

有限密度SU(2)格子ゲージ理論のカノニカル法による符号問題の解決と熱力学量

新潟大自然, 新潟大理^A
橋爪秀弥, 小飯田将成, 江尻信司^A

概要：

クォーク質量が重いとした場合を考え、大分配関数を粒子数で展開したカノニカル分配関数 $Z_C(n,T)$ に着目して、有限温度・有限密度SU(2)格子ゲージ理論の**1-flavor**について高密度領域を調べた。符号問題の厳しい奇数の $Z_C(n,T)$ については、外場をいれたときの応答のみ残としたことで回避できた。それによってすべての密度領域で熱力学量が求まった。圧力や密度の振る舞いが**Hadron resonance gas model**で説明でき、音速はそこから予想される値になった。

1. 重フェルミオン・高密度極限でのSU(2)格子ゲージ理論

松原形式を採用し分配関数を経路積分形式で書く。空間を $N_s^3 \times N_t$ で格子化する。 $(N_t a = 1/T)$

$$Z_{GC}(\mu,T) = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_f - S_g} = \int \mathcal{D}U (\det M)^{N_f} e^{-S_g}, \quad S_g = -6N_{\text{site}} \beta \bar{P} : \text{ゲージ場の作用} (\beta = 4/g^2)$$

$$M_{x,y} = \delta_{x,y} - \kappa \left[\sum_{i=1}^3 \{ (1-\gamma_i) U_{x,i} \delta_{y,x+i} + (1+\gamma_i) U_{y,i}^\dagger \delta_{y,x-i} \} + e^{\mu a} (1-\gamma_4) U_{x,4} \delta_{y,x+\bar{4}} + e^{-\mu a} (1+\gamma_4) U_{y,4}^\dagger \delta_{y,x-\bar{4}} \right]$$

β が大きいとき格子間隔 a が小さくなるので、温度 T は高くなる。
重フェルミオン・高密度極限、 $\kappa \rightarrow 0, e^{\mu a} \rightarrow \infty, e^{-\mu a} \rightarrow 0, \kappa e^{\mu a} \rightarrow \text{有限}$ 、をとる。

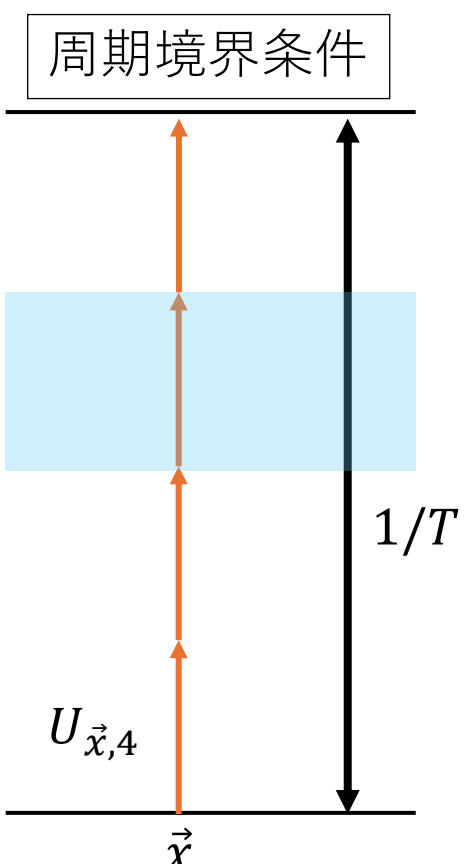
$$M_{\vec{x},\vec{y}} = \delta_{x,y} - \kappa e^{\mu a} (1 - \gamma_4) U_{x,4} \delta_{y,x+\bar{4}}$$

$\det M$ は $C = (2\kappa)^{N_t} e^{\mu/T}$ として

$$\det M = \prod_{\vec{x}} (1 + 2C\Omega(\vec{x}) + C^2)^2 \cdots (1), \quad \Omega(\vec{x}) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\prod_{i=0}^{N_t-1} U_{\vec{x}+i,\bar{4},4} \right)$$

Polyakov loopは、 $\Omega = \frac{1}{N_s^3} \sum_{\vec{x}} \Omega(\vec{x})$

期待値は閉じ込め相転移のオーダーパラメータ。Blum, Hetrick, Toussaint, PRL 76, 1019(1996)
Aarts, Stamatescu, JHEP 09(2008)018
Aarts, Attanasio, Jäger, Sexty, JHEP 15(2016)87



2. 分配関数と有効ポテンシャル

大分配関数 $Z_{GC}(\mu,T)$ とカノニカル分配関数 $Z_C(n,T)$ の関係(フガシティー展開)

$$Z_{GC}(\mu,T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n,T) e^{\frac{n\mu}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-V_{\text{eff}}(n,T)}, \quad V_{\text{eff}}(n,T) = -\ln Z_C(n,T) - \frac{n\mu}{T}$$

