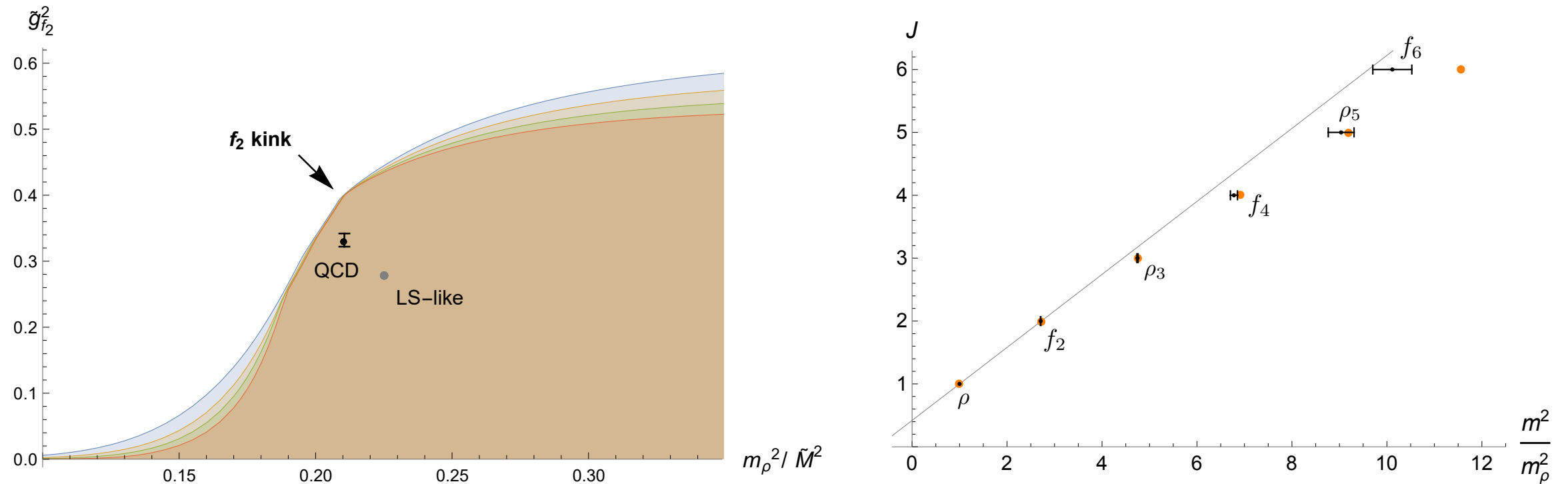
解釈 1 : massive gravity は初めから理論的に死んでいる

解釈 2 : massive gravity が見つかり、基本原理の再考が必用！

いわゆる修正重力理論の多くはユニタリ性や解析性と相性が悪い

large N QCD のメソンの Regge 軌跡

[Albert-Henrikssonf-Rastelli-Vichi '23]



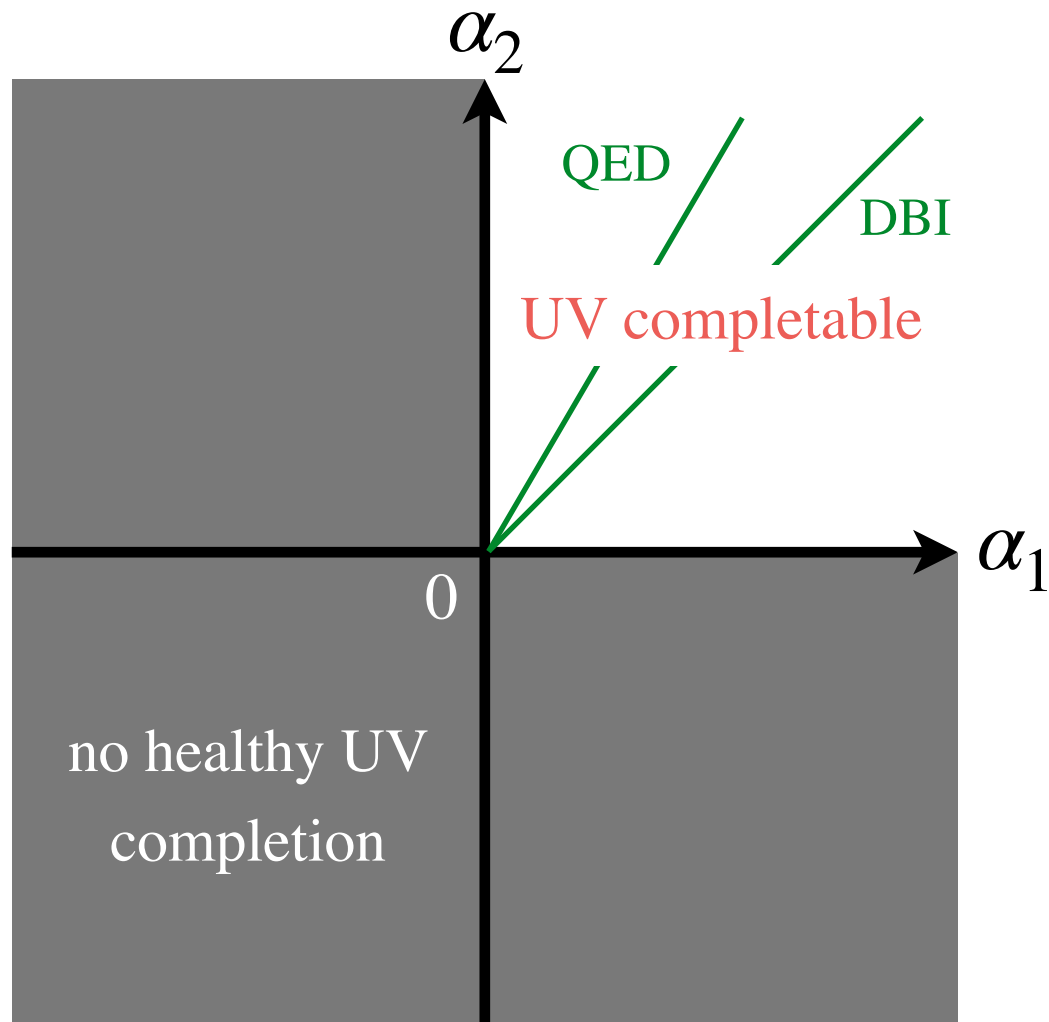
スピン 1 の ρ メソンに加えてスピン 2 のメソンがいると仮定：

散乱振幅のユニタリ性と解析性を用いることで、Regge 軌跡を再構成！

今後は重力理論の Regge 軌跡の再構成も？

その2：ランドスケープとスワンブランド

「有効理論の地図作り」のおさらい



healthy UV completion を持てない
理論的にまずいパラメータ領域が存在！

cf. Maxwell 有効理論:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \alpha_1(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \alpha_2(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots$$

同様に、量子重力と相性の悪い理論模型が一定数存在すると考えられている

ランドスケープとスワンプランド

[Vafa '05, Arkani-Hamed et al 06, Ooguri-Vafa '06, ...]

