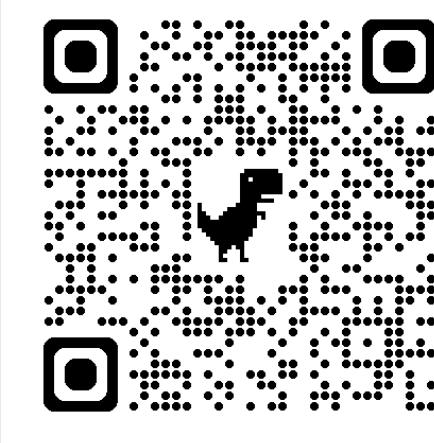




問：Dyson 普遍性は逆スペクトル変換を生き残るか？

従来：spectral statistics $\{\varepsilon_n\}$ $\rightarrow$ spacing, pair correlation本研究：operator-level diagnostic $\{\varepsilon_n^{(s)}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} H^{(s)} \rightarrow$ matrix geometry

答：Yes. Dyson class は再構成作用素の Liouvillian shell geometry として現れる。

1. Introduction

1-1. Random matrices and Dyson universality

Gaussian ランダム行列集団 (M : 行列サイズ):

$$P_\beta(H) \propto \exp\left(-\frac{\beta M}{4} \text{Tr } H^2\right), \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{GOE (実対称)}, \\ 2 & \text{GUE (複素エルミート)}, \\ 4 & \text{GSE (四元数エルミート)} \end{cases}$$

固有値の同時確率分布は

$$P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_M) \propto \exp\left[-\beta\left(\frac{M}{4} \sum_j \lambda_j^2 - \sum_{i < j} \log|\lambda_i - \lambda_j|\right)\right]$$

大域統計

$$\rho_{\text{sc}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2} \quad (|\lambda| \leq 2) \quad (\text{Wigner 半円則})$$

局所統計 — unfolding: $\varepsilon_n := M \int_{-2}^{\lambda_n} \rho_{\text{sc}} d\lambda$ (平均間隔 1 に揃える)

$$p(\Delta) \sim \Delta^\beta \quad (\Delta \rightarrow 0) \quad \Delta := \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \quad (\langle \Delta \rangle = 1)$$

GOE: Δ , GUE: Δ^2 , GSE: Δ^4

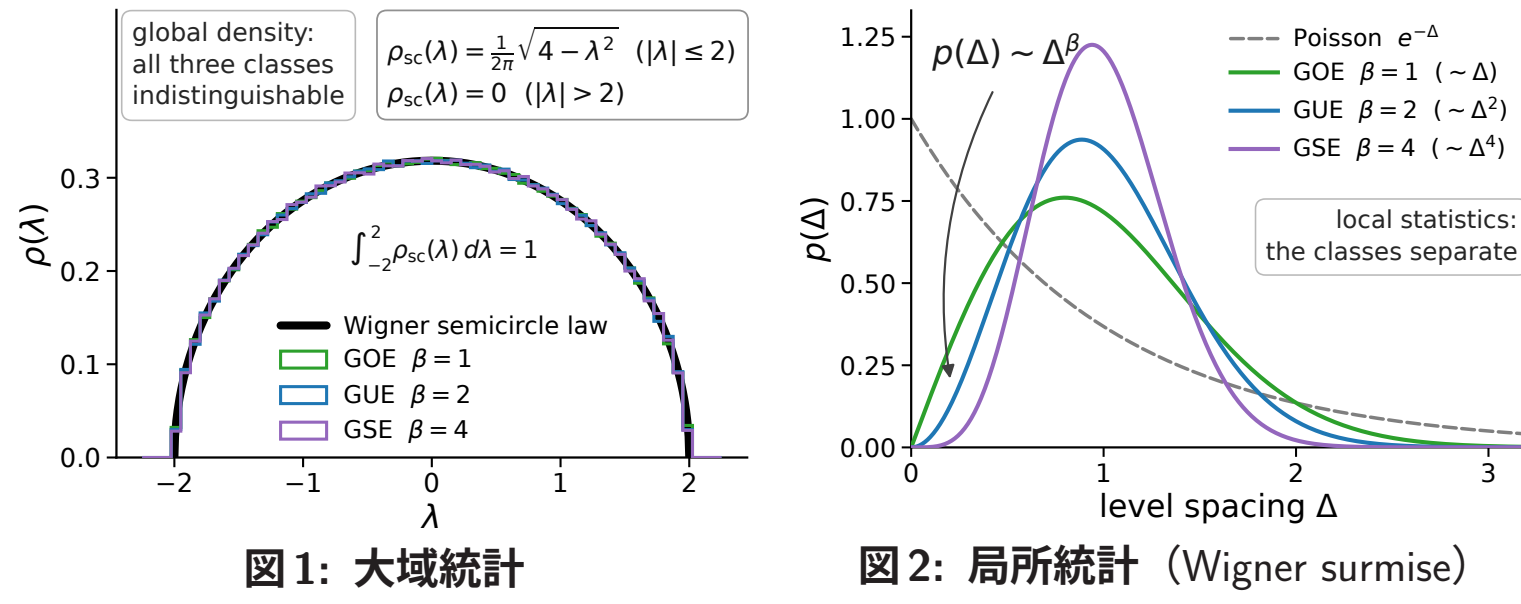
 $\Delta \rightarrow 0$ は隣接 2 準位そのものが近づく極限。