$V_{\text{eff}}(n,T)$ が最小となる粒子数 n で生成確率が最大となるので、密度 $\rho = n/V$ で微分して V で割ると

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V_{\text{eff}}(V\rho,T)}{\partial \rho} = -\frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z_C(V\rho,T)}{\partial \rho} - \frac{\mu}{T} = 0$$

$Z_C(n,T)$ を計算することで、生成確率が最大となる ρ と μ/T の関係がわかる。

$Z_C(n,T)$ を $\det M$ の計算で出てきた C のべきの係数で書ける。

$$\det M = \prod_{\vec{x}} (1 + 2C\Omega(\vec{x}) + C^2)^2 = \sum_{n=0}^{4N_s^3} f(n) C^n = \sum_{n=0}^{4N_s^3} f(n) (2\kappa)^{N_t n} e^{\frac{n\mu}{T}}$$

これを経路積分形式の大分配関数に代入すると($Z_{\text{quench}} = \int \mathcal{D}U_{\mu} e^{-S_g}$, $\langle O \rangle_{\text{quench}} = \frac{1}{Z_{\text{quench}}} \int \mathcal{D}U_{\mu} O e^{-S_g}$)

$$Z_{GC}(\mu,T) = \sum_{n=0}^{4N_s^3} \left\{ \int \mathcal{D}U f(n) (2\kappa)^{N_t n} e^{-S_g} \right\} e^{\frac{n\mu}{T}} = \sum_{n=0}^{4N_s^3} Z_C(n,T) e^{\frac{n\mu}{T}}$$

$$\therefore Z_C(n,T) = \int \mathcal{D}U f(n) (2\kappa)^{N_t n} e^{-S_g} = (2\kappa)^{N_t n} Z_{\text{quench}} \langle f(n) \rangle_{\text{quench}}$$

$Z_C(n,T)$ が求まれば、粒子数 n での $V_{\text{eff}}(n,T)$ が最小となる化学ポテンシャルは

$$-\frac{\mu}{T} = \frac{\Delta \ln Z_C(n,T)}{\Delta n} = \begin{cases} N_t \ln(2\kappa) + \frac{\Delta \ln \langle f(n,\beta) \rangle_{\text{quench}}}{\Delta n} & (n: \text{even}) \\ N_t \ln(2\kappa) + \frac{\Delta \ln \langle f(n,\beta) \Omega \rangle_{\text{quench}}}{\Delta n} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

偶数と奇数で振る舞いが違うので、2つずらした点で前方差分をとる。この化学ポテンシャルはフェルミオン2つを入れるのに必要なエネルギーと言える。

3. センター対称性と分配関数

センター対称性

SU(2)の場合、センター変換(Z_2 変換)はあるタイムスライスで $U_4 \rightarrow -U_4$ と変換することである。センター変換の下でPolyakov loopは $\Omega \rightarrow -\Omega$ と変換する。

$$\langle \Omega \rangle \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{閉じ込め相(対称)} \\ \neq 0 \rightarrow \text{非閉じ込め相(破れ)} \end{cases}$$

動的フェルミオンはこの対称性をあらわに破る役割をする。有限体積の場合、外場を入れなければ対称性の議論ができない。

有限体積でのカノニカル分配関数

有限体積では粒子数が奇数のとき、センター対称性からカノニカル分配関数 $Z_C(n,T)$ は常にゼロになる。 $Z_C(n,T)$ は粒子数 n の生成確率に比例している。非閉じ込め相ではフェルミオン単体でも存在できるので、奇数の $Z_C(n,T)$ も有限でなければおかしい。センター対称性のために符号が変わるので、奇数の $Z_C(n,T)$ の符号問題が厳しい。

解決策

微小にセンター対称性を破る外場(重フェルミオン)を入れて計算をする。(1)式より

$$\ln \det M \approx \varepsilon N_s^3 \Omega$$

N_s^3 :格子単位での体積, ε :質量が無限大でゼロになる微小なパラメータ, εN_s^3 :有限の値。外場を入れ、 Z_2 センター変換したものとの平均をとると

$$Z_C(n,T) = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}U_{\mu} (2\kappa)^{N_t n} e^{-S_g} \{ f(n,\beta) e^{\varepsilon N_s^3 \Omega} + (-1)^n f(n,\beta) e^{\varepsilon N_s^3 (-\Omega)} \}$$