[レビュー：Valenzuela et al '21, Vafa et al '22]



スワンプランド（沼地）：
一見無矛盾そうに見えるが、
実は量子重力と相容れない危険な模型

理論 B

~~理論 C~~

ランドスケープ（陸地）：
量子重力と無矛盾な場の量子論模型

理論 A

ランドスケープとスワンプランドの判別条件を解明することで

1. 宇宙論・素粒子論の謎に量子重力の立場から挑む！
2. 宇宙観測・素粒子実験から量子重力理論の手がかりを探る！

ex. 判別条件の 1 つとして提案されている「弱い重力予想」 [Arkani Hamed et al '06] :

- 弦理論研究から出てきた「**すべての力の中で重力は最も弱い**」という予想
- ざっくり言って「超弱結合、超平坦ポテンシャル、超軽量」は量子重力と相性が悪い
- インフレーション、暗黒物質、暗黒エネルギー、ニュートリノなどへの応用が期待

cf. Harlow-Heidenreich-Reece-Rudelius [arXiv:2201.08380]

“The Weak Gravity Conjecture: A Review”

The String landscape, black holes and gravity as the weakest force

Nima Arkani-Hamed (Harvard U., Phys. Dept.), Lubos Motl (Harvard U., Phys. Dept.), Alberto Nicolis (Harvard U., Phys. Dept.), Cumrun Vafa (Harvard U., Phys. Dept.)

Jan, 2006

20 pages

Published in: *JHEP* 06 (2007) 060

e-Print: [hep-th/0601001](https://arxiv.org/abs/hep-th/0601001) [hep-th]

DOI: [10.1088/1126-6708/2007/06/060](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/06/060)

Report number: HUTP-05-A0057

View in: [AMS MathSciNet](#), [ADS Abstract Service](#)



pdf



links



cite



claim



reference search



1,435 citations

Citations per year



過去10年くらいアクティブに研究されている

The String landscape, black holes and gravity as the weakest force

Nima Arkani-Hamed (Harvard U., Phys. Dept.), Lubos Motl (Harvard U., Phys. Dept.), Alberto Nicolis (Harvard U., Phys. Dept.), Cumrun Vafa (Harvard U., Phys. Dept.)

Jan, 2006

20 pages

Published in: *JHEP* 06 (2007) 060

e-Print: [hep-th/0601001](https://arxiv.org/abs/hep-th/0601001) [hep-th]

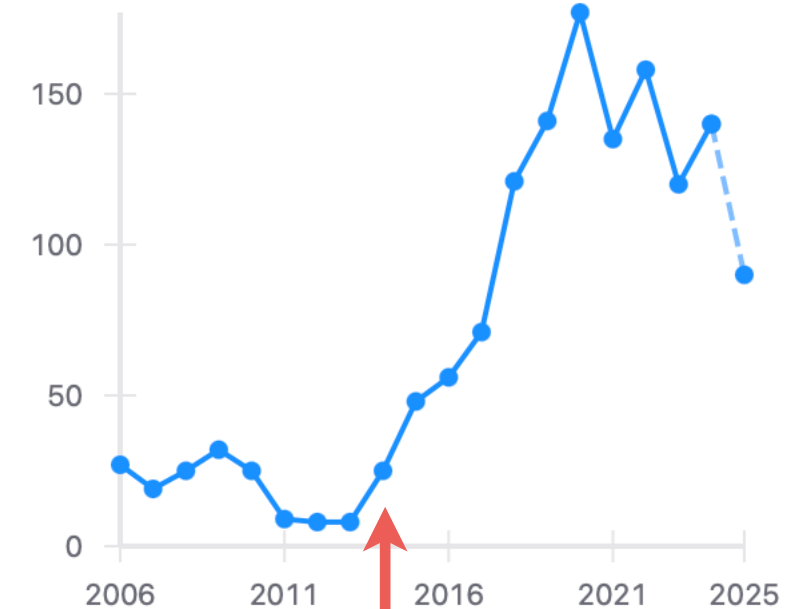
DOI: [10.1088/1126-6708/2007/06/060](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/06/060)

Report number: HUTP-05-A0057

View in: [AMS MathSciNet](#), [ADS Abstract Service](#)

 pdf  links  cite  claim  reference search  1,435 citations

Citations per year



BICEP2

2014年の BICEP2 騒動

$r \simeq 0.2$ の原始重力波由来の CMB B-mode を見つけたのではと世間騒然
弱い重力予想と相性が悪いことから、スワンプランド研究が再加速。

※ 実験・観測技術の進歩・向上は弦理論屋さんをも確実に動かす。

The String landscape, black holes and gravity as the weakest force

Nima Arkani-Hamed (Harvard U., Phys. Dept.), Lubos Motl (Harvard U., Phys. Dept.), Alberto Nicolis (Harvard U., Phys. Dept.), Cumrun Vafa (Harvard U., Phys. Dept.)

Jan, 2006

20 pages

Published in: *JHEP* 06 (2007) 060

e-Print: [hep-th/0601001](https://arxiv.org/abs/hep-th/0601001) [hep-th]

DOI: [10.1088/1126-6708/2007/06/060](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/06/060)

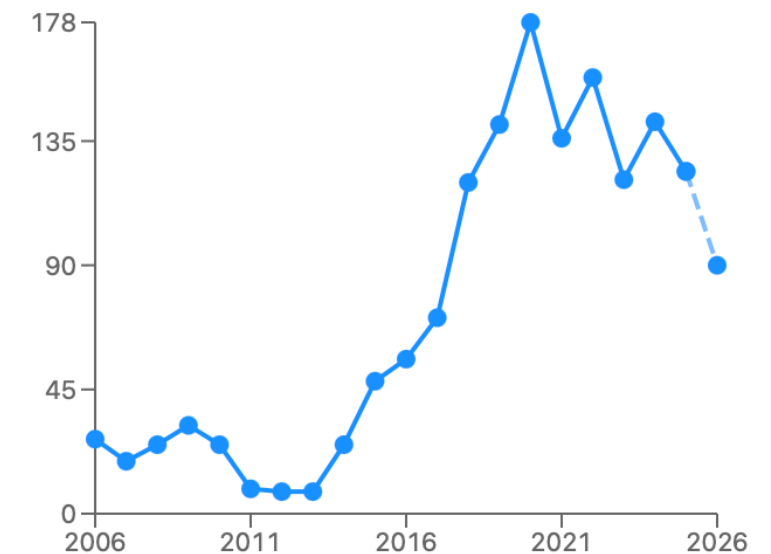
Report numbers: HUTP-05-A0057

View in: [AMS MathSciNet](#), [ADS Abstract Service](#)

 pdf  links  cite  claim

 reference search  1,563 citations

Citations per year



hep-th 業界の進展

1. AdS/CFT 対応 + 共形ブートストラップ

※ 共形場理論の整合性 = AdS 時空中の重力理論の整合性

2. ホログラフィーと量子情報の分野横断型研究

※ 量子情報量の整合性 = 重力の整合性 (ex. 対称性について [Harlow-Ooguri '18])

3. “散乱振幅業界”の盛り上がり → S行列ブートストラップのリバイバル！

これらの進展を応用により「量子重力の整合性条件」を解明できないか？

弱い重力予想 (Weak Gravity Conjecture)

[ArkaniHamed-Motl-Nicolis-Vafa '06]

一言で言うと「重力が一番弱い相互作用」という予想

ex. 重力とクーロン力 (4次元平坦時空)