図1: 大域統計

図2: 局所統計 (Wigner surmise)

大域密度では 3 クラスを区別できないが, 局所統計には β の違いが現れる

► Dyson universality: 同じ対称性クラスでは, 行列要素の詳細によらず局所スペクトル統計が普遍化する (Dyson, 1962; Mehta, 2004). カオス系の量子スペクトルも同じ普遍類に落ちる (Bohigas et al., 1984).

1-2. Riemann zeros and GUE

Riemann ゼータ関数の非自明零点:

$$\rho_n = \frac{1}{2} + i t_n \quad (t_n: \text{零点の高さ})$$

• Montgomery 1973: pair correlation が GUE 型になると予想 (Montgomery, 1973).

• Odlyzko 1987: 大規模数値計算で確認 (Odlyzko, 1987).

$$\{t_n\} \xrightarrow{\text{unfolding}} \{\varepsilon_n^{(\zeta)}\} \xrightarrow{\text{statistics}} \text{GUE}$$

1-3. From spectral statistics to an inverse problem

- Hilbert–Pólya: 零点を自己共役作用素のスペクトルとして理解できるか? — $H = xp$ 半古典像 (Berry & Keating, 1999), トレース公式による定式化 (Connes, 1999).
 - Wu–Sprung 1993: 零点を再現する 1D potential を半古典的に逆構成し fractal structure を指摘 (Wu & Sprung, 1993).
 - Ramani et al. 1995: Darboux dressing による非線形 inverse-spectral construction (Ramani et al., 1995).
 - van Zyl–Hutchinson 2003: ランダム行列由来の potential にも同様 (van Zyl & Hutchinson, 2003).
- ⇒ inverse-spectral potential が fractal な幾何をもつことは既知.

未解明: スペクトルがもつ Dyson class は, 非線形な逆変換後の作用素のどこに現れるのか?

$$\{\varepsilon_n^{(s)}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} H^{(s)} \quad \text{Does Dyson universality survive?}$$

2. Inverse-Spectral Reconstruction

2-1. Spectrum $\rightarrow$ 1D Schrödinger operator

1D Schrödinger 作用素:

$$H^{(s)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V^{(s)}(x), \quad V^{(s)}(x) = \frac{x^2}{4} + f^{(s)}(x)$$

(s: spectral source のラベル)

基準は調和振動子 — $f(x) = 0$ でスペクトルは等間隔:

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{4}, \quad E_n^{(0)} = n + \frac{1}{2}$$

unfolding 済みスペクトル $\varepsilon_0^{(s)} < \varepsilon_1^{(s)} < \dots < \varepsilon_{M_{\text{ev}}-1}^{(s)}$ を固有値として再現する $f^{(s)}(x)$ を逆構成する:

$$\{\varepsilon_n^{(s)}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} H^{(s)} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{4} + f^{(s)}(x)$$

逆写像 $\mathcal{D}$ は Darboux dressing (Matveev & Salle, 1991; Cooper et al., 1995).