下線部分を展開し、 εN_s^3 の最低次をとると、奇数は外場との応答のみ残る。

$$Z_C(n,T) = \begin{cases} (2\kappa)^{N_t n} Z_{\text{quench}} \langle f(n,\beta) \rangle_{\text{quench}} & (n: \text{even}) \\ \varepsilon N_s^3 (2\kappa)^{N_t n} Z_{\text{quench}} \langle f(n,\beta) \Omega \rangle_{\text{quench}} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

εN_s^3 の不定因子が残るため、奇数では比をとる。

$$Z_{GC}(\mu,T)/Z_{\text{quench}} = \sum_{n: \text{even}} \langle f(n,T) \rangle_{\text{quench}} e^{n(\frac{\mu}{T} + N_t \ln 2\kappa)} + \frac{\langle f(1,T) \rangle_{\text{quench}}}{\langle f(1,T) \Omega \rangle_{\text{quench}}} \sum_{n: \text{odd}} \frac{\langle f(n,T) \Omega \rangle_{\text{quench}}}{\langle f(1,T) \Omega \rangle_{\text{quench}}} e^{n(\frac{\mu}{T} + N_t \ln 2\kappa)}$$

$\langle f(1) \rangle = 4N_s^3 \langle \Omega \rangle$ より、奇数からの寄与は閉じ込めのオーダーパラメータ $\langle \Omega \rangle$ に依存。

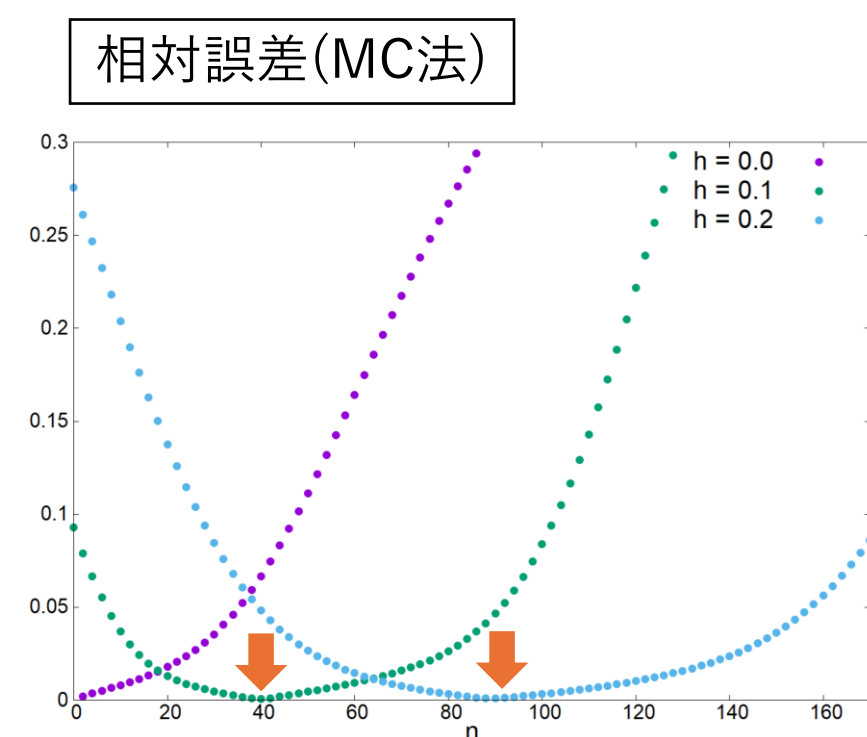
オーバーラップ問題

$f(n) \sim \Omega^n$ なので、MC法の統計和の中で Ω がゼロ付近の配位は全く効かない。なのでPolyakov loopの外場を入れる。

$$\langle f(n) \rangle_{\text{quench}} = \langle f(n) e^{-h N_s^3 \Omega} \rangle_h / \langle e^{-h N_s^3 \Omega} \rangle_h$$

各配位の寄与が均等になる外場の係数 h は次式を満たすので平均場近似により求まる。

$$\frac{d(\ln f(n) - h N_s^3 \Omega)}{d\Omega} = 0, \quad h = \frac{1}{N_s^3} \frac{d \ln f(n)}{d\Omega}$$