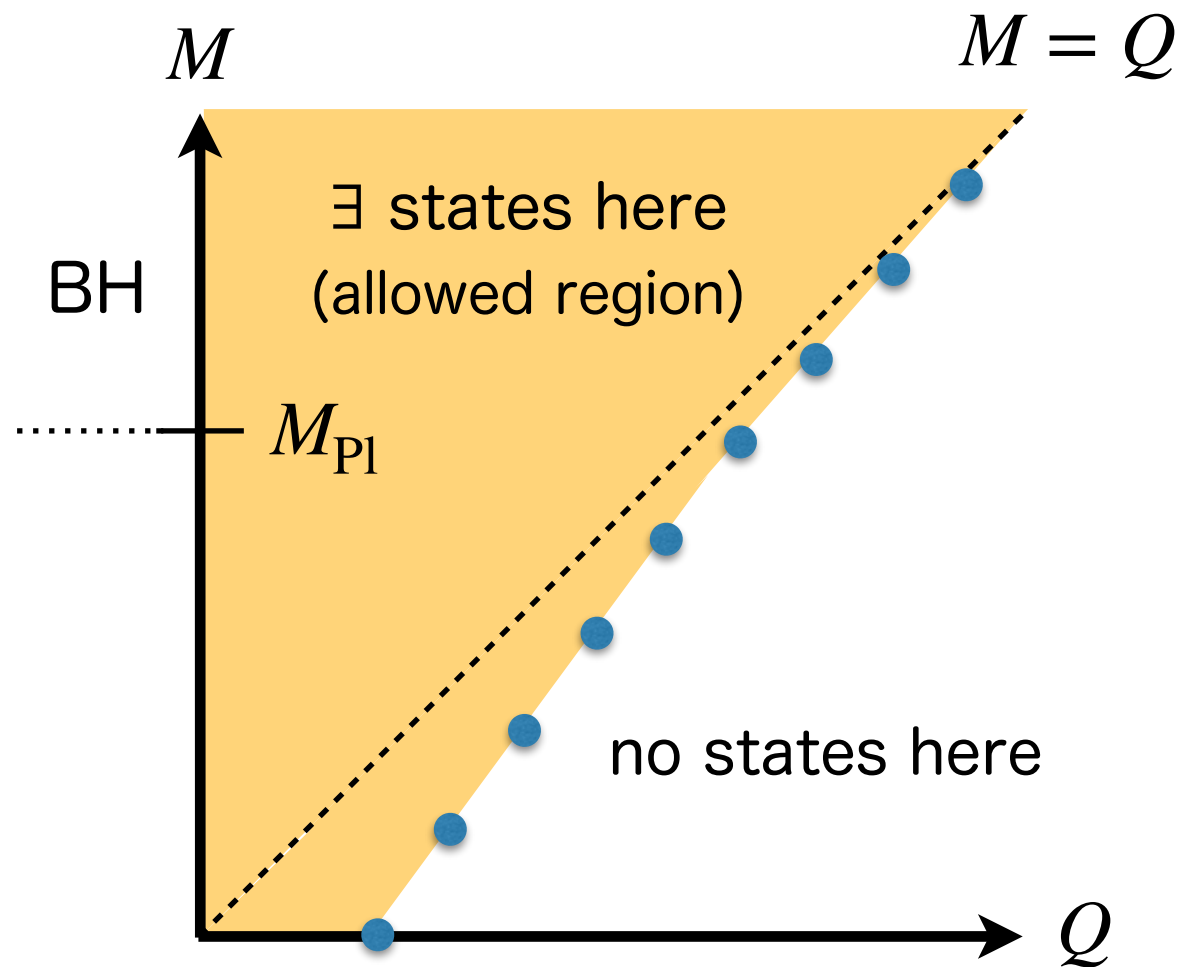


$$\text{クーロン力} > \text{重力} \Leftrightarrow kq^2 > Gm^2$$

この不等式を満たす質量 m 電荷 q の荷電状態が存在すべし

- photon を decouple ($k \rightarrow 0$) すると不等式は成り立たない
 - ※ 「量子重力に広域対称性はない」という予想を定量化したもの
- 重力理論 ($G \neq 0$) でのみ非自明な意味を持つ
- 現実世界のQEDでは電子が不等式を自明に満たすので面白くない。
BSMへの応用やアクシオン等への一般化は現象論に使える条件も。

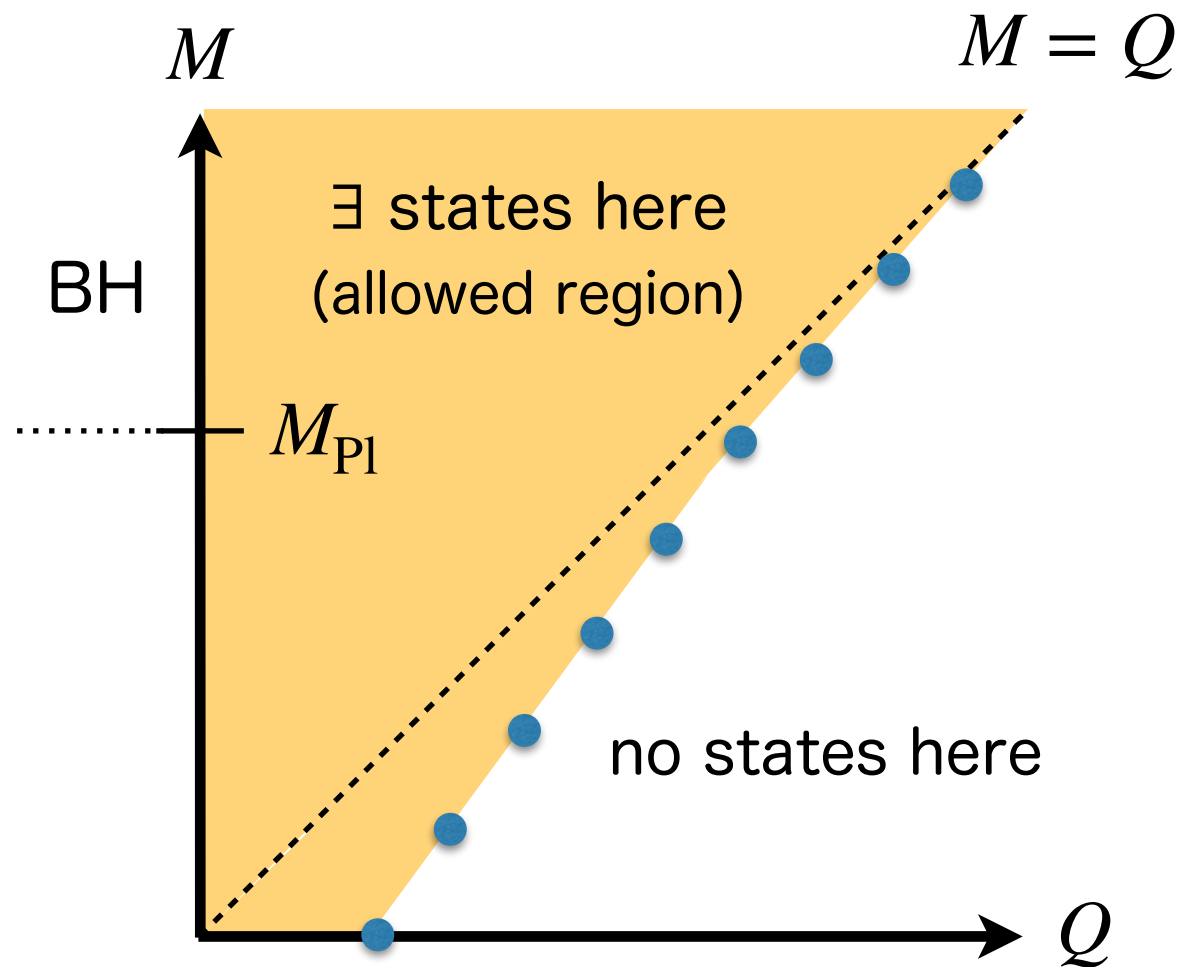
弦理論からの動機付け



荷電状態の典型的なスペクトル

1. 様々なスケールに $M \leq Q$ (weak gravity) の状態
cf. Tower WGC [Andriolo-Junghans-TN-Shiu '18]
 2. “境界”は単調的に変化し、 $M = Q$ に漸近する
- ※ 大きな ($M \rightarrow \infty$) 極限BHが $M = Q$ となる単位系

