

AdS₅ Schwarzschild ブラックホール上のスカラー場摂動に対するQNMを完全WKB法で解析
得られる一つの量子化条件から、異なる二つの極限でのQNMの振る舞いを調べる

1. ブラックホール準固有振動（QNM）とは

ブラックホールに摂動を加えて現れる、時間とともに減衰する振動：

$$G[g_{BH} + h]_{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \left[-\frac{d^2}{dr_*^2} + V(r) \right] \psi = \omega^2 \psi,$$
$$\psi \sim e^{-i\omega t} = e^{-\omega_I t} e^{-i\omega_R t}, \quad \omega = \omega_R - i\omega_I.$$

▶ 連星合体後のリングダウン重力波を特徴づける

▶ AdS/CFT では AdS ブラックホールの QNM が境界 CFT の有限温度遅延相関関数の極に対応する

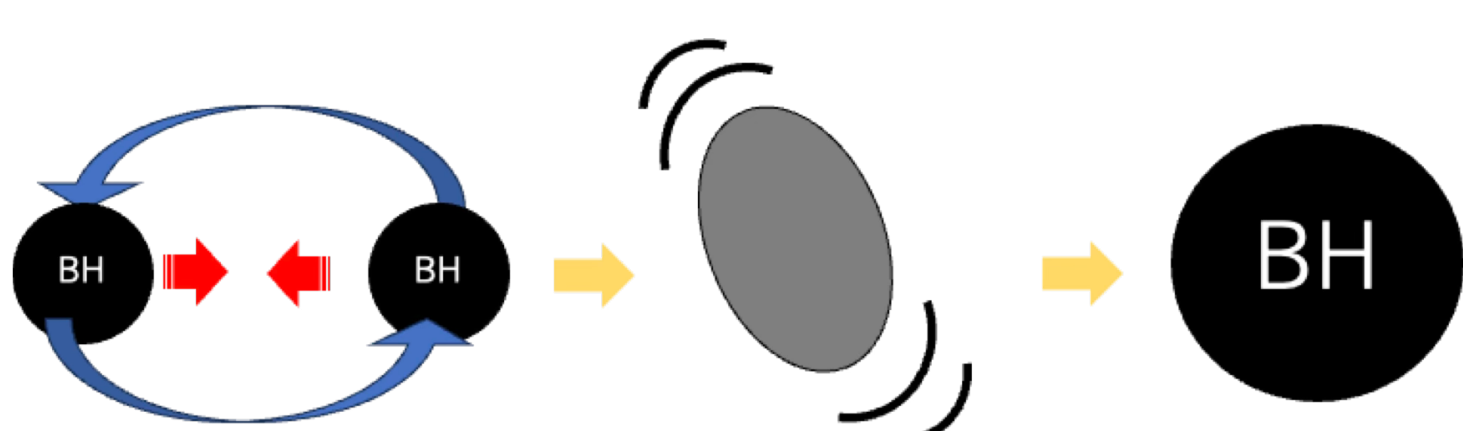


fig1: 連星合体後のリングダウン重力波

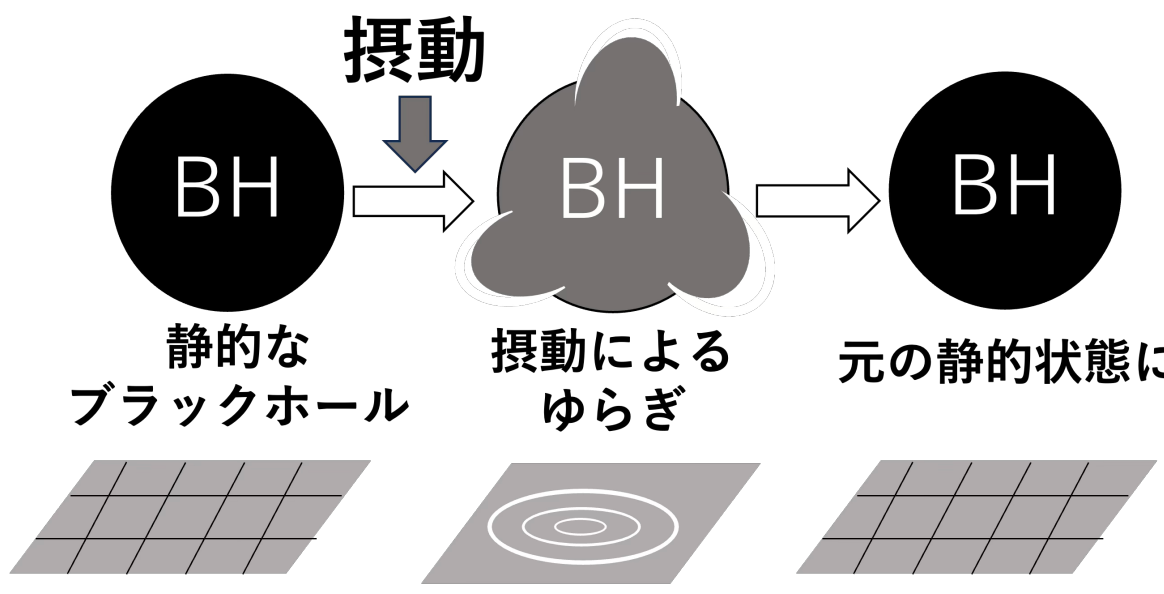


fig2: AdS/CFT QNM と境界 CFT の関係

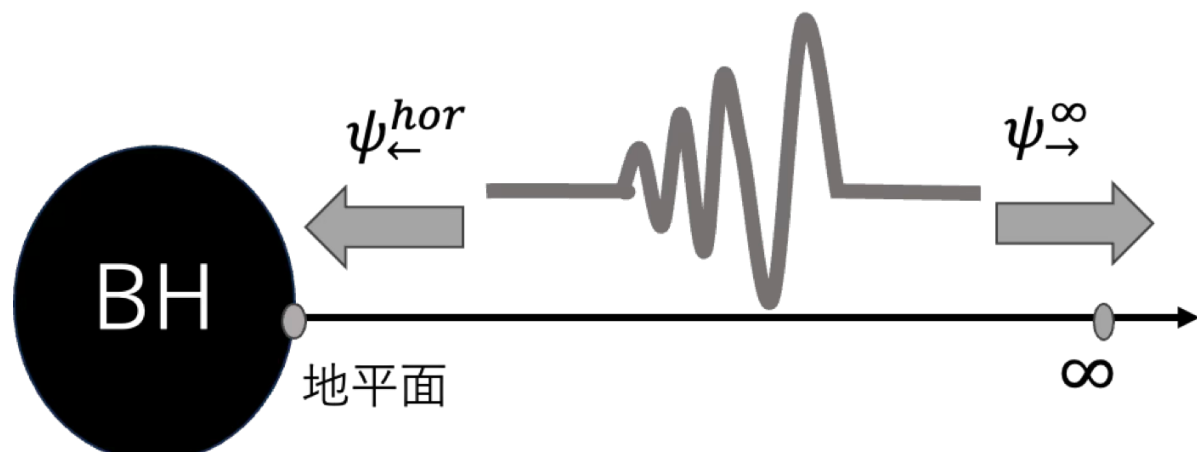


fig3: 漸近平坦での QNM 境界条件

QNMの境界条件	
horizon近傍	ingoing解
無限遠方(漸近平坦)	outgoing解
無限遠方(漸近AdS)	normalizable解

horizon の ingoing 解を無限遠と解析接続

$$\psi_{\text{in}}^{\text{hor}} = A(\omega)\psi_{\text{norm}}^{\text{bdry}} + B(\omega)\psi_{\text{non-norm}}^{\text{bdry}}$$

QNMの境界条件を課すと

$$B(\omega) = 0 \iff \omega = \omega_{\text{QNM}},$$

$$G_R(\omega, l) \propto \frac{A(\omega, l)}{B(\omega, l)}.$$

接続係数 $B(\omega)$ を求めればQNM条件が得られる。

2. 完全WKB解析：Stokes現象・Voros因子・確定特異点

Schrödinger 型方程式 (η : large parameter)

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \eta^2 Q(r, \eta) \right] \psi = 0$$

WKB 解

$$\psi_{\pm}^{\text{WKB}}(r) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(r, \eta)}} \exp \left[\pm \int^r S_{\text{odd}}(r, \eta) dr \right],$$

where

$$S_{\text{odd}}(r, \eta) = \eta \sqrt{Q_0(r, \omega)} + \eta^{-1} S_1(r, \omega) + \dots$$