Harmonic osc.	e.g. GUE reconstruction
$V_0(x) = x^2/4$	$V^{(\text{GUE})} = x^2/4 + f^{(\text{GUE})}$
$E_n^{(0)} = n + \frac{1}{2}$	$\varepsilon_n^{(\text{GUE})}$
equally spaced	unfolded GUE levels

⇒ 与えられたスペクトルの情報は, 逆スペクトル変形 $f^{(s)}(x)$ に符号化される。

なぜ基準が調和振動子か

- そのスペクトルが等間隔である。
- よって基準 Liouvillian $\mathcal{L}_0 = \text{ad}_{H_0}$ の固有値は整数 $m - n$.
- 行列要素を対角線からの距離 $d = |m - n|$ でシェルに分ける §3 の分解が, 追加の仮定なしにそのまま定義できる。
- すなわちこの基準の選び方が §3 以降の Liouvillian shell geometry を可能にしている。

2-3. Is the Dyson class visible in $f^{(s)}(x)$?入力スペクトルの情報はすべて $f^{(s)}(x)$ に入っている:

$$\{\varepsilon_n^{(s)}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} f^{(s)}(x), \quad s = \text{GOE, GUE, GSE, } \zeta$$

では $f^{(s)}(x)$ そのものを見れば Dyson class を識別できるか? 座標空間の box counting では 4 クラスが誤差内で重なる:

$$d_{\text{box}}^{\text{eff}} \simeq 1.80 \quad (\text{GOE, GUE, GSE, } \zeta)$$

GOE	1.8064(19)
GUE	1.8071(21)
GSE	1.8081(31)
ζ	1.8049(30)

 ζ -GOE の分離はわずか 0.4σ — 4 クラスが互いに区別できない。すなわち座標空間の粗視化量には Dyson class の情報が残っていない。

Coordinate-space geometry does not reveal the Dyson class.

では Dyson class の情報は再構成作用素のどこに隠れているのか?

$$f^{(s)}(x) \rightarrow F_{mn}^{(s)} = \langle m | f^{(s)} | n \rangle = \langle m | F^{(s)} | n \rangle$$

3. Inverse-Spectral Matrix Geometry

3-1. Common harmonic-oscillator frame

すべての再構成作用素を, 共通の基準 Hamiltonian H_0 に対する変形として書く:全集団に同じ基底 $\{|m\rangle\}$ を用いる。

► 異なるスペクトルから再構成された作用素を, 同じ reference frame の中で比較する。

3-2. Deformation matrix

 $f^{(s)}(x)$ を共通基底へ射影する

$$(m, n = 0, \dots, N_b - 1, \varphi_m(x) = \langle x | m \rangle):$$

共通基底での行列表現は

$$\langle m | H^{(s)} | n \rangle = \underbrace{E_m^{(0)} \delta_{mn}}_{\text{reference oscillator}} + \underbrace{F_{mn}^{(s)}}_{\text{inverse-spectral deformation}}$$

3. Inverse-Spectral Matrix Geometry (続き)

► $f^{(s)}(x)$ を座標空間の関数としてではなく, 行列 $F^{(s)}$ の off-diagonal geometry として見る — では, それをどう定量化するか?

3-3. Liouvillian distance shells and moments

基準 Liouvillian $\mathcal{L}_0 := \text{ad}_{H_0}$, $\mathcal{L}_0(O) = [H_0, O]$. 行列単位 $|m\rangle\langle n|$ ($n > m$) は $\mathcal{L}_0$ の固有状態, 固有値は $m - n$.

$$d := |m - n| = |E_m^{(0)} - E_n^{(0)}| = |\omega|$$

matrix distance = energy transfer = Liouvillian (Bohr) frequency

シェル重みの定義:

$$W_d^{(s)} = \frac{1}{N_b} \sum_{|m-n|=d} |F_{mn}^{(s)}|^2$$

 d 小 $\Leftrightarrow$ 近対角/低周波, d 大 $\Leftrightarrow$ 遠非対角/高周波.