弦理論からの動機付け



荷電状態の典型的なスペクトル

1. 様々なスケールに $M \leq Q$ (weak gravity) の状態
cf. Tower WGC [Andriolo-Junghans-TN-Shiu '18]
 2. “境界”は単調的に変化し、 $M = Q$ に漸近する
- ※ 大きな ($M \rightarrow \infty$) 極限BHが $M = Q$ となる単位系

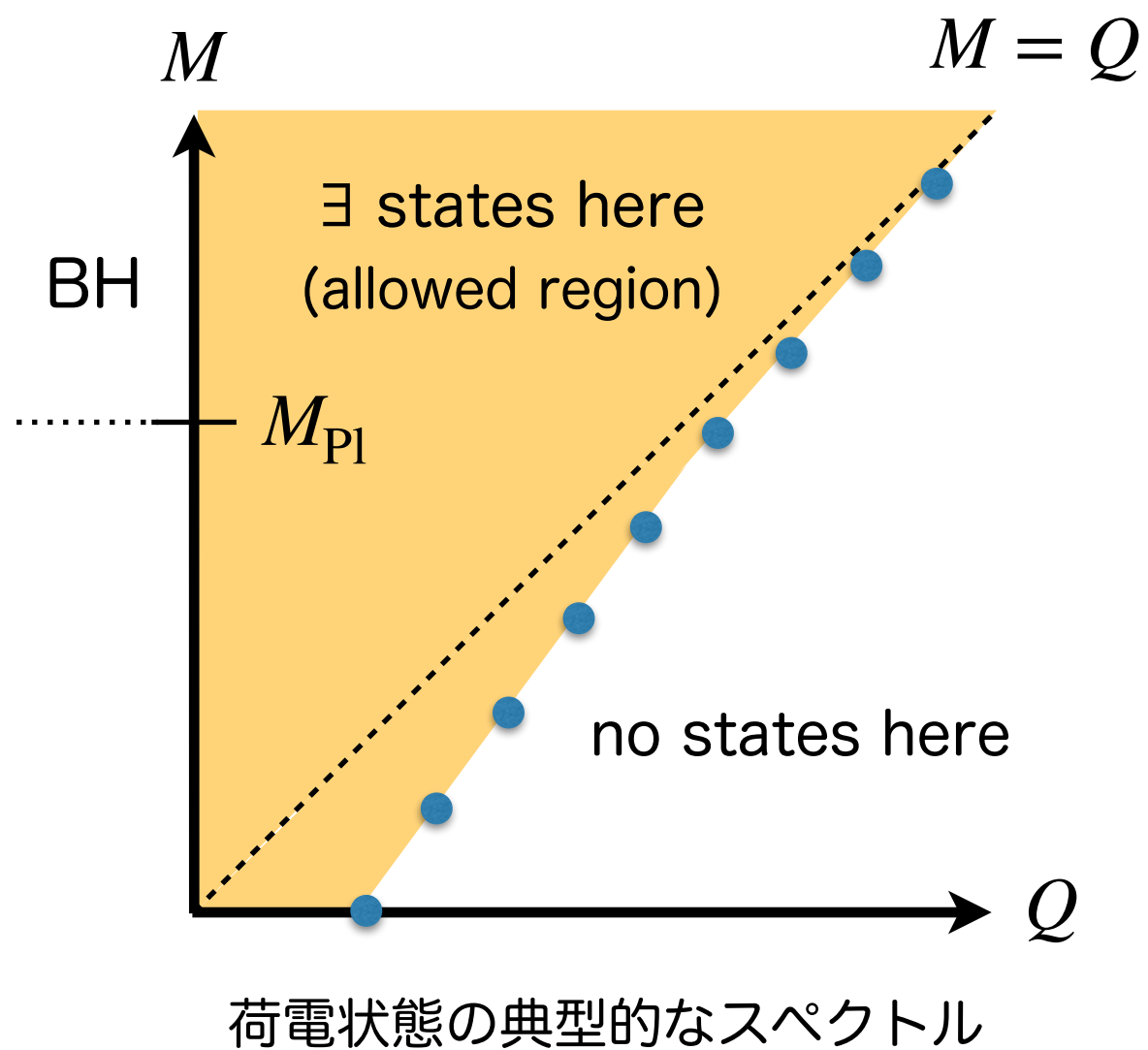
Q. どのスケールにどの程度の weak gravity state があるか？は予想-dependent

一番強い主張で尤もらしいもの：subLattice WGC [Heidenreich et al '15 & '16, Montero et al '16]