$\psi_{\pm}^{\text{WKB}}$ は一般に発散する漸近級数。Exact WKB はこれにBorel総和し、複素 r 平面上で解を大域的に解析接続する。

Stokes 曲線 $\text{Im} \int_{r_i}^r \sqrt{Q_0} dr = 0$ ：異なる解析解を構成する領域の境界。
turning point($Q_0(r) = 0$)から伸びる。解析接続で横切ると優勢解・劣勢解が混合する。

$$\psi_{\text{domi}}^{\text{I}} = \psi_{\text{domi}}^{\text{II}} \pm i\psi_{\text{sub}}^{\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}_{\text{left}} = V_{\pm} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}_{\text{right}}.$$

$$V_+ = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\psi_+ \text{ dominant}), \quad V_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (\psi_- \text{ dominant}).$$

Voros 因子

Stokes曲線のturning point が変わるとき $\Gamma_{ij} = \text{diag}(u_{ij}, u_{ij}^{-1})$ が入る。 $u_{ij} = \exp \left(\int_{r_i}^{r_j} S_{\text{odd}} dr \right)$

確定特異点

Q_0 の二重極では WKB 位相に対数分岐が生じ、branch cut を跨ぐと $D_s = \text{diag}(v_s^+, v_s^-)$ の位相を拾う。

$$v_s^{\pm} = \exp \left[i\pi \left(1 \pm 2 \text{Res}_{r=b_s} S_{\text{odd}} \right) \right]$$

