

有限密度格子QCDにおける グラディエントフローとホッピングパラメータ展開

佐藤泰陽(新潟大自然), 江尻信司(新潟大学)

概要

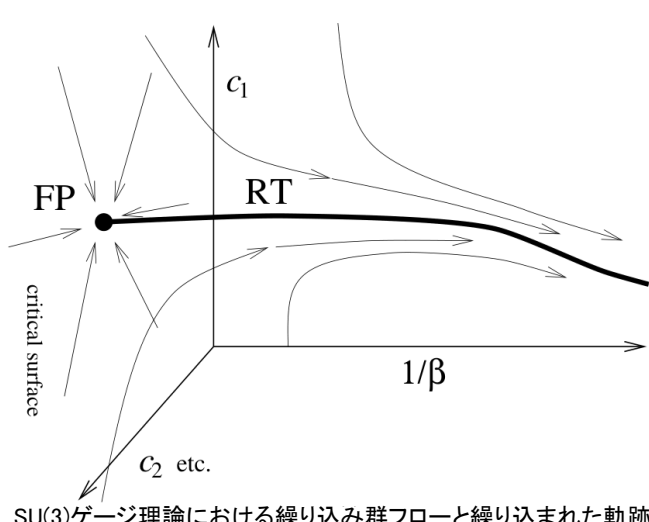
本研究では、粗視化を一種の繰り込み変換と考え、有限密度格子QCDにおいて、グラディエントフローによる粗視化を行ったときに、粗視化された配位で構成される分配関数が不変になるような、ボルツマンの重みのなかのパラメータの変化を議論する。大分配関数を粒子数で分解したカノニカル分配関数に着目し、粒子数が1のカノニカル分配関数が不変という条件からホッピング項の係数の、粗視化による変化を調べることが出来た。

1.粗視化による繰り込み群フロー

- 遠距離の物理を保ちながら力学変数を粗視化し、粗視化後の配位分布を再現する有効作用を定める。
- フェルミオンを含まない純ゲージ理論では、ゲージ不変性により、有効作用は閉じたウィルソンループの和として表し、その係数の変化が調べられてきた。それにより、粗い格子上でも長距離物理を再現し、格子化誤差を抑えた有効作用を構成する試みがなされている。

$$S_g[U] = \beta \sum_i c_i W_i[U] \longrightarrow S'_g[U'] = \beta' \sum_i c'_i W_i[U']$$

- 本研究では、有限温度・有限密度でフェルミオン場を導入する。グラスマン積分した後、ゲージ場のみを粗視化する。
- ホッピングパラメータ展開により、フェルミオン行列式がウィルソンループの和で表される。
- 化学ポテンシャルに依存する項に着目し、遠距離の物理を変えないパラメータの変化を調べる。



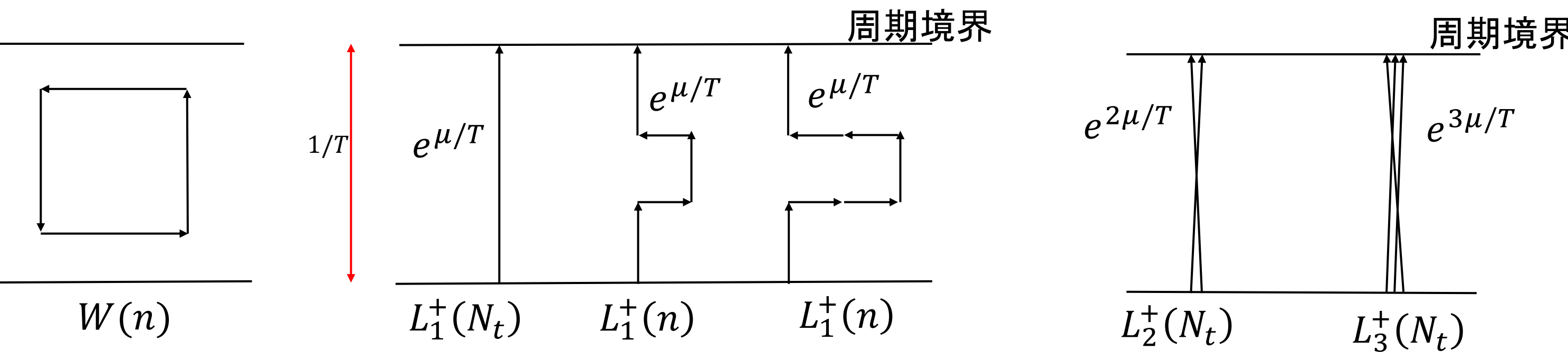
$$S_{\text{eff}} = \beta \left[c_0 \square + c_1 \square + c_2 \square + c_3 \square + \dots \right] + \kappa^{N_t} \left[r_0 \updownarrow + r_1 \updownarrow + r_2 \updownarrow + r_3 \updownarrow + \dots \right]$$