※ charge lattice の部分格子上に weak gravity state が存在

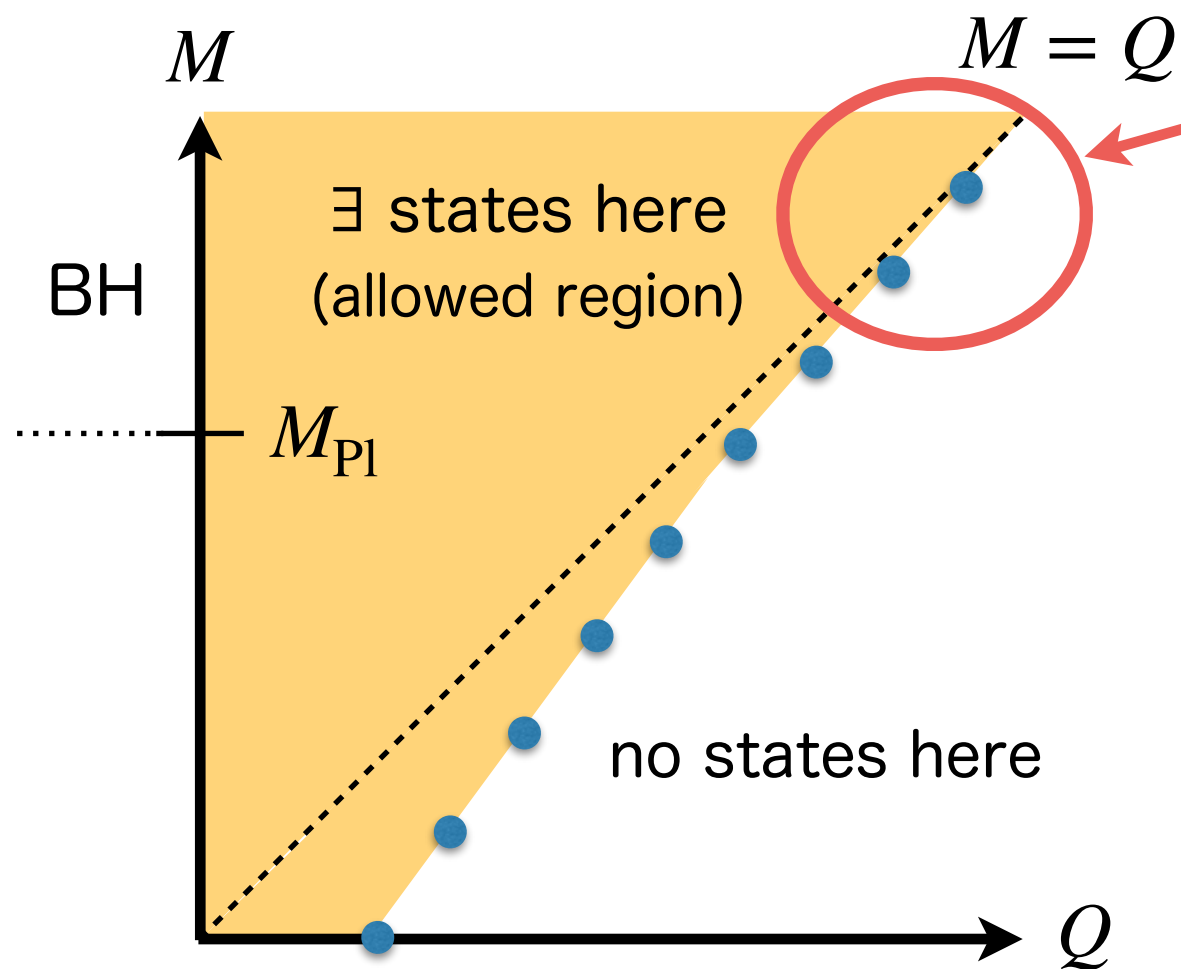
荷電ブラックホールスペクトルの解析にはユニタリ性や因果律が有用

以前のスライド「弦理論からの動機付け」より



1. 様々なスケールに $M \leq Q$ (weak gravity) の状態
cf. Tower WGC [Andriolo-Junghans-TN-Shiu '18]
2. “境界”は単調的に変化し、 $M = Q$ に漸近する
※ 大きな ($M \rightarrow \infty$) 極限BHが $M = Q$ となる単位系

以前のスライド「弦理論からの動機付け」より



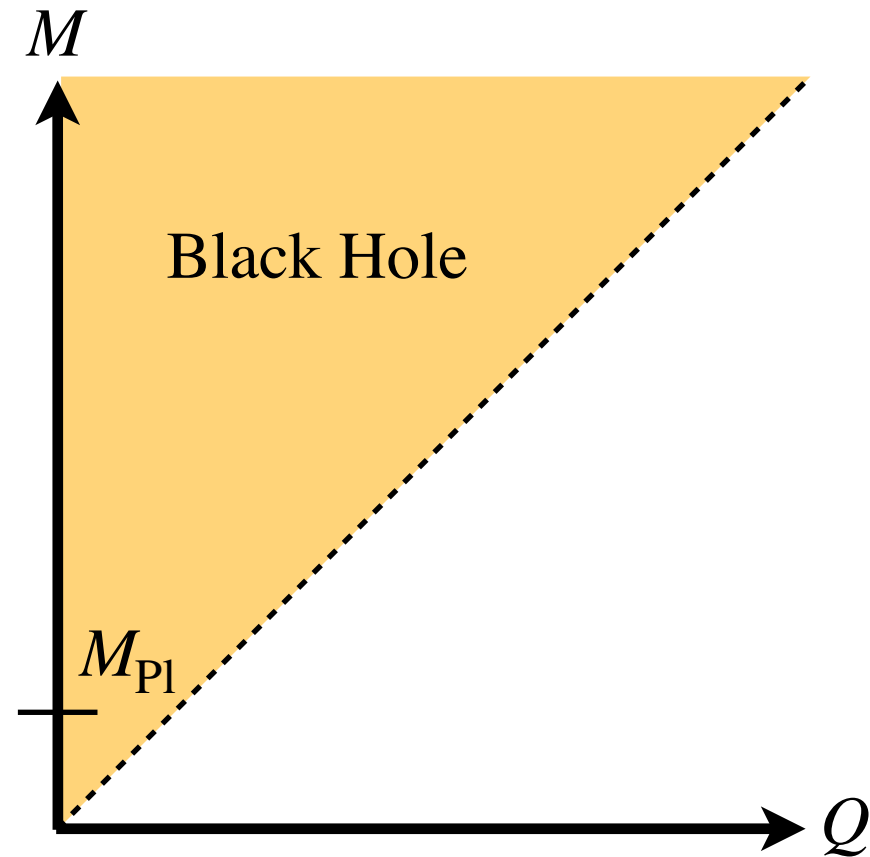
BH の解析には positivity や因果律が有用！

1. 様々なスケールに $M \leq Q$ (weak gravity) の状態
cf. Tower WGC [Andriolo-Junghans-TN-Shiu '18]
2. “境界”は単調的に変化し、 $M = Q$ に漸近する
※ 大きな ($M \rightarrow \infty$) 極限BHが $M = Q$ となる単位系

荷電状態の典型的なスペクトル

positivity bound と荷電ブラックホール [Hamada-TN-Shiu '18, ...]

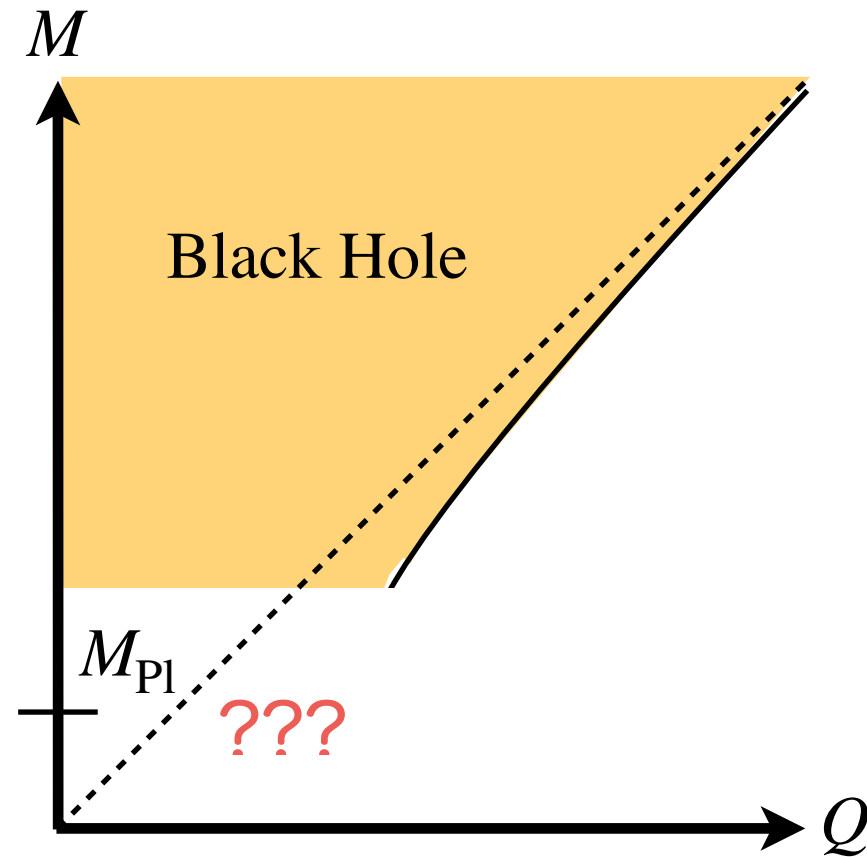
BH extremality への高階微分補正



Einstein-Maxwell 理論の BH : $GM^2 \geq kQ^2$

※ 斥力のせいで電荷を多くは詰め込めない

BH extremality への高階微分補正



$2\alpha_1 - \alpha_3 > 0$ なら $GM^2 < kQ^2$ を満たす BH !