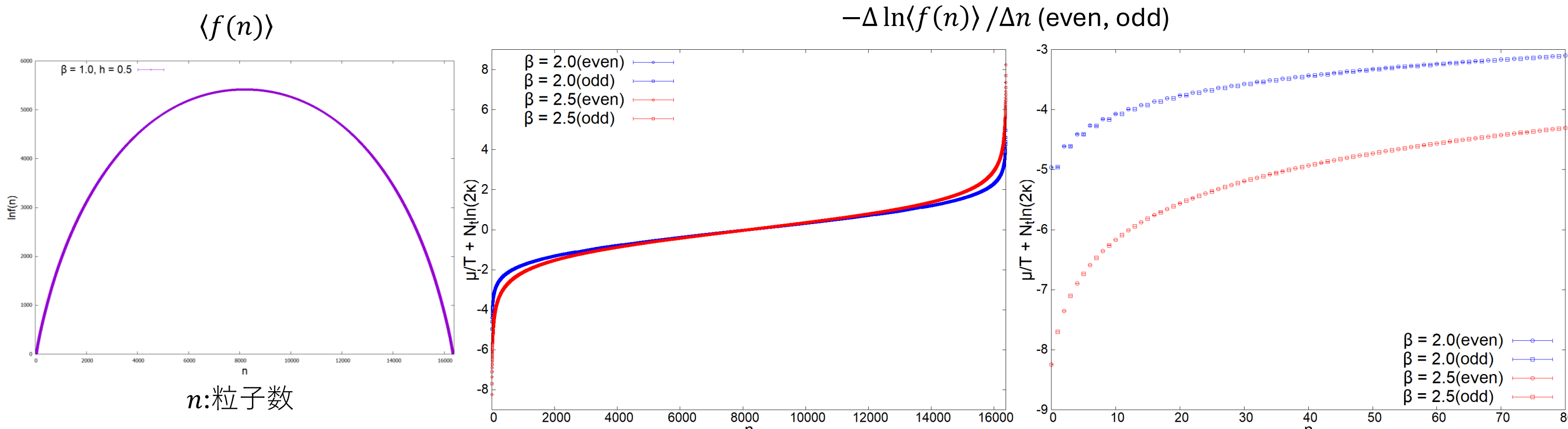


4. カノニカル分配関数の結果

格子サイズ: $16^3 \times 4$ 、相転移点: $\beta = 2.3$

$\beta = 2.0$ が閉じ込め相、 $\beta = 2.5$ が非閉じ込め相。

