

対称性を利用したカノニカル法による有限密度格子QCDの符号問題の解決法

新潟大学自然科学研究科 小飯田将成, 橋爪秀弥

新潟大学理学部 江尻信司

ポスターの要約

- 有限密度格子QCDの大分配関数を粒子数nで分解したカノニカル分配関数を考えると、そのカノニカル分配関数を構成する配位は、理論の持つZ(3)センター対称性より、ボルツマンの重みの複素位相が $\exp(\pm 2\pi ni/3)$ 違うものどうしが全く同じ確率で生成される。この性質を利用して符号問題を回避することを考える。
- 議論を明確にするために、クォーク質量が重く、クォーク行列式の対数がポリヤコフループ Ω に比例すると近似できる場合を考える。
- 粒子数nのカノニカル分配関数をサドルポイント近似で求めると、 Ω の位相を θ として、位相因子は $\cos(n\theta)$ という形でのみ計算式の中に表れる。
- 局所的なポリヤコフループがZ(3)対称な配位の空間平均した Ω の位相はU(1)対称な分布になり、Z(3)対称が破れ、 $|\Omega|$ が大きな配位では、 Ω の位相はZ(3)対称な分布をする。
- θ の分布がU(1)対称か、Z(3)対称かを調べると、 $|\Omega|$ が小さい配位か大きい配位かで、 θ の分布がU(1)対称かZ(3)対称かが決まることが分かる。
- 経路積分では、 $|\Omega|$ の値で配位を分け、その対称性に従って、 θ の積分を先に行う。
- 符号問題を取り除き、サドルポイント近似でカノニカル分配関数を計算する。

1. カノニカル法とサドルポイント近似

カノニカル法を用いて有限温度・密度格子QCDの解析をする。経路積分で得られた大分配関数 $Z_{GC}(T, \mu)$ にfugacity展開を用いて、カノニカル分配関数 $Z_C(T, n)$ を得る。nは粒子数。

$$Z_{GC}(T, \mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(T, n) e^{\frac{n\mu}{T}} \quad \left(= \int \mathcal{D}U (\det M(\kappa))^N e^{-S_g} \right)$$

逆に、カノニカル分配関数は μ を複素数 $\mu = \mu_R + i\mu_I$ にし、逆ラプラス変換としてかける。

$$Z_C(T, n) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-n(\mu_R + i\mu_I)/T} Z_{GC}(T, \mu_R + i\mu_I) d\left(\frac{\mu_I}{T}\right) = \int \mathcal{D}U \left[\frac{1}{2\pi} \int e^{-nz} e^{VD(\kappa, z)} dz \right] e^{-S_g}$$

ここで、 $z = (\mu_R + i\mu_I)/T$ 、 $VD(\kappa, z) = N_f \ln \det M(\kappa, z)$ 、各配位での複素z平面上のサドルポイントは、 $\frac{dD}{dz}(\kappa, z_0) = \rho$ を満たす点 z_0 。積分を、サドルポイントを通る経路で実行する（サドルポイント近似）これは体積が十分大きければ妥当な近似である。

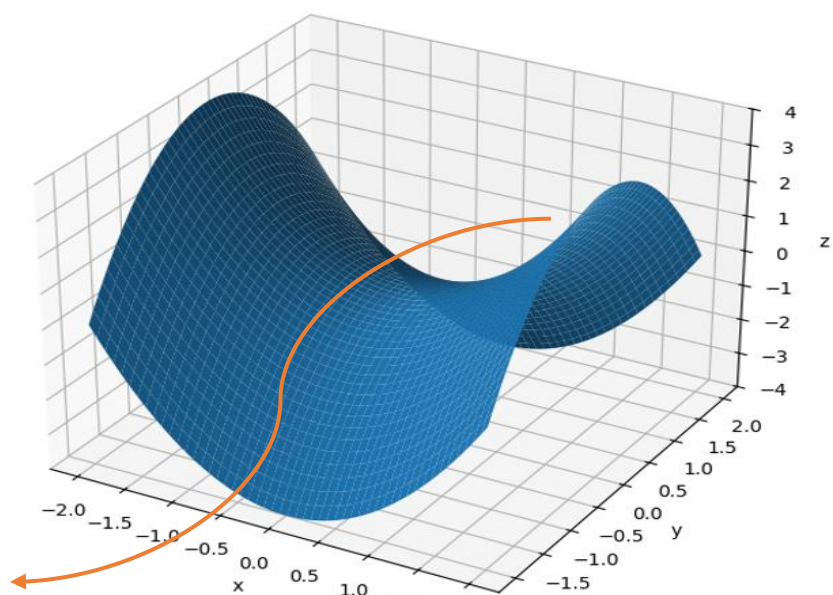
重クォークの場合、 $D(\kappa, z) = 2^{N_t+1} N_f \kappa^{N_t} (e^{z\Omega} + e^{-z\Omega^*}) + (\text{plaquette term})$ （ホッピングパラメータ展開の最低次の項）で近似する。