※ 光子散乱の positivity : $2\alpha_1 - \alpha_3 \gtrsim 0$.

※ BH エントロピーへの補正 (Q, M fixed) も正

- Einstein-Maxwell 理論への高階微分補正

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\alpha_1}{4M_{\text{Pl}}^2} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_2}{4M_{\text{Pl}}^2} (F_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_3}{2M_{\text{Pl}}^2} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} W^{\mu\nu\rho\sigma} + \dots \right]$$

※ BH 解が補正されるので BH extremality も修正 [Kats-Motl-Padi '06]

$$\frac{GM^2}{kQ^2} = 1 - \frac{32\pi^2}{5Q^2} (2\alpha_1 - \alpha_3) + \mathcal{O}(1/Q^4)$$

Beyond leading order correction : 非線形電磁気学と因果律

非線形電磁気学と因果律

非線形電磁気学

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \quad \mathcal{F} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}$$

- 強電磁場だが非一様性が小さい場合に使える有効理論
- 例えば Euler-Heisenberg 模型 (QED の 1-loop EFT) は
電子のコンプトン波長スケールで電磁場がほぼ一様なら使える

因果律 [Russo-Townsend '24]

背景電磁場まわりの電磁波の伝播速度が光速以下

→ 任意の $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ に対して $\mathcal{F}\partial_{\mathcal{F}}\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) + \mathcal{G}\partial_{\mathcal{G}}\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \geq \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

ex. $\mathcal{L} = \mathcal{F} + \alpha_1\mathcal{F}^2 + \alpha_2\mathcal{G}^2$ に適用すると $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$.

※ positivity bound の高次への拡張

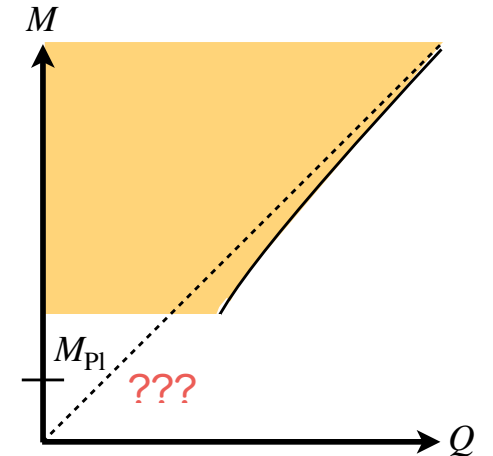
BH 熱力学への応用と弱い重力予想

[Abe-Medevielle-TN-Yoshimura '25]

一般のダイオニック（電荷磁荷あり）ブラックホールに対して

- 極限ブラックホール（ゼロ温度）の質量電荷比 $\mu_{\text{ext}}(Q) = \left. \frac{M}{Q} \right|_{\text{ext}}$ は

$$\frac{d\mu_{\text{ext}}}{dQ} \propto \int_{r_H}^{\infty} dr r^2 (\mathcal{F} \partial_{\mathcal{F}} \mathcal{L} + \mathcal{G} \partial_{\mathcal{G}} \mathcal{L} - \mathcal{L}) \geq 0 \text{ のように符号が定まる。}$$



※ つまり **extremal curve** は弱い重力予想の期待通り単調に振る舞う！

- 質量電荷比 $\mu = \frac{M}{Q}$ を固定したときのエントロピー質量2乗比 $\frac{S}{M^2}$ は

$$\frac{d}{dM} \left(\frac{S}{M^2} \right)_{\mu} \propto - \int_{r_H}^{\infty} dr r^2 (\mathcal{F} \partial_{\mathcal{F}} \mathcal{L} + \mathcal{G} \partial_{\mathcal{G}} \mathcal{L} - \mathcal{L}) \leq 0 \text{ のように符号が定まる。}$$

つまり **小さなBH (=高エネルギー) ほど “エントロピー密度” が高い！**

※ 「Q, M を固定したとき, エントロピーへの量子補正は正」の一般化.