$\langle f(n) \rangle$ は $n \rightarrow 4N_s^3 - n$ という変換の下で対称。化学ポテンシャルは偶奇でほぼ同じ。

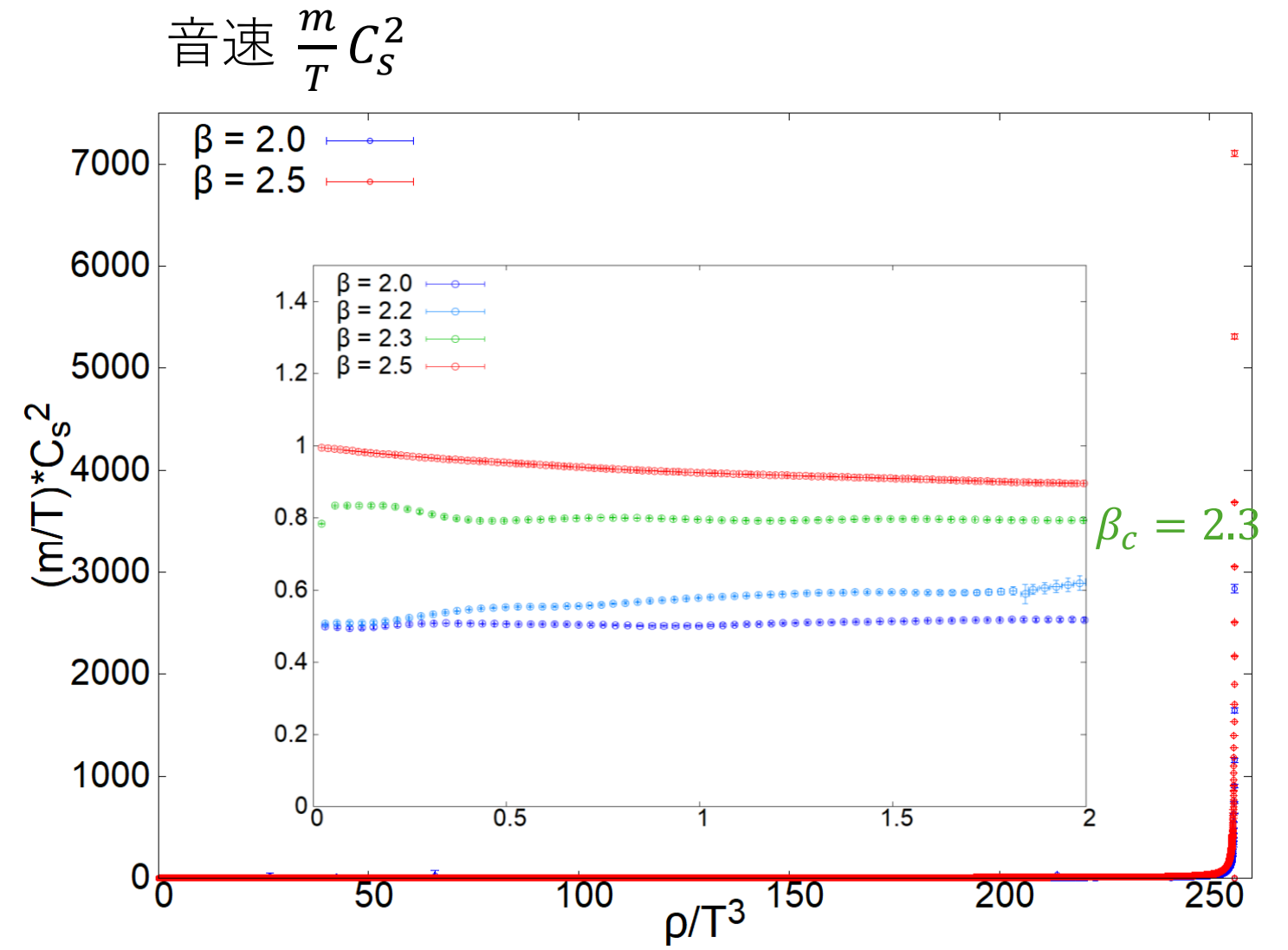
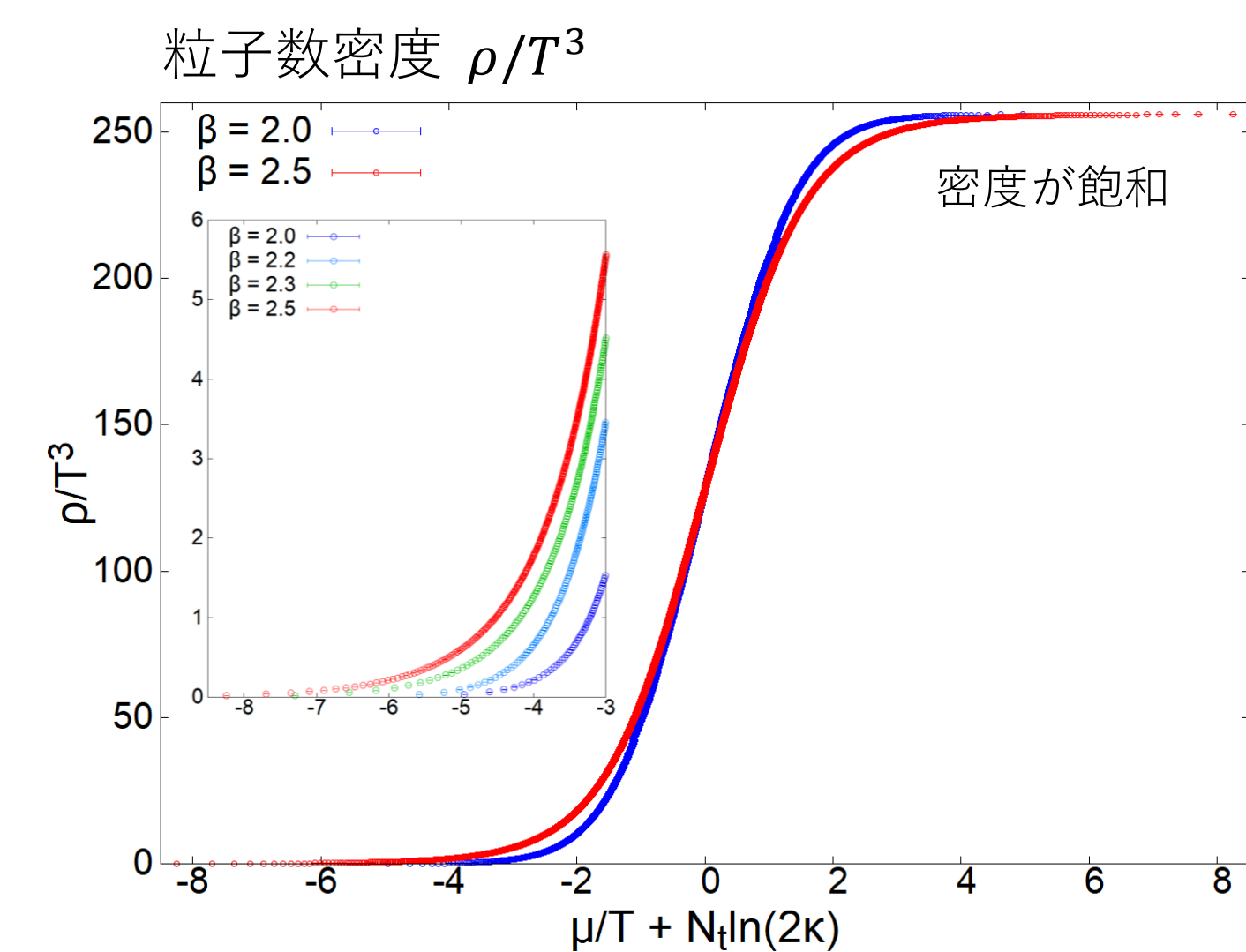