サドルポイント条件は、 $\frac{dD}{dz} = 2^{N_t+1} N_f \kappa^{N_t} (e^{z_0\Omega} - e^{-z_0\Omega^*}) = \rho$ となる。 ρ は実数なので、これを満たす $z_0 = \frac{\mu_{R0} + i\mu_{I0}}{T}$ は、 $\mu_{I0}/T = -\arg \Omega \equiv -\theta$ でなければならない。

このとき、 $D(\kappa, z_0)$ と $\frac{d^2D}{dz^2}(\kappa, z_0)$ も実数になるので、 Z_C の式中の複素位相は $e^{-in\mu_I/T}$ だけ、サドルポイント近傍を考える近似では、位相因子は $e^{in\theta}$ だけ。

最終的に、分配関数の密度微分の中で**位相は $\langle \cos(n\theta) \rangle_{|\Omega|}$ 固定になる**。これが符号問題を引き起こす。 $x_0 = \mu_{R0}/T$

$$-\frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z_C}{\partial \rho} = \frac{\int x_0 W(|\Omega|) e^F \langle \cos(n\theta) \rangle_{|\Omega|} d|\Omega|}{\int W(|\Omega|) e^F \langle \cos(n\theta) \rangle_{|\Omega|} d|\Omega|}$$



2. 符号問題と U(1)対称性

各配位で、複素平面での局所的なポリヤコフループの分布がZ(3)対称なら、空間平均をとったポリヤコフループ Ω はU(1)対称な確率分布になる。このとき、 Ω の絶対値は小さい。

一方、自発的に対称性が破れ、 Ω の絶対値が大きい配位は、 Ω はZ(3)対称な確率分布になる。

・外場をかけて位相因子の期待値を計算

位相の確率分布 $W(\theta)$ がU(1)対称なら、すべてのnで位相因子 $\langle \cos(n\theta) \rangle = \int \cos(n\theta) W(\theta) d\theta$ はゼロ。U(1)対称な場合は $W(\theta)$ =(定数)。完全にU(1)対称な確率分布で配位が生成されたときは、すべてのnで $Z_C(T, n) = 0$ 。 $\frac{\partial \ln Z_C}{\partial \rho}$ は 0/0 で不定。そこで、外場をかけて正則化する。

$$\langle \cos(n\theta) \rangle_\epsilon = \int \cos(n\theta) e^{\epsilon V \text{Re} \Omega} W(\theta) d\theta = \int \cos(n\theta) e^{\epsilon V |\Omega| \cos \theta} W(\theta) d\theta$$

微小な外場 $\epsilon V \text{Re} \Omega \approx \ln \det M$ はクォークが重い場合のクォーク行列式の対数に相当する。

$$\text{U(1)対称, } W(\theta) = 1/(2\pi) \text{ の場合、} \quad \langle \cos(n\theta) \rangle_\epsilon = \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} (\epsilon V |\Omega|)^n + \dots \neq 0$$

$\frac{\partial \ln Z_C}{\partial \rho}$ の式中の $\langle \cos(n\theta) \rangle_{|\Omega|}$ を $\frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} (\epsilon V |\Omega|)^n$ で置き換え、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとれば計算可能になる。

・2方向の外場をかけ、U(1)とZ(3)を区別する

外場を $\epsilon = |\epsilon| \exp(i\phi)$ とする。2方向に外場をかけ、ポリヤコフループの実部の期待値を計算する。ある領域で分布がU(1)対称であるとき、

$$\langle \text{Re} \Omega \rangle_{\phi=0} + \langle \text{Re} \Omega \rangle_{\phi=\pi} = 0$$

が成り立つ。一方、分布がZ(3)対称性しかもたない場合、この式は成り立たない。

$|\Omega|$ が小さい領域ではU(1)対称で、大きくなると対称性が破れることが予想されるので、期待値 $\langle \text{Re} \Omega \rangle$ を $|\Omega| < |\Omega|_{\text{Max}}$ の配位で計算する。