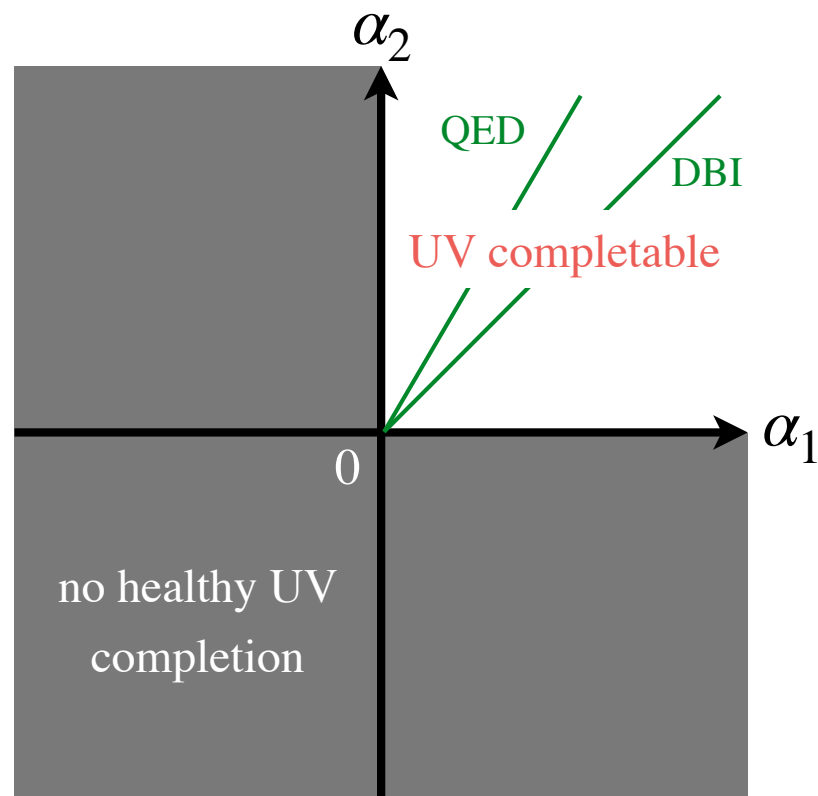
本丸の「軽い粒子のスペクトル」に関してはまだトライアンドエラーな段階。

テクニカルにも込み入っているので、個別に聞いてください。

今日話さなかったインフレーション系の話題も楽しいので、
興味のある方はコーヒーブレイクで気軽に捕まえてください。

まとめと展望

まとめと展望



スワンプランド（沼地）：
一見無矛盾そうに見えるが、
実は量子重力と相容れない危険な模型

理論 B

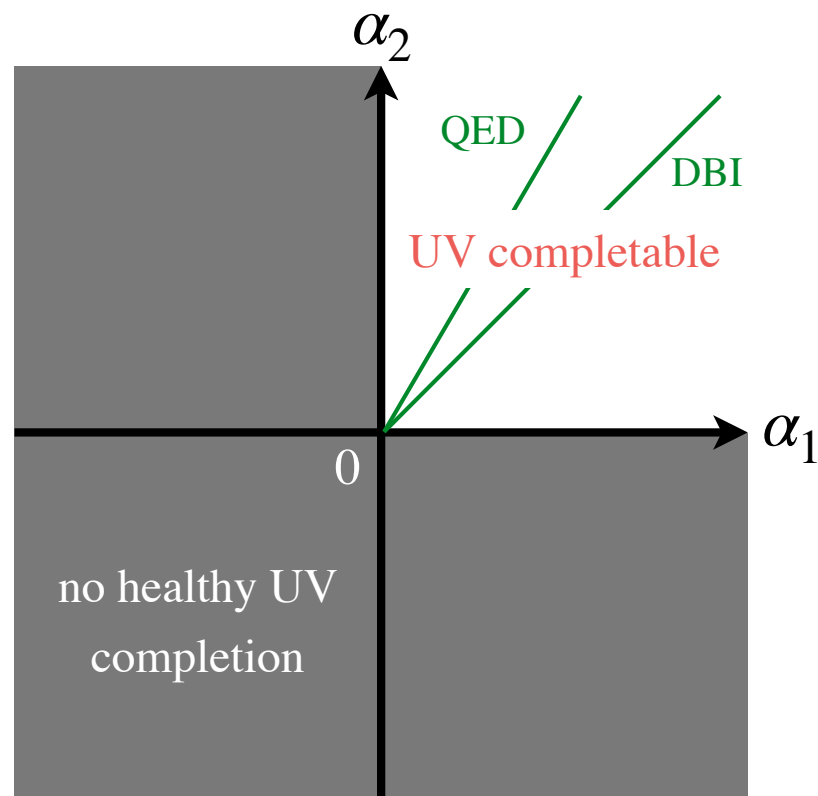
~~理論 C~~

ランドスケープ（陸地）：
量子重力と無矛盾な場の量子論模型

理論 A

- ユニタリ性や因果律などの基本原理を用いると UV と IR を理論的に繋げる！
- 重力の有効理論の地図を作れば、量子重力と宇宙論の接点が探れる??
- 特に、スワンプランドとの関係はまだ発展途上で今後に期待！

まとめと展望



スワンプランド（沼地）：
一見無矛盾そうに見えるが、
実は量子重力と相容れない危険な模型

理論 B

~~理論 C~~

ランドスケープ（陸地）：
量子重力と無矛盾な場の量子論模型

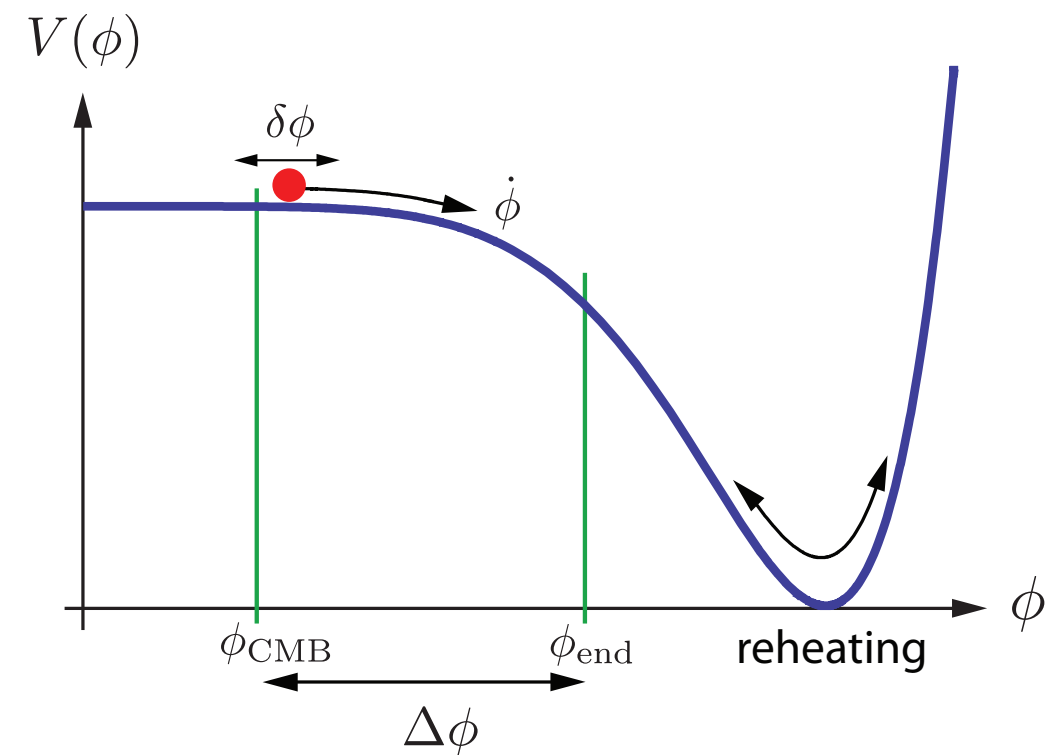
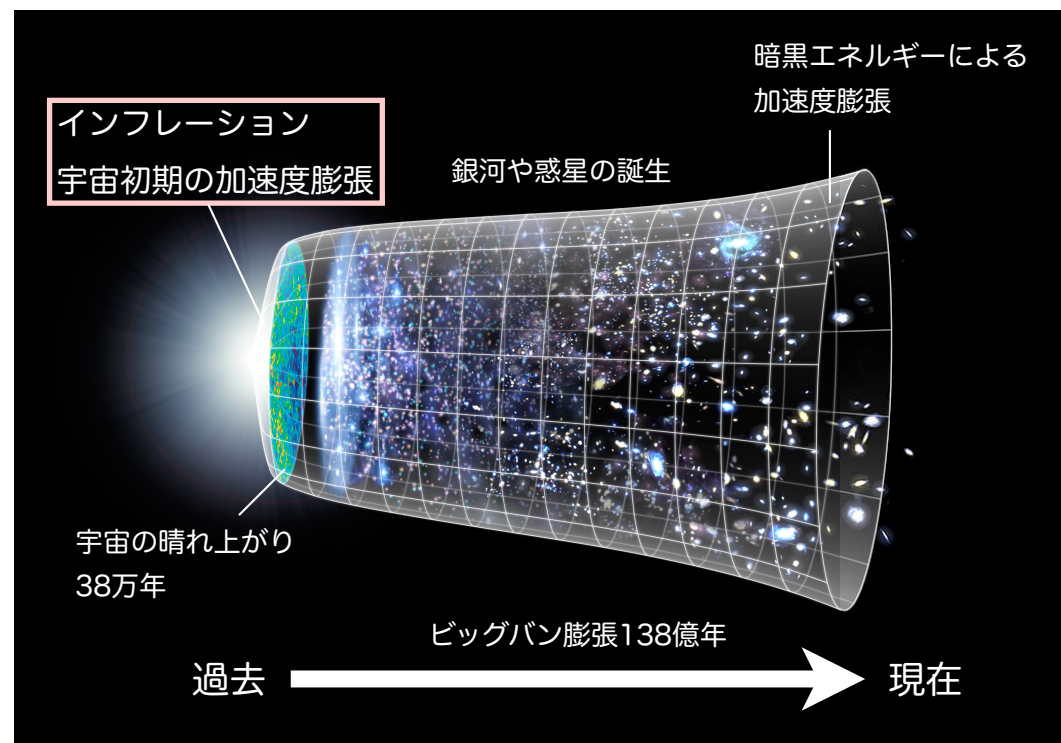
理論 A

- ユニタリ性や因果律などの基本原理を用いると UV と IR を理論的に繋げる！
- 重力の有効理論の地図を作れば、量子重力と宇宙論の接点が探れる??
- 特に、スワンプランドとの関係はまだ発展途上で今後に期待！

Thank you!