2. ホッピングパラメータ展開(有限密度)

- 行列式をホッピングパラメータ $\kappa = 1/(2m_q a + 8)$ でテイラー展開する。

$$\ln \det M(\kappa) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \ln \det M}{\partial \kappa^n} \kappa^n \equiv N_{\text{site}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \kappa^n$$
$$D_n = \frac{1}{N_{\text{site}}} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{tr} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial \kappa} \right)^n \right] = W(n) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{m\mu/T} L_m^+(n) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\mu/T} L_m^-(n)$$

- ポリャコフ型ループ: L_m^+ は時間方向の境界条件で正の方向で巻き付いたもの。
 L_m^- は負の方向に巻き付いたもの。 m は巻き数。
- ウィルソン型ループ: $W(n)$ は時間方向の境界条件に関係なく閉じたループ。



3. カノニカル分配関数

フルQCDの大分配関数をホッピングパラメータ展開で書き表し、フガシティー展開と比較することでカノニカル分配関数を求める。

$$Z_{GC} = \int \mathcal{D}U \det M(\kappa, \mu) e^{-S_g}$$
$$= \int \mathcal{D}U \exp \left[\sum_{n=N_t}^{\infty} W(n) \kappa^n + \sum_{n=N_t}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} z^m L_m^+(n) + \sum_{m=1}^{\infty} z^{-m} L_m^-(n) \right\} \kappa^n \right] e^{-S_g}$$

z のべきが0, 1 のものを抜き出す。

$$Z_C(0) = \int \mathcal{D}U [1 + \dots] e^{\sum_n W(n) \kappa^n} e^{-S_g}$$

$$Z_C(1) = \int \mathcal{D}U \left[\sum_n L_1^+(n) \kappa^n + \dots \right] e^{\sum_n W(n) \kappa^n} e^{-S_g}$$

…は、正の方向と負の方向へ巻き付いたものの積である。
 κ の次数が $2N_t$ よりも大きいので、 κ が小さいとして無視する。

4. 粗視化によるホッピングパラメータのフロー

- 粗視化によって、大分配関数や粒子数は変わらないことを要請すると、化学ポテンシャルとカノニカル分配関数が変わらない。
- 今回は $Z_C(0)$ を不変にする $S'_g(U')$ については考えず、既に次を実現するパラメータが決まっているとする。

$$\int \mathcal{D}U' \frac{e^{\sum_n b_n W'(n) \kappa^n} e^{-S'_g(U')}}{Z'_C(0)} = \int \mathcal{D}U \frac{e^{\sum_n W(n) \kappa^n} e^{-S_g(U)}}{Z_C(0)}$$
$$\longrightarrow e^{\sum_n b_n W'(n) \kappa^n} e^{-S'_g(U')} = \int \mathcal{D}U \delta(U' - f(U)) e^{\sum_n W(n) \kappa^n} e^{-S_g(U)}$$