5. 熱力学量

$V_{\text{eff}}(n,T)$ の微分から、 $V_{\text{eff}}(n,T)$ が最小となる点での n と $\frac{\mu}{T}$ の関係が分かったため、

$Z_{GC}(\mu,T)$ の計算では、 $V_{\text{eff}}(n,T)$ が最小となる n 付近の和をとるだけで充分。

閉じ込め相では $\langle \Omega \rangle = 0$ なので偶数のみで、非閉じ込め相では $\langle \Omega \rangle$ は有限だが、上限として $\langle \Omega \rangle$ を用いて計算した。



・非相対論的な音速 C_s の定義より

$$C_s^2 = \frac{dp}{d\rho_m} = \frac{T}{m} \frac{d(\Delta p/T^4)}{d(\rho/T^3)}$$

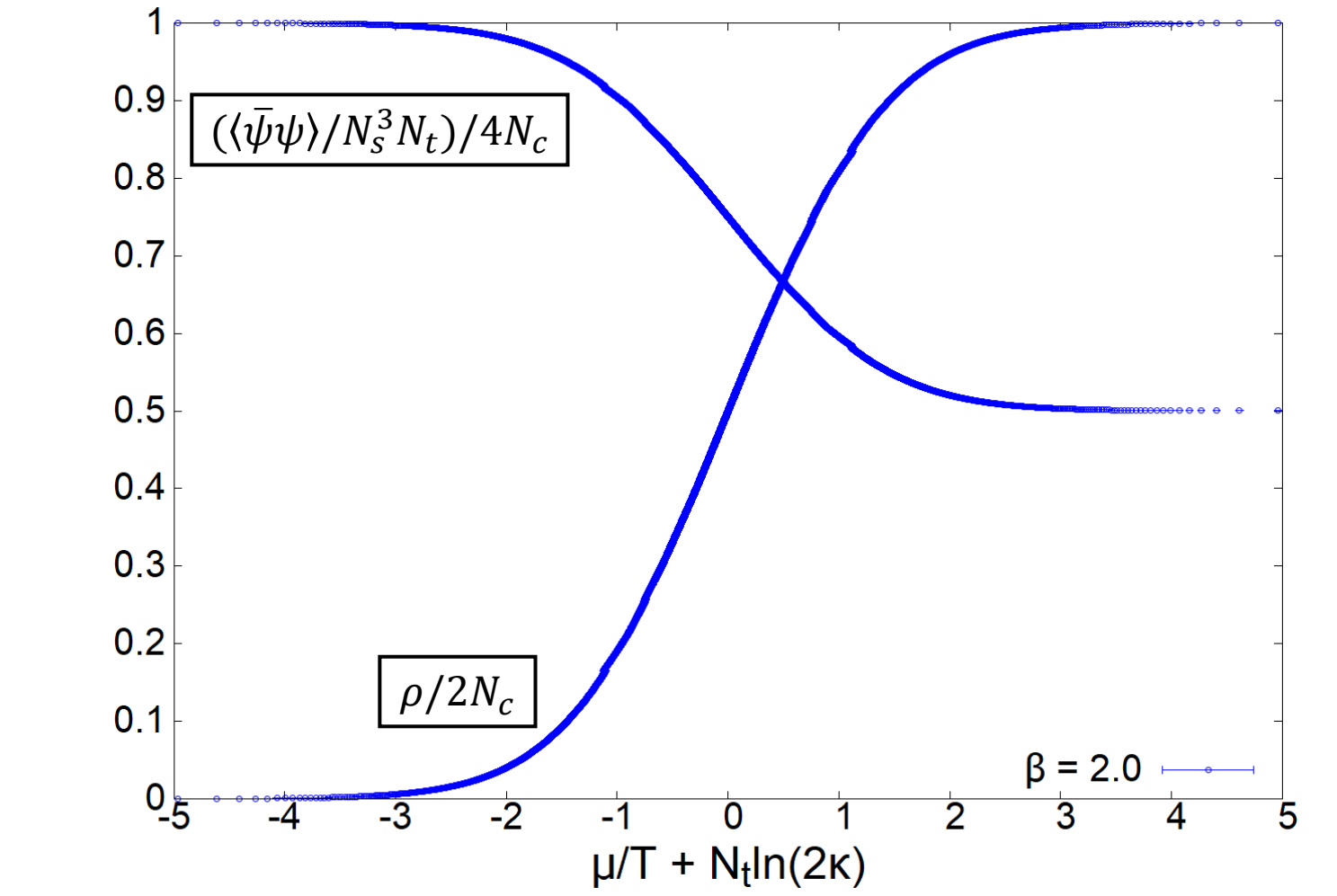
・低密度領域ではほぼ一定。

閉じ込め相: $\frac{m}{T} C_s^2 = 0.5$

非閉じ込め相: $\frac{m}{T} C_s^2 = 1$

低温の結果はHadron resonance gas modelで説明できる。