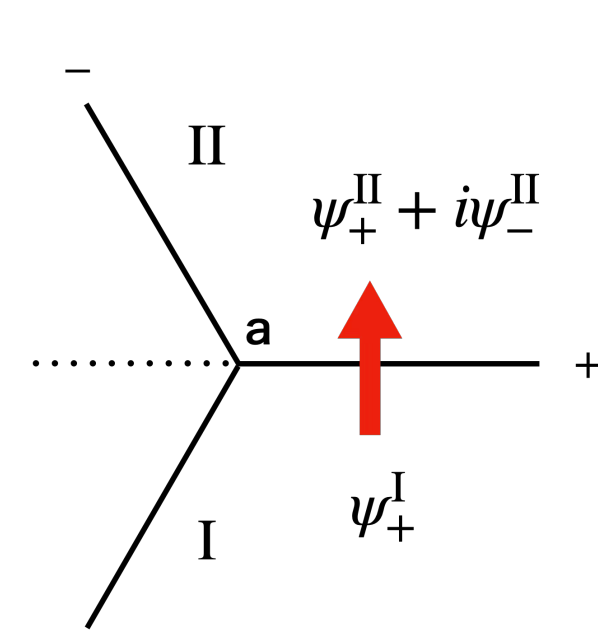


fig4: Stokes 現象

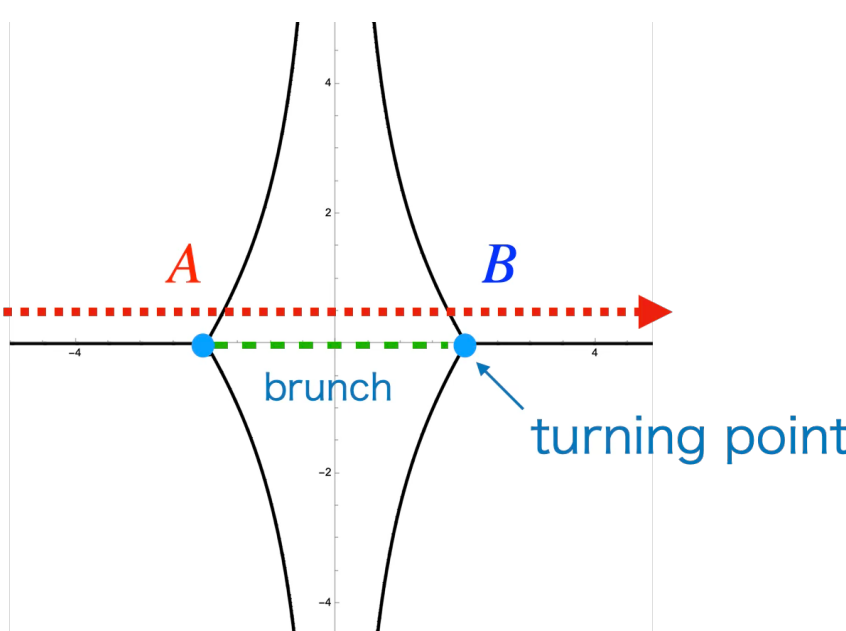


fig5: 調和振動子の Stokes グラフ

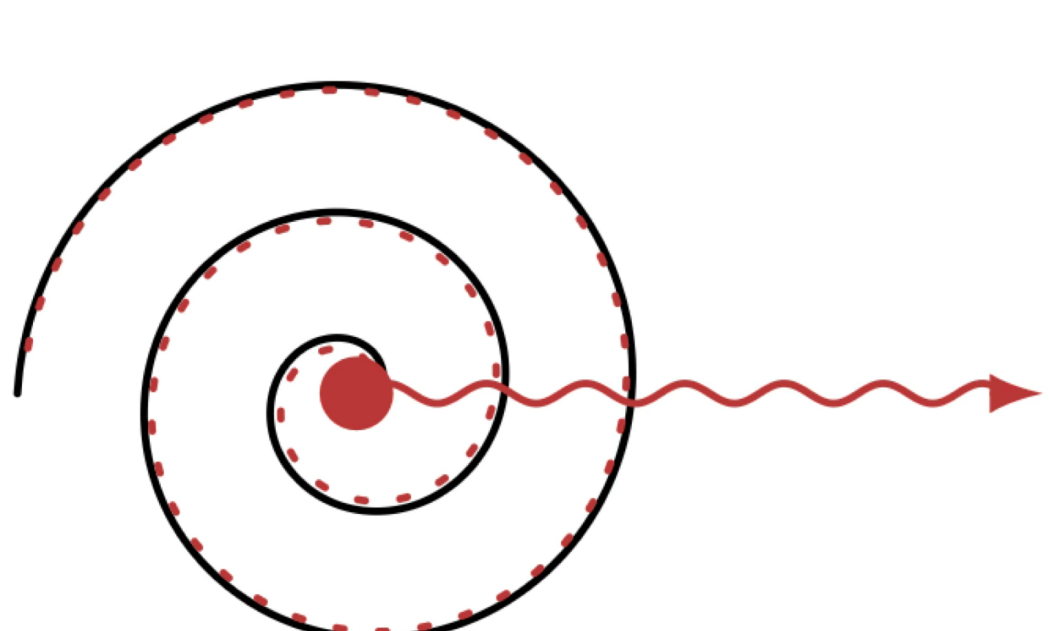


fig6: 確定特異点近傍の対数螺旋

確定特異点の留数が複素数だと Stokes 条件から**対数螺旋**が生じる。Stokes 曲線と branch cut を無限回跨ぐことでこの構造を表す。

$$\mathcal{M}(\omega) = \dots \lim_{N \rightarrow \infty} (V \Gamma D \Gamma \dots)^N V_{\pm} \Gamma_{ij} D_s \dots$$