$Z_C(1)$ も粗視化で不変なので、上の式を $Z'_C(1) = Z_C(1)$ へと代入すると

$$\int \mathcal{D}U \left[\sum_n r_n L_1^{'+}(n) \kappa^n \right] \frac{e^{\sum_n W(n) \kappa^n} e^{-S_g}}{Z'_C(1)} = \int \mathcal{D}U \left[\sum_n L_1^+(n) \kappa^n \right] \frac{e^{\sum_n W(n) \kappa^n} e^{-S_g}}{Z_C(1)}$$

$Z_C(1)$ を不変にするパラメータを見つける事は一見容易でないが、先行研究を踏まえると実現できる可能性がある。

- 粗視化前における、ポリャコフループと曲がったポリャコフループが相関している → 5で説明
- 粗視化前後のポリャコフループが相関している → 7で説明

- 加えて、巻き数が1の粗視化後のポリャコフループと曲がったポリャコフループが相関していることが示されれば、配位を特徴づける巻き数が1の力学変数が近似的にひとつしかない。
- 8で説明

5. ポリャコフループ型項の相関($N_t = 6$)

N. Wakabayashi et al., PTEP 2022, 033B05 (2022)
S. Ejiri et al., PoS LATTICE2023, 174 (2024)

- $L_1^0(n)$ は、 $U_\mu(x) = 1$ とした時の $L_1(n)$ $L_1(n) = L_1^+(n) + L_1^-(n) = 2\text{Re}L_1^+(n)$

- Leading Order項(ポリャコフループ)

$$\text{Re } \Omega = L_1(N_t)/L_1^0(N_t)$$

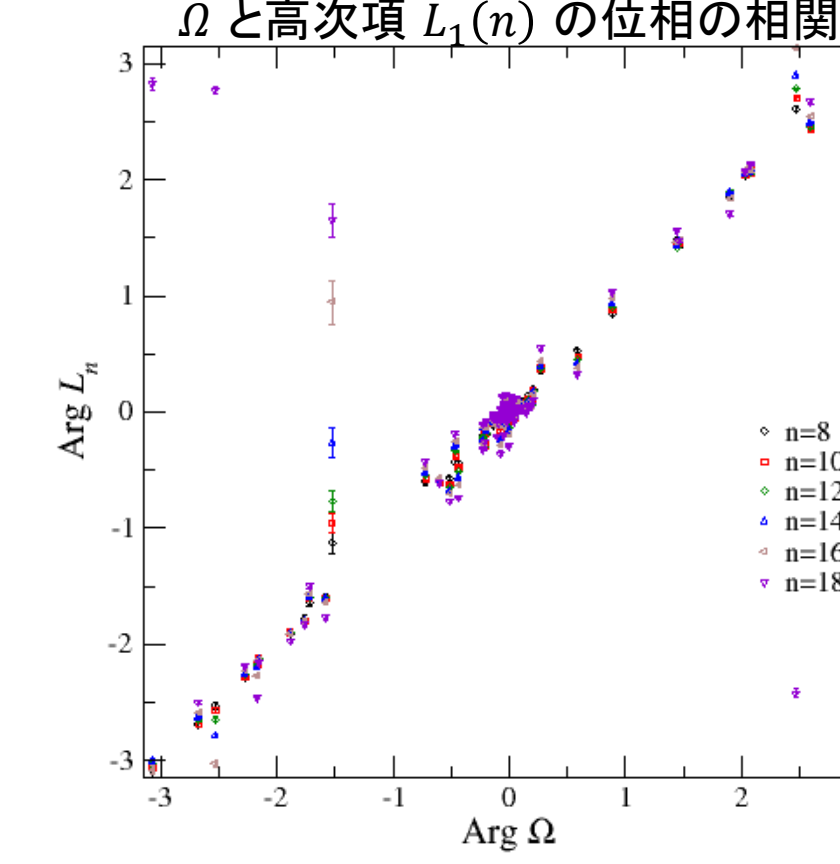
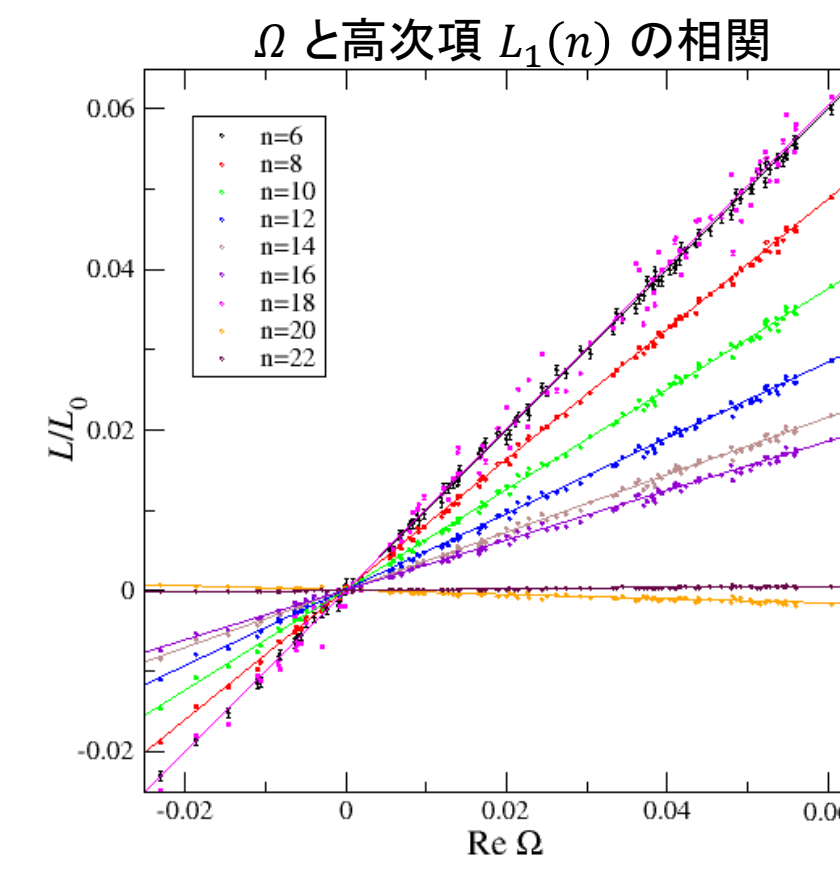
- 各配位で $L(n)$ と $\text{Re } \Omega$ の相関が非常に強いことが分かっている。