$|\Omega| < 0.01$ 程度までの配位は、生成確率の分布がU(1)対称であることがわかる。

・Z(3)対称な確率分布の場合の位相因子の期待値

Z(3)対称な確率分布関数は、

$$W(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{3n} \cos(3n\theta)$$

とフーリエ展開で表すことができる。展開係数は

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) W(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \langle \cos(k\theta) \rangle$$

c_0 以外すべてゼロの場合がU(1)対称な分布関数で、 c_{3n} は、 Z_C の計算に必要な $\langle \cos(3n\theta) \rangle$ そのものである。 n が大きくなるにつれて c_{3n} は小さくなり、符号問題で計算が難しくなる。また、 $\langle \cos(n\theta) \rangle$ はnが3の倍数以外ゼロになり、 $Z_C(T, n)$ もnが3の倍数以外ゼロになることが分かる。しかし、 $Z_C(T, n)$ は粒子数がnの状態が実現する確率を表す量で、非閉じ込め相ではnが3の倍数以外も $Z_C(T, n)$ はゼロにはならない。Z(3)対称な場合も、U(1)対称な場合と同様に、微小な外場を加えることが重要となる。

3. Z(3)対称な確率分布のときの位相の期待値

Z(3)対称な θ の確率分布 $W(\theta)$ の場合に、外場 ϵ を入れて、位相の期待値の近似式を導く。**位相を積分することで、符号の振動を消すことができる**。 $W(\theta) = W(-\theta)$ より、以下のkは0からスタート。

$$\begin{aligned} \langle \cos(n\theta) \rangle_\epsilon &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cos(n\theta) W(\theta) \exp(\epsilon \cos \theta) && W(\theta) \text{ のフーリエ展開と} \\ & && \exp(\epsilon \cos \theta) \text{ のテイラー展開} \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{\epsilon^l}{2^{l+1} m! (l-m)!} (e^{i(l-2m+k+n)\theta} + e^{i(l-2m+k-n)\theta}) c_k \\ &\theta \text{ 積分をする。各 } k \text{ について、} \epsilon \text{ のリーディングのみ残すと } \mathbf{l+k=n} \text{ より} \end{aligned}$$

$$\langle \cos(n\theta) \rangle_\epsilon = \frac{1}{N_0} \left(\frac{\epsilon^n}{2^n n!} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{n-k}}{2^{n-k+1} (n-k)!} c_k \right)$$

フーリエ係数 c_k
ヨコ軸は k

規格化因子は $N_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta W(\theta) \exp(\epsilon \cos \theta)$ であり、 $n=0$ で $\langle 1 \rangle = 1$ が成り立つ。

フーリエ展開の $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta W(\theta) e^{-ik\theta}$ に振動が残っている。近似式の項は、以下の条件をみtas。

- $W(\theta)$ が**Z(3)対称である** $\Rightarrow$ **kは0以上の3の倍数**

フーリエ係数は右上グラフのように、kが大きいと、0になってしまう。しかし、**分布がU(1)対称に近づく**と、**小さいkで近似できると考えられる**。右のグラフでは $|\Omega| < 0.01$ の領域で

$$\langle \cos \theta \rangle_\epsilon \approx \frac{1}{N_0} \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^3}{16} \right) c_0$$

を確かめた。誤差の範囲で近似式に合っている。

より一般に近似を使うために、**近似式のリーディング項を特定することが重要**。

4. W(θ)をモデル化した解析

データのみからリーディングを特定しようとする、フーリエ係数が振動する関数の積分であるため、難しい場合がある。そこで、Z(3)対称性をもち、パラメータによってはU(1)に近づくモデルとして

$$W(\theta) = C \exp \left(\frac{1}{9\sigma^2} \cos(3\theta) \right)$$

を調べる。 **σ が大きいほど、U(1)対称に近づく**。 σ^2 は一般に分散とは異なるが、対応関係はある。 σ^2 と θ 分散の関係を右上に示す。

右下は 各項を比較した結果で

$$\begin{aligned} \langle \cos 9\theta \rangle_\epsilon N_0 \\ \approx \frac{1}{2} c_9 + \frac{\epsilon^3}{96} c_6 + \frac{\epsilon^6}{92160} c_3 + \frac{\epsilon^9}{185794560} c_0 \end{aligned}$$

の各項のlogである。**k=0がリーディングである場合、元の $\langle \cos 9\theta \rangle_{\epsilon=0}$ より計算が簡単になる**。このような場合、符号問題を消せる。

θ 分散と外場 ϵ の値により、リーディングが決まる。

5. 有効ポテンシャル

位相を近似式で置きかえることにより、符号問題を取り除いて計算が可能になる。

・有効ポテンシャルUeffの定義

$$\text{カノニカル分配関数の密度微分は} \quad -\frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z_C}{\partial \rho} = \frac{\int x_0 \exp(-U_{eff}) d|\Omega|}{\int \exp(-U_{eff}) d|\Omega|}$$

とかける。有効ポテンシャルは以下で定義。

$$U_{eff} = -\ln W(|\Omega|) - F - \ln \langle \cos(n\theta) \rangle_{|\Omega|}$$