シェル分布を距離モーメントでまとめる:

$$M_p^{(s)} := \sum_{d \geq 0} d^p W_d^{(s)} = \frac{1}{N_b} \|\mathcal{L}_0^{p/2} F^{(s)}\|_{\text{HS}}^2$$

 $p \uparrow$ はより高い Liouvillian 周波数に対応. クラス間の比較には GUE 規格化比 $R_p^{(s/\text{GUE})} := \langle M_p \rangle_s / \langle M_p \rangle_{\text{GUE}}$ (以下 R_p).

$$\mathcal{L}_0 = \text{ad}_{H_0}$$

reference Liouvillian

$$d = |m - n|$$

distance shell = $|\omega|$

$$W_d^{(s)}$$

shell weight

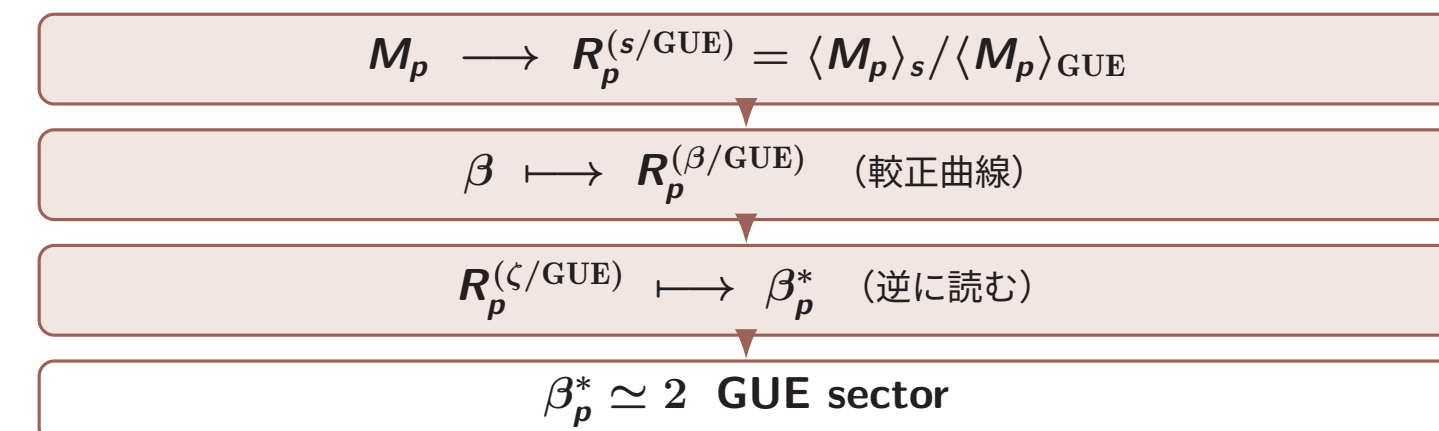
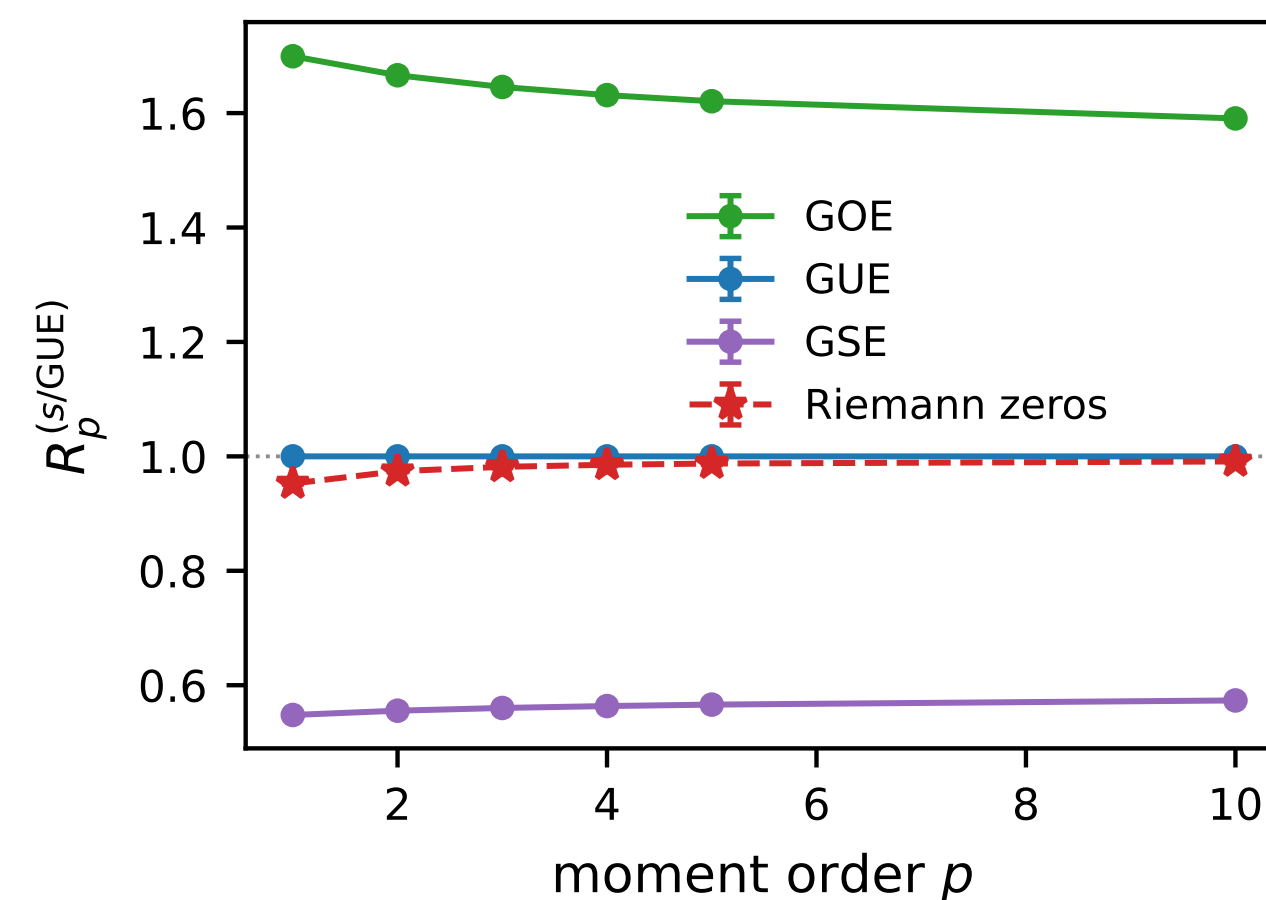
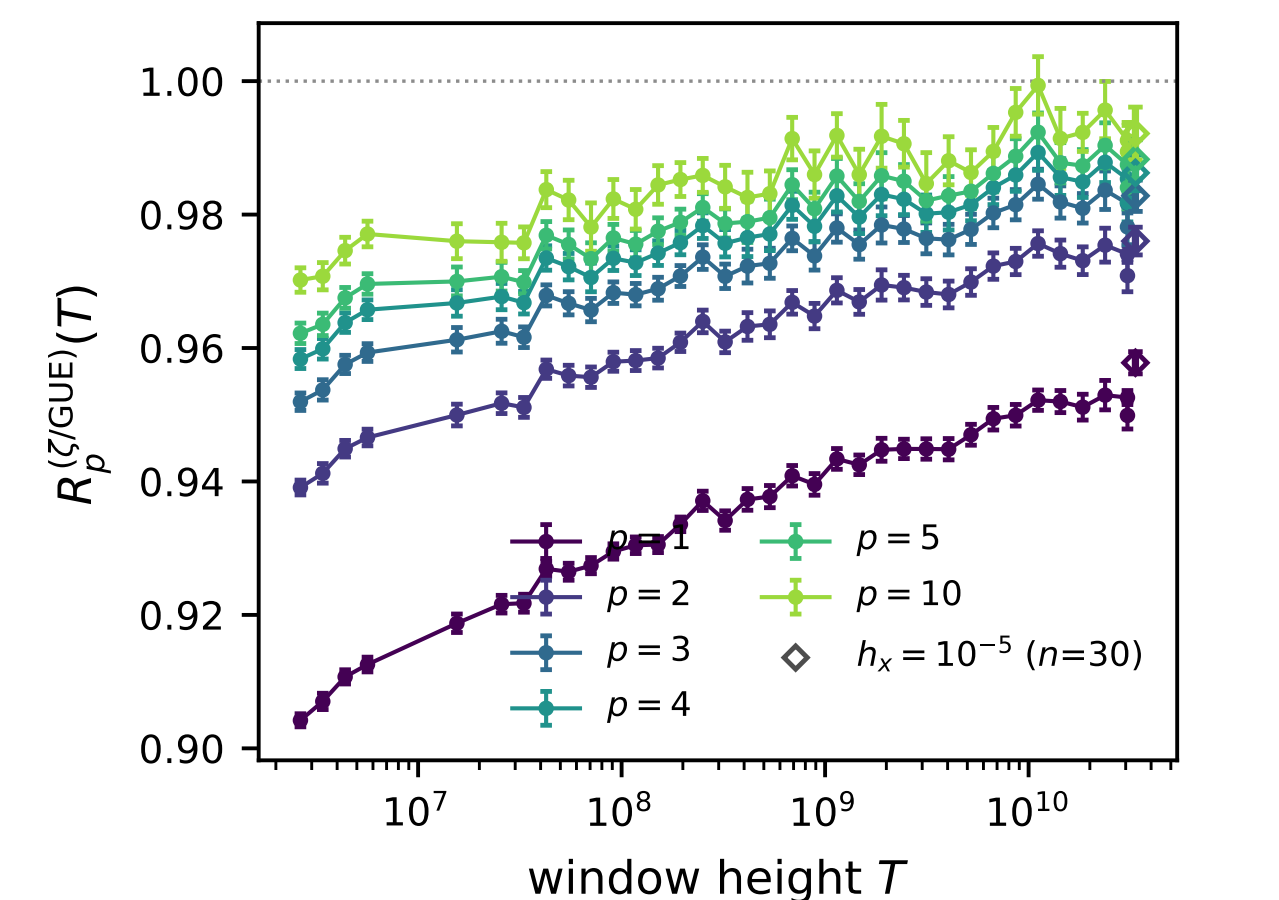
$$M_p^{(s)}$$