$$L_1(n) = L_1^0(n) c_n \text{Re } \Omega$$

- 各配位で、ポリャコフループと曲がったポリャコフループの位相も強く相関していると示されている。

$$\text{Arg } L_1^+(n) \approx \text{Arg } \Omega$$

- フロー後にも、各配位で比例関係になっていれば、一つのループで記述できる可能性がある。



6. グラディエントフロー法

M. Lüscher, JHEP 1008.071.2010

ゲージ場 A_μ に仮想的な時間を導入し、以下の時間発展によって変形したゲージ場 $B_\mu(t)$ を考える。

拡散方程式をゲージ不変にしたような形になっている。

$$\frac{\partial}{\partial t} B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\mu\nu}(t, x), \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} B_\mu(t, x) = -\frac{\delta S(t)}{\delta B_\mu(t, x)}$$

$$G_{\mu\nu}(t, x) \equiv \partial_\mu B_\nu^a(t, x) - \partial_\nu B_\mu^a(t, x) + f^{abc} B_\mu^b B_\nu^c$$

- ゲージ不変な拡散方程式のようになっており、高い振動モードを取り除く。
→ 格子を粗くすることに対応する。
- 作用を小さくする方向に時間発展しており、量子効果を小さくすることが期待できる。
→ 古典的な配位へと近付く。