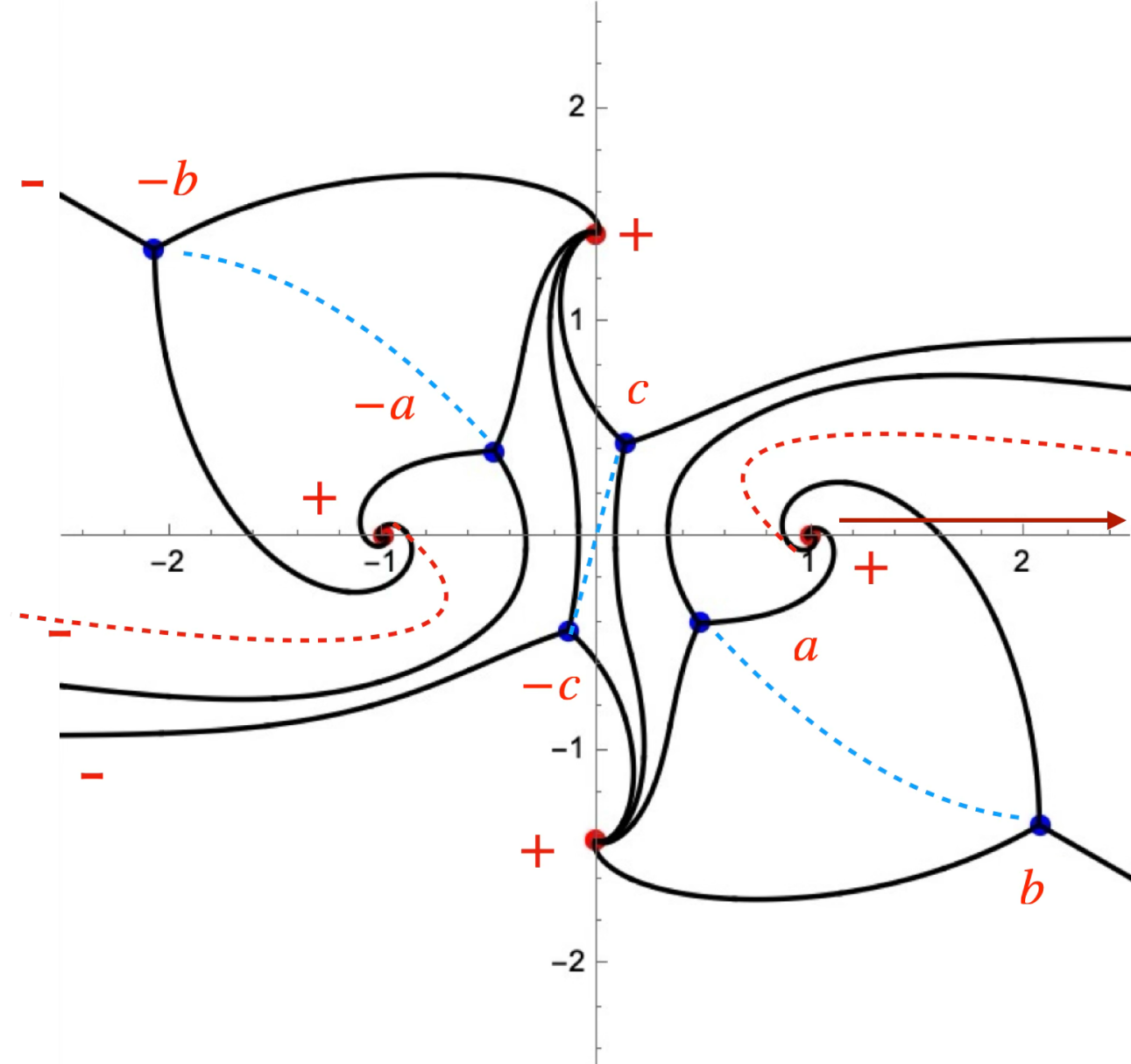
$$\begin{pmatrix} \psi_{\text{in}} \\ \psi_{\text{out}} \end{pmatrix}_{\text{hor}} = \mathcal{M}(\omega) \begin{pmatrix} \psi_{\text{nor}} \\ \psi_{\text{non}} \end{pmatrix}_{\text{bdry}},$$

$$\mathcal{M}(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ C(\omega) & D(\omega) \end{pmatrix},$$

3. AdS₅ BHのスカラー場QNM：接続行列からQNM条件へ

$$Q_0(r) = -\frac{\omega^2}{f(r)^2} + \frac{1}{f(r)} \left(\frac{L^2}{r^2} + \nu^2 \right) = \nu^2 \frac{(r^2 - c^2)(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{(r^2 - r_h^2)^2 (r^2 + 1 + r_h^2)^2},$$
$$L^2 = (l+1)^2, \quad \nu = \Delta - 2, \quad f(r) = 1 + r^2 - \frac{\mu}{r^2}, \quad \mu = r_h^2(1 + r_h^2),$$

turning point : $\pm a, \pm b, \pm c$

fig7: AdS₅ scalar の Stokes graph

青：turning point, 赤：確定特異点, 点線：branch cut

$$\mathcal{M} = \lim_{N \rightarrow \infty} [V_+^{-1} \Gamma_{ab} V_+^{-1} D \Gamma_{ba}]^N$$
$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (v_+)^N & -iv_+^N (u_{ab}^2 + 1) \frac{v_-}{v_+ - v_-} \\ 0 & (v_-)^N \end{pmatrix}$$