カイルル凝縮 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$



・重クォーク高密度極限での式

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \langle \text{tr } M^{-1} \rangle$$

$$= 4N_c N_s^3 N_t - \frac{Z_{\text{quench}}}{Z_{GC}} \kappa \left\langle \frac{\partial \det M}{\partial \kappa} \right\rangle_{\text{quench}}$$

$$= N_s^3 N_t (4N_c - \langle \rho \rangle)$$

重クォークなので $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ は0にならない。

$\frac{\mu}{T} + N_t \ln(2\kappa) = \ln C$, C は重クォーク理論のパラメータ

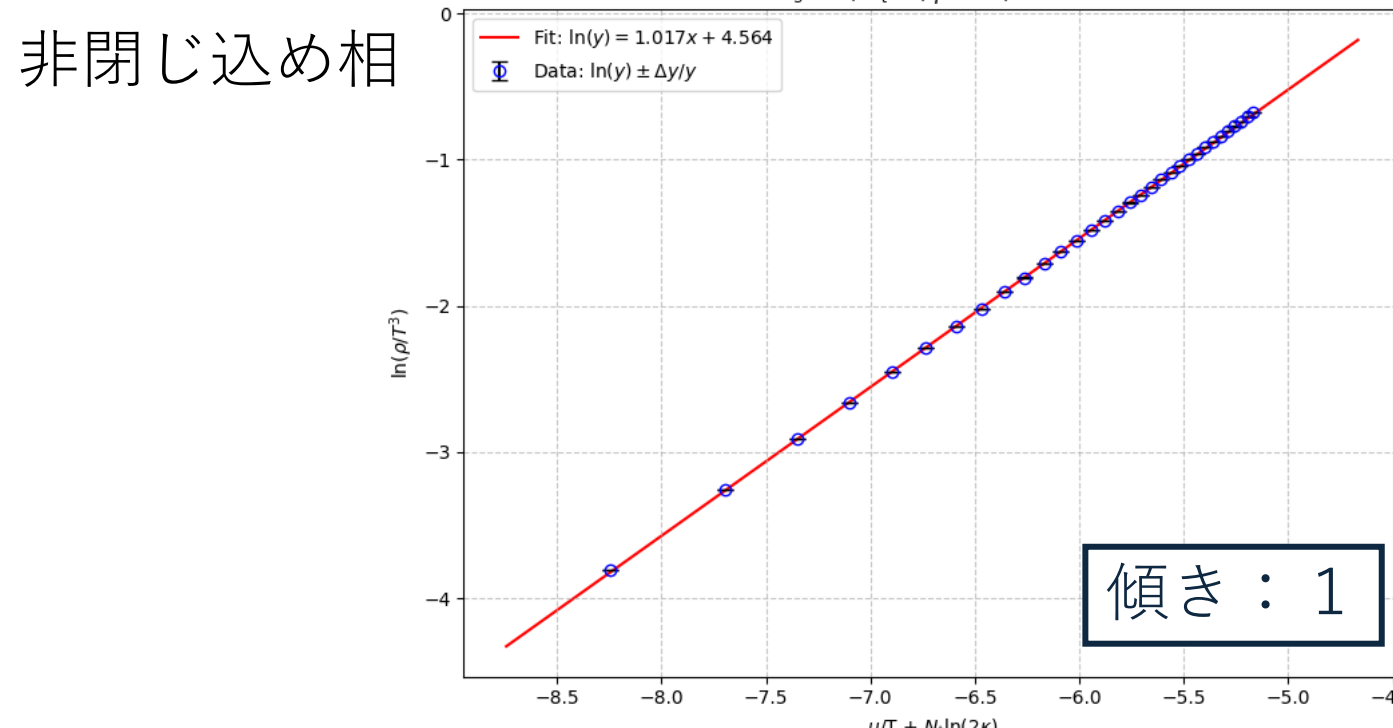
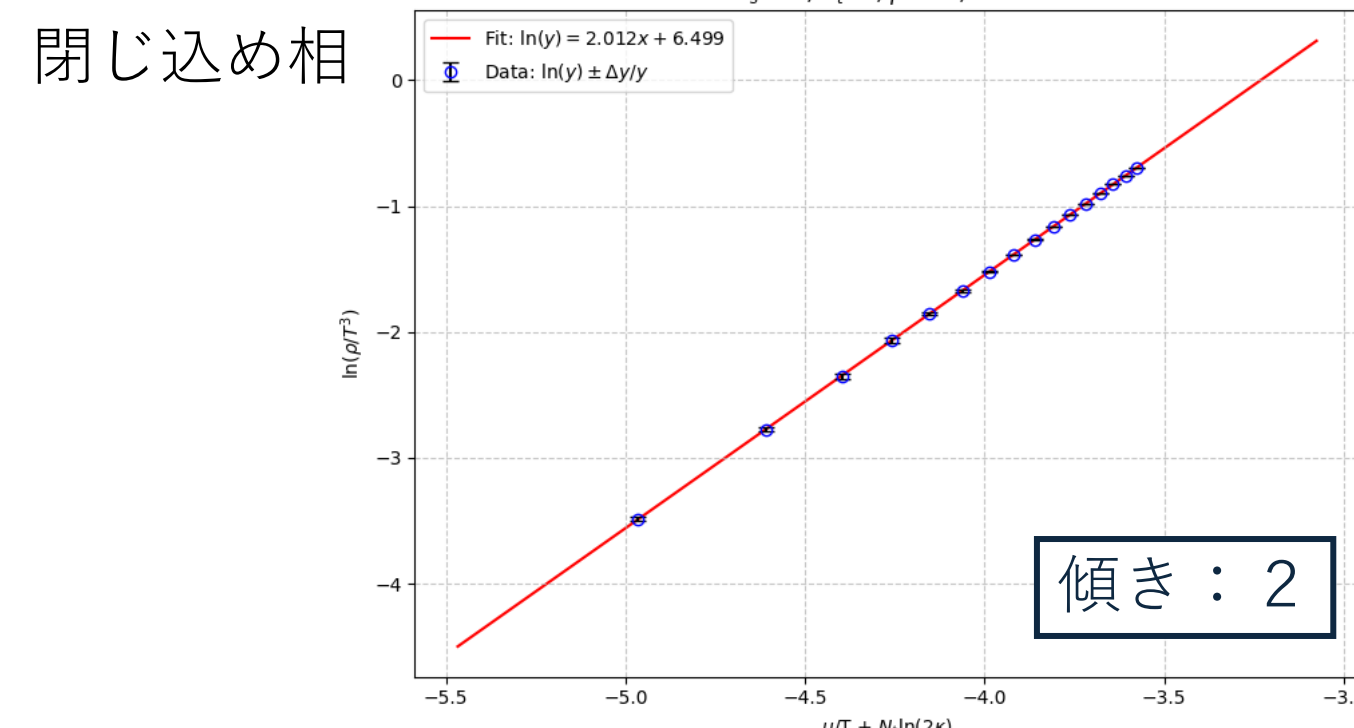
6. Hadron resonance gas model(重クォーク)との比較