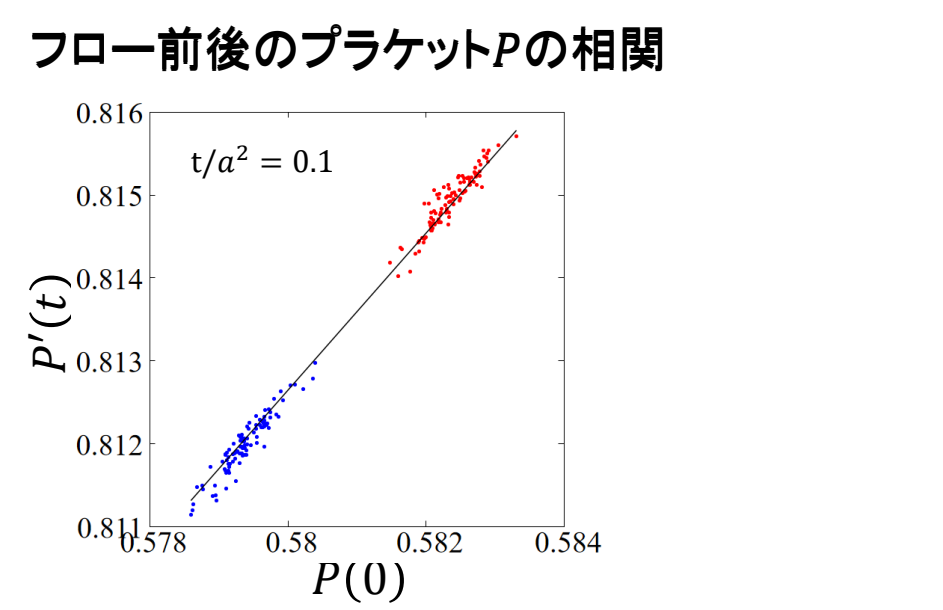
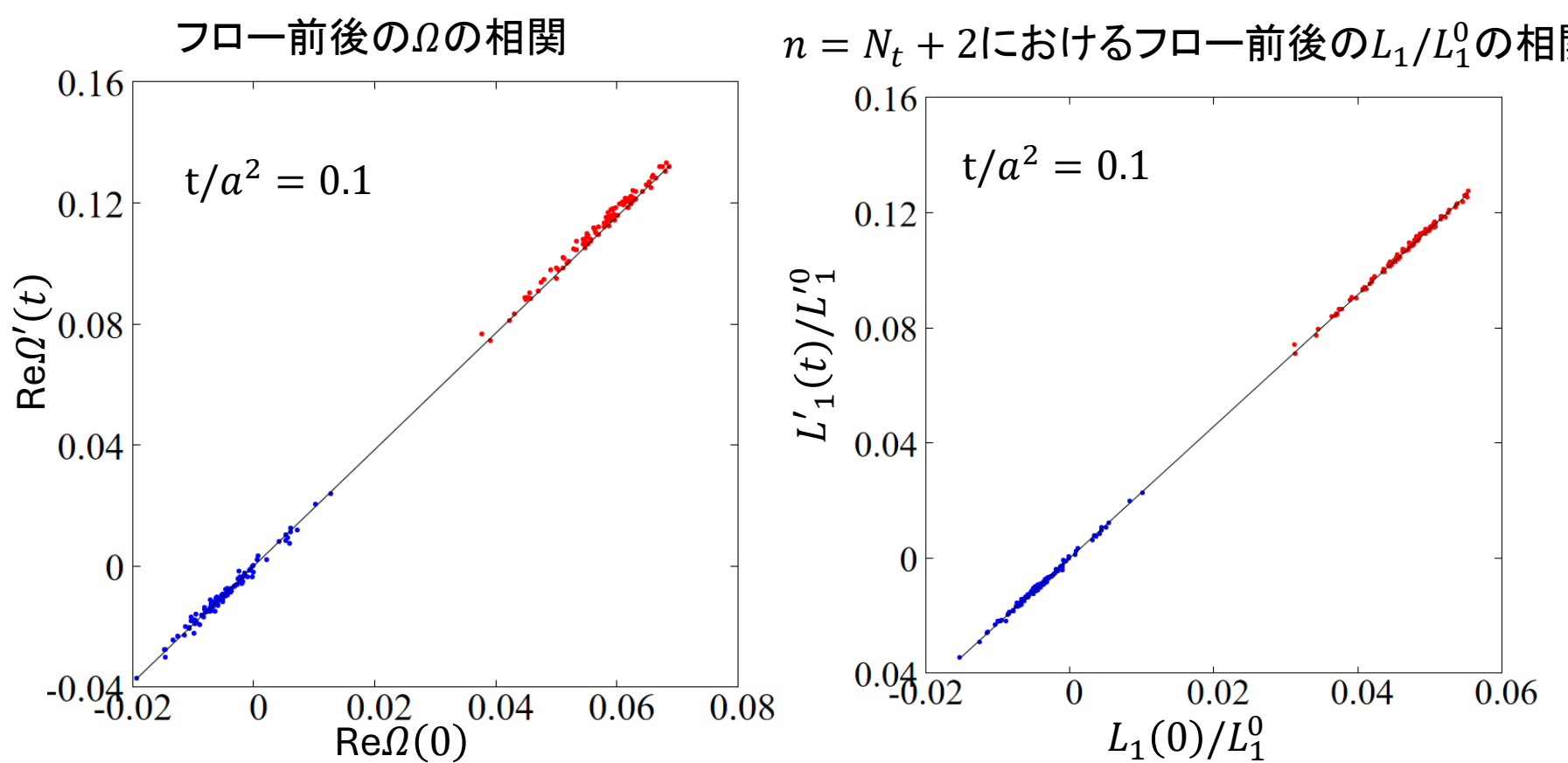
7. フロー前後のポリャコフループの変化