distance moment

Krylov connection (operator-theoretic interpretation)

(i) Krylov flag $\mathcal{K}_q(F^{(s)}) := \text{span}\{F^{(s)}, \mathcal{L}_0 F^{(s)}, \dots, \mathcal{L}_0^q F^{(s)}\}$, $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \dots$ (ii) even moments $M_{2q}^{(s)} = \frac{1}{N_b} \|\mathcal{L}_0^q F^{(s)}\|_{\text{HS}}^2$ (iii) Lanczos seed $|O_0\rangle = F^{(s)} / \sqrt{M_0^{(s)}}$, $b_1^2 = M_2/M_0$; $\{M_{2q}/M_0\}_{q \geq 0} \Rightarrow$ Lanczos 係数 $\{a_n, b_n\}$ (Parker et al., 2019; Balasubramanian et al., 2022).⇒ M_{2q} は Krylov flag を生成する列の norm hierarchy を測る

4. Results

4-1. Continuous β calibrationGaussian β ensemble について $\beta \mapsto R_p^{(\beta/\text{GUE})}$ を計算する (構成上 $R_p^{(\beta=2/\text{GUE})} = 1$). R_p は β に滑らかに変化し, GOE, GUE, GSE を明瞭に分離する。 M_p は 3 つの離散クラスだけでなく連続な Dyson 指数 β を解像する同じ較正曲線に Riemann zeros を載せ, $R_p^{(\beta_p^*/\text{GUE})} = R_p^{(\zeta/\text{GUE})}$ で effective Dyson index β_p^* を定義する (較正曲線を逆に読む)。例: $\beta_1^* = 2.1180(36) \rightarrow \beta_{10}^* = 2.0240(105)$. β_p^* が p に依存すること自体が有限残差の現れであり, その所在は 4-3 でシェルごとに分解する。4-2. Class separation and where ζ landsすべての p で序列 GOE > GUE > GSE が保たれ ($\simeq 1.6$ と $\simeq 0.55$), Riemann zeros だけが GUE 帯に沿って走り $R_p^{(\zeta/\text{GUE})} \rightarrow 1$ ($p \uparrow$). ただし完全一致ではない — 正準高さ $T \simeq 3.06 \times 10^{10}$ で $R_2^{(\zeta/\text{GUE})} = 0.96984 \pm 0.00229 < 1$. Riemann zeros are GUE-like, but not exactly GUE at finite height. M_p separates GOE/GUE/GSE, while Riemann zeros track the GUE sector.図6: R_p 対モーメント次数 p . GOE/GSE は全 p で分離, ζ は GUE 帯に沿う (R_2 の 1 からのずれは約 13 bootstrap s.e.).図7: 高さ依存性. $T = 1.6 \times 10^8 - 3.06 \times 10^{10}$ の 40 ビン格子上で, すべての p が全体として高さとともに 1 へ接近する — 残差は高さとともに縮小する。