おまけ：Hagedorn 相転移と再加熱・高周波重力波

インフレーションと再加熱



再加熱

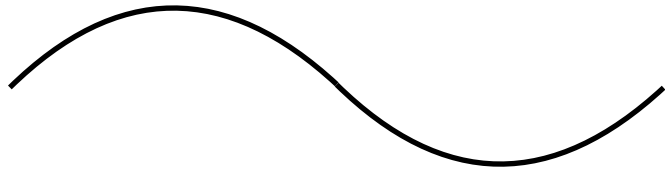
- インフラトンの真空エネルギーをビッグバンのエネルギーに転換
- 再加熱が瞬時に起きた場合、再加熱後の温度 T_{reh} は $V \sim M_{\text{Pl}}^2 H^2 \sim T_{\text{reh}}^4$.
cf. インフレーション宇宙の温度 $T_{\text{inf}} \sim H$
- 再加熱温度が $T \sim 10^{15} \text{ GeV}$ にまで上がるシナリオも！

再加熱温度が弦理論のスケール M_s よりも高かったらどうなるか??

通常 $M_s \gg H$ だが、 $T_{\text{reh}} \sim \sqrt{M_{\text{Pl}} H} \gg M_s \gg H$ はあり得る。

弦理論に特徴的な Hagedorn 相転移

弦理論のスペクトルと Hagedorn 温度



弦の振動モード：

- 節の数と振動の向き、振幅で決まる
- 量子論では振幅が離散化される

$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
第二励起状態	$\oplus \oplus a_{-2}^{\mu} 0\rangle$	$\oplus \oplus \oplus a_{-1}^{\mu} a_{-1}^{\nu} 0\rangle$
第一励起状態	$\oplus \oplus a_{-1}^{\mu} 0\rangle$	
基底状態	$\text{—} 0\rangle$	

高い励起状態の状態数は指数関数的に増加！

→ 比熱が発散する「Hagedorn 温度」が存在 $T_{\text{Hagedorn}} \sim M_s$

→ 相転移！（cf. QCD の閉じ込め非閉じ込め相転移）

再加熱温度が Hagedorn 温度より高ければ、宇宙が弦理論の相転移を経験！？

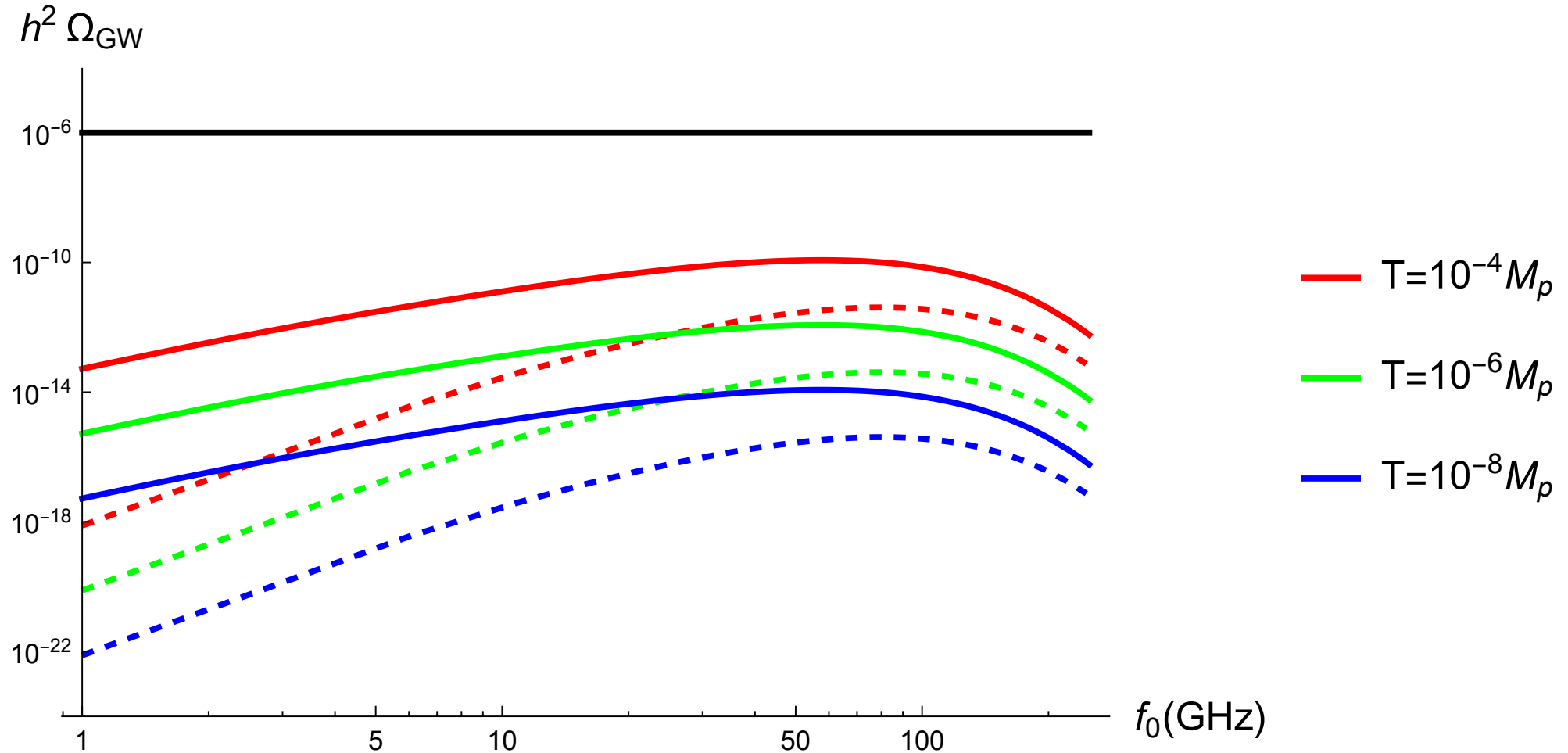


Figure 3: The solid curves show GW spectra for the Hagedorn phase followed by standard cosmology with different values $T_H = \frac{\Upsilon M_s}{2\pi\sqrt{2}} = T$, where heavy open strings radiate gravitons. The reference values taken are $N_D = 5$, $L_{\text{end}} M_s = 5$, $G = 0.32$, $X = 1$, $A = 2\sqrt{2}/(2\pi)^6$, $\Upsilon = 1$, $L_s = 100L_{\text{end}}$. B is taken to be 2, and σ is taken to be σ_{BB} given in App. B.1. The dashed curves show GW spectra for the SM with different reheating temperatures T . The black horizontal line at 10^{-6} is a rough bound based on BBN (see footnote 16). The spectra peak at $f_0 \sim 60$ GHz for the Hagedorn phase and at $f_0 \sim 80$ GHz for the SM. Both the axes are taken to be logarithmic.