- フロー前後のポリャコフループの値には強い相関があることが分かっている。

$$\text{Re}\Omega(t) = d(t)\text{Re}\Omega(0)$$

- ポリャコフループは対称性がどれだけ破れているかを表すパラメータで、フローによって対称性は破られないため強い相関を示す。

- 一方で、ブラケットの相関はあまり強くない。



8. フロー後における各項の相関

- フローさせた後でも、ポリャコフループと曲がったポリャコフループに強い相関があることが分かった。

$$L'_1(n, t) = L_1^0(n) c_n(t) \text{Re}\Omega'(t)$$

- $W'^0(n)$ は、 $U'_\mu(x) = 1$ とした時の $W'(n)$

- 一方で、ブラケット $P' = W'(4)/W'^0(4)$ と Wilson Loop項 $W'(n)/W'^0(n)$ の相関はあまり強くない

- フロー後の配位において、高次項までのウィルソンループをひとつのループで書き換えることはできないが、ポリャコフループに関しては可能だということを確認できた。

9. $Z_C(1)$ を不変にするパラメータの変化

- 巻き数が1の分配関数 $Z_C(1)$ のボルツマンの重みを不変にするようなパラメータ $r_n(t)$ は次をみatus。

$$r_n(t) L'_1(n, t) \kappa^n = L_1(n) \kappa^n$$

- 先行研究と今回数値シミュレーションで得られた、 $L'_1(n, t)$ と $\text{Re}\Omega'(t)$ の関係式により $r_n(t)$ が単純な式で書ける。

$$r_n(t) = \frac{c_n(0)}{c_n(t) d(t)}$$

- グラフは、 $n = N_t$ のLO項を基準とし、 $t = 0$ からの比をプロットした。

$$\sum_{n=N_t}^{\infty} r_n(t) L_1(n, t) \kappa^n = r_{N_t}(t) \left[\sum_{n=N_t}^{\infty} \tilde{r}_n(t) L_1(n, t) \right] \kappa^n, \quad \tilde{r}_n(t) = \frac{r_n(t)}{r_{N_t}(t)}$$
$$= \kappa'^{N_t}(t) \left[\sum_{n=N_t}^{\infty} k(t) L_1(n, t) \right] = r_n(t) \kappa^{n-N_t}$$

- κ^{N_t} も含めた全体の係数 κ' は粗視化によって小さくなる、また高次項のパラメータ $\tilde{r}_n$ が小さくなる。純ゲージ理論と同じように、主要項でないパラメータは、粗視化をすると連続極限で大きくなる。