4-3. Shell-resolved residual — 残差はどのシェルにあるか

シェルごとの GUE 規格化比:

$$R_d^{(s/\text{GUE})} := \frac{\langle W_d^{(s)} \rangle_s}{\langle W_d^{(\text{GUE})} \rangle_{\text{GUE}}}$$

モーメント残差との関係:

$$\langle M_p \rangle_\zeta - \langle M_p \rangle_{\text{GUE}} = \sum_d d^p \Delta W_d$$

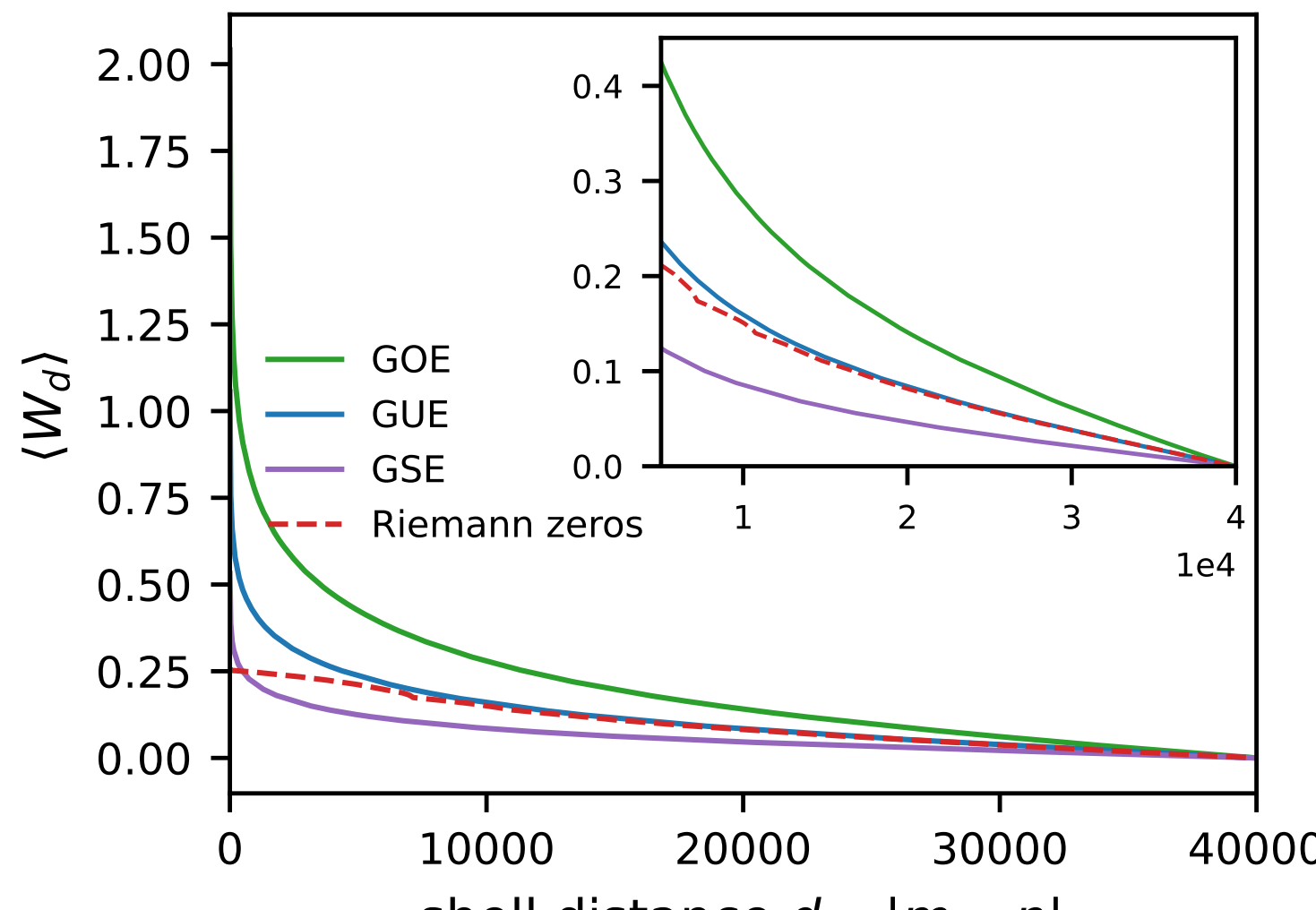
⇒ Riemann–GUE residual is concentrated at small d (near diagonal / low Liouvillian frequency). この差が p を上げると見えなくなる理由は, モーメントの重み d^p が large- d を強調するからである:

$$\text{large-}d \text{ では } W_d^{(\zeta)} \simeq W_d^{(\text{GUE})} \quad (d \gtrsim 8000)$$

$$M_p = \sum_d d^p W_d: p \uparrow \text{ で large-}d \text{ を強調}$$

$$R_p^{(\zeta/\text{GUE})} \rightarrow 1 \quad (\text{図6})$$

The residual is localized in low-frequency Liouvillian shells.

図8: シェルプロファイル $\langle W_d \rangle$. ζ は near-diagonal shell が GUE より枯れており, large- d では一致する. $F^{(s)}$ のパリティにより奇数 d は恒等的に消えるので描いていない。Production parameters lie inside the numerical convergence plateau. $h_x = 10^{-4}$, $M_{\text{lev}} = 5 \times 10^4$, $N_b = 4 \times 10^4$, $h_q = 0.005$ (零点データ: LMFDB, 2024).

Summary

inverse map $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ matrix geometry $\rightarrow \beta$ calibration $\rightarrow \zeta \simeq \text{GUE}$ ($\beta^* \simeq 2$) $\rightarrow$ shell-resolved residual

局所準位統計に現れる GUE 普遍性は, 非線形な逆スペクトル再構成後にも失われず, 演算子の Liouvillian shell geometry として再び現れる。

参考文献

Balasubramanian, V., Caputa, P., Magán, J. M., & Wu, Q. 2022. Phys. Rev. D, 106, 046007.
Berry, M. V., & Keating, J. P. 1999. in Supersymmetry and Trace Formulae (Kluwer/Plenum) 395.
Bohigas, O., Leitan, M. J., & Schmit, C. 1984. Phys. Rev. Lett., 52, 1.
Connes, A. 1999. Sel. Math., 5, 29.
Cooper, F., Khan, A., & Sukstas, U. 1995. Phys. Rep., 251, 207.
Dyson, F. J. 1962. J. Math. Phys., 3, 140.
The LMFDB Collaboration 2024. The L-functions and Modular Forms Database, last ed. on: 9, 041017.
Matveev, V. B., & Salle, M. A. 1991. Darboux Transformations and Solitons (Springer).
Mehta, M. 2004. Random Matrices, 3rd ed. (Elsevier).
Montgomery, H. L. 1973. Proc. Sympos. Pure Math., 24, 181.
Odlyzko, A. M. 1987. Math. Comp., 48, 273.
Parker, D. E., Cao, X., Avdeishkin, A., Scarfidi, T., & Altman, E. 2019. Phys. Rev. X, 9, 041017.
Ramani, A., Grammaticos, B., & Caurier, E. 1995. Phys. Rev. E, 51, 6323.
van Zyl, B. P., & Hutchinson, D. A. W. 2003. Phys. Rev. E, 67, 066211.
Wu, H., & Sprung, D. W. L. 1993. Phys. Rev. E, 48, 2595.