$$B(\omega) = -i \frac{u_{ab}^2 + 1}{v_+ / v_- - 1}.$$

$B = 0$ より

$$u_{ab}^2 = -1 \iff e^{\oint_{\gamma_{ab}} S_{\text{odd}} dr} = -1.$$

cycle を留数定理で変形、
 $h = \sqrt{1 + r_h^2}$, $I_C = \oint_{\gamma_{-cc}} S_{\text{odd}} dr$
と置く。

$$\text{QNM条件: } \frac{2\pi\omega}{f'(r_h)} + \frac{2\pi\omega}{f'(ih)} + \pi i(\Delta - 2) + \frac{1}{2} I_C = -2\pi i \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{Q})$$

以下ではこの同じ量子化条件を二つの極限で評価する。

4. large BH / high-overtone 極限

まず r_h を固定して $|\omega| \rightarrow \infty$ を取り、その後 $r_h \gg 1$ とする。

turning point

$$a, c \rightarrow 0, \quad b \rightarrow \infty$$

古典周期

$$I_C^{(0)} = O(|\omega|^{-1/2}) \rightarrow 0.$$

$I_C \rightarrow 0$ として

$$\omega_n = (2n + \Delta - 1) \left(\sqrt{1 + r_h^2} - i r_h \right) + o(1),$$

モード間隔

$$\Delta\omega = 2 \left(\sqrt{1 + r_h^2} - i r_h \right) + o(1).$$

large BH ($r_h \gg 1$) では Hawking 温度 $T_H \simeq r_h/\pi$ を用いて

$$\omega_n \sim 2r_h(1 - i)n \sim 2\pi T_H(1 - i)n.$$

高周波の熱相関関数の極が温度スケール T_H で複素平面上に
ほぼ等間隔に並ぶ。

5. small BH / eikonal 極限

$$\mu \ll 1, \quad L = l + 1 \gg 1.$$

$$\text{turning point : } \pm a \sim O(\mu^{1/2}) \ll 1, \quad b, c \sim O(\Lambda), \quad \text{horizon : } r_h \sim O(\mu^{1/2}) \ll 1$$

small BH では horizon と turning point $\pm a$ が原点に接近。 I_C を

$$I_C = \Phi_C - \frac{4\pi\omega}{f'(r_h)}$$

と **horizon pole** の寄与と **regular period** Φ_C に分離する。

Φ_C は、small- μ で退化する原点近傍の留数から評価する。これを (Q) に代入し、

$$\omega_{nl} = l + \Delta + 2n - \frac{\mu}{2(l+1)} \left[\Delta^2 + \Delta(6n - 1) + 6n(n - 1) \right] + O(\mu^2)$$

Dodelson *et al.* の small-BH / large-spin の既知結果を再現。

$l + \Delta + 2n$: global AdS の normal mode.

BHの効果は熱相関関数の極の**実部**を**摂動的に変化**させる。

QNMの虚部は large l では非摂動的であり、small- μ の整数べき展開だけでは現れない。

$$\text{Im } \omega \sim \mu^{l+3/2}$$

→small BH ではStokesグラフのtopologyが異なる。

6. まとめと今後の展望

▶ AdS₅ Schwarzschild BH のスカラー場における QNM を、**Exact-WKB** の解析接続問題として記述。

▶ 一つのQNM量子化条件から、異なる二つの極限における既知のQNMの振る舞いを統一的に再現した。

次の目標：

▶ small BH の Stokes topology から Exact-WKB 接続公式を構成し、eikonal limit で $\text{Im } \omega \sim \mu^{l+3/2}$ という**非摂動的な虚部**を解析的に評価する。

▶ $A(\omega)/B(\omega)$ を pole 周りで展開して**熱相関関数の留数**を求める。

参考文献 [1] D. T. Son and A. O. Starinets, JHEP **09** (2002) 042. [2] E. Berti, V. Cardoso and A. O. Starinets, CQG **26** (2009) 163001.

[3] T. Miyachi, R. Namba, H. Omiya and N. Oshita, PRD **111** (2025) 124045. [4] M. Dodelson *et al.*, SciPost Phys. **14** (2023) 116.