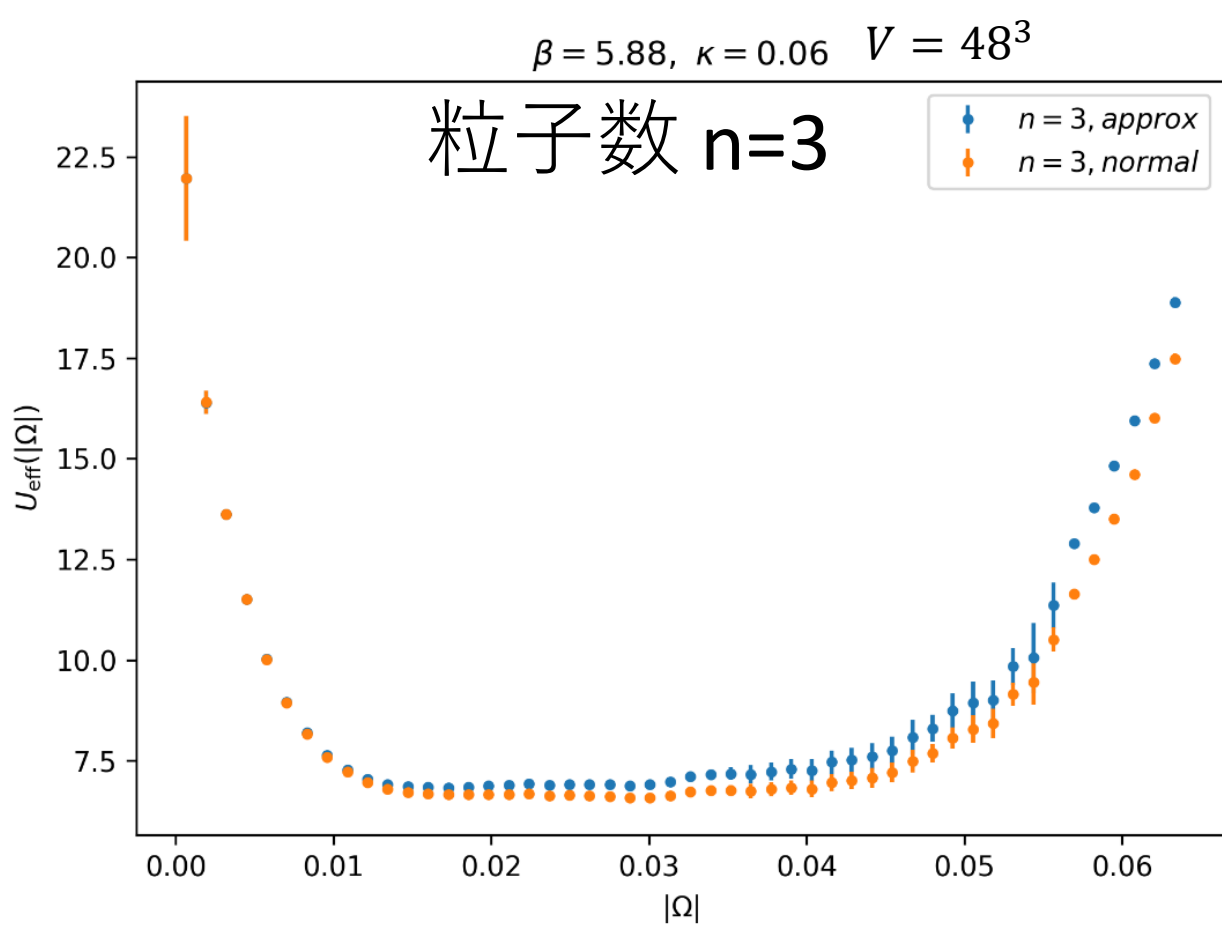
U(1)対称な領域においては **$\langle \cos(n\theta) \rangle_{|\Omega|}$ が近似式に置きかわる**。例えば、n=9では

$$U_{eff}(n=9) \approx -\ln W(|\Omega|) - F - \ln \left[\frac{\epsilon^9}{185794560} c_0 \right] + \ln N_0$$

これは、**外場 ϵ による正則化**といえる。 $\epsilon \rightarrow 0$ でポテンシャルは発散するが、分配関数に全く影響しない。計算手順を以下に示す。

- $|\Omega|$ を固定。データから θ 分散を計算し、対応関係からW(θ)モデルの σ に変換する。
- W(θ)モデルを使い、近似式のリーディング項を特定する（この段階でモデルを使うことで、符号問題なくリーディングがわかる）
- リーディング項を、実際のデータから計算しなおし、位相の近似式として使う。

通常の計算法と近似の比較
近似が通常の結果に矛盾しない



高密度で近似を使った結果
(ふつうは符号問題が起こる)