$$\text{自由ガスの和} \quad p(T,\mu) = \sum_{i: \text{Meson}} p_i^M(T) + \sum_{i: \text{Baryon}} p_i^B(T,\mu), \quad p_i^B(T,\mu) \propto e^{2\frac{\mu}{T}}$$

$$\text{閉じ込め相: } \frac{p}{T^4} = a \cdot e^{2\frac{\mu}{T}}, \quad \frac{p}{T^3} = \frac{d(p/T^4)}{d(\mu/T)} = 2a \cdot e^{2\frac{\mu}{T}}$$

$$\text{非閉じ込め相: } \frac{p}{T^4} = b_1 \cdot e^{1\frac{\mu}{T}} + b_2 \cdot e^{2\frac{\mu}{T}} + \dots, \quad \frac{p}{T^3} = \frac{d(p/T^4)}{d(\mu/T)} = b_1 \cdot e^{1\frac{\mu}{T}} + 2b_2 \cdot e^{2\frac{\mu}{T}} + \dots$$

化学ポテンシャルが小さい領域ではこれを満たしている。下図は $\ln(\rho/T^3)$



よって低密度領域で、音速は

$$\frac{m}{T} C_s^2 = \frac{d(\Delta p/T^4)}{d(\rho/T^3)} = \frac{d(\Delta p/T^4)/d(\mu/T)}{d(\rho/T^3)/d(\mu/T)} = \begin{cases} 1/2 & (\text{閉じ込め相}) \\ 1 & (\text{非閉じ込め相}) \end{cases}$$