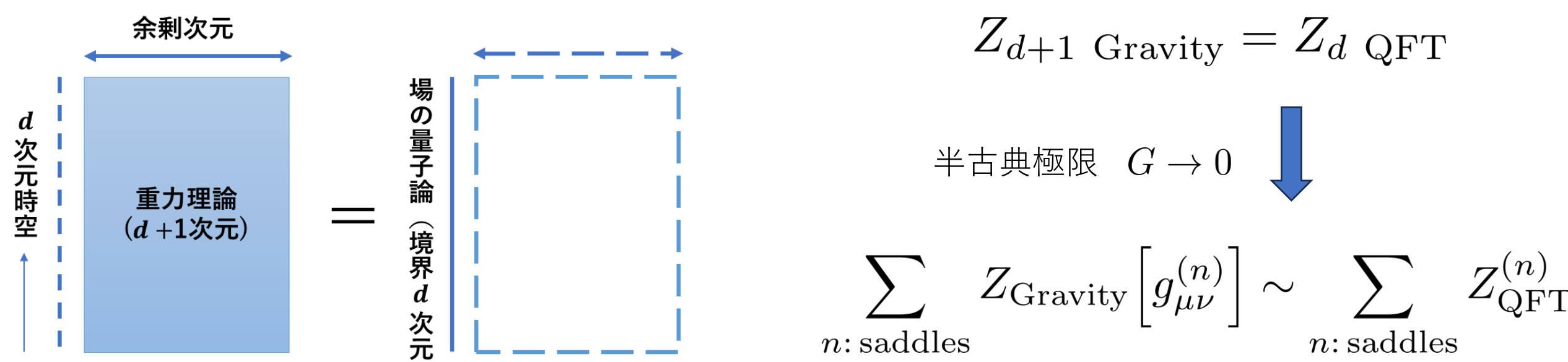


重力の経路積分にはどの鞍点が寄与するのか？

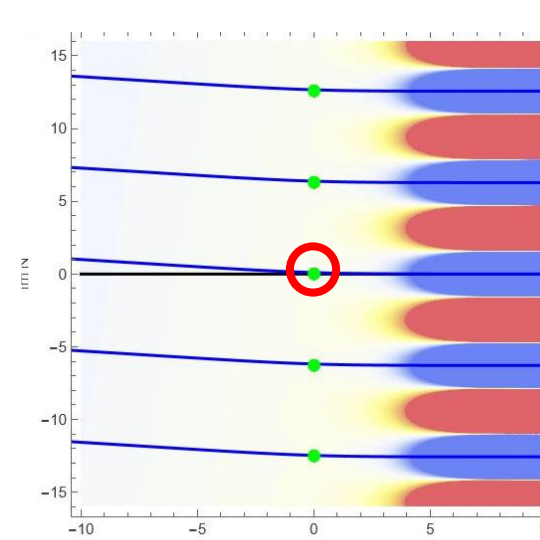
ホログラフィ対応



Stokes現象

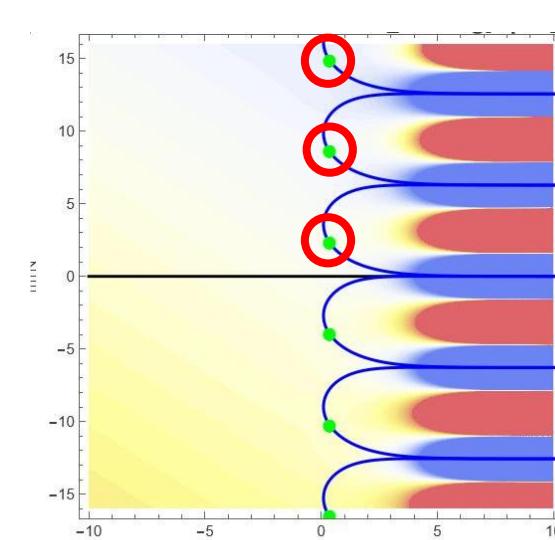
- パラメータを変化させると積分に寄与する鞍点の構造が不連続に変わることがある (e.g., Stirlingの公式)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z^z \int_{-\infty}^\infty e^{z(\phi - e^\phi)} d\phi = \int_{-\infty}^\infty dN e^{zN - e^N} \quad (\text{Re } z > 0)$$



Re $z > 0$

$$\Gamma(z) \sim e^z \log z - z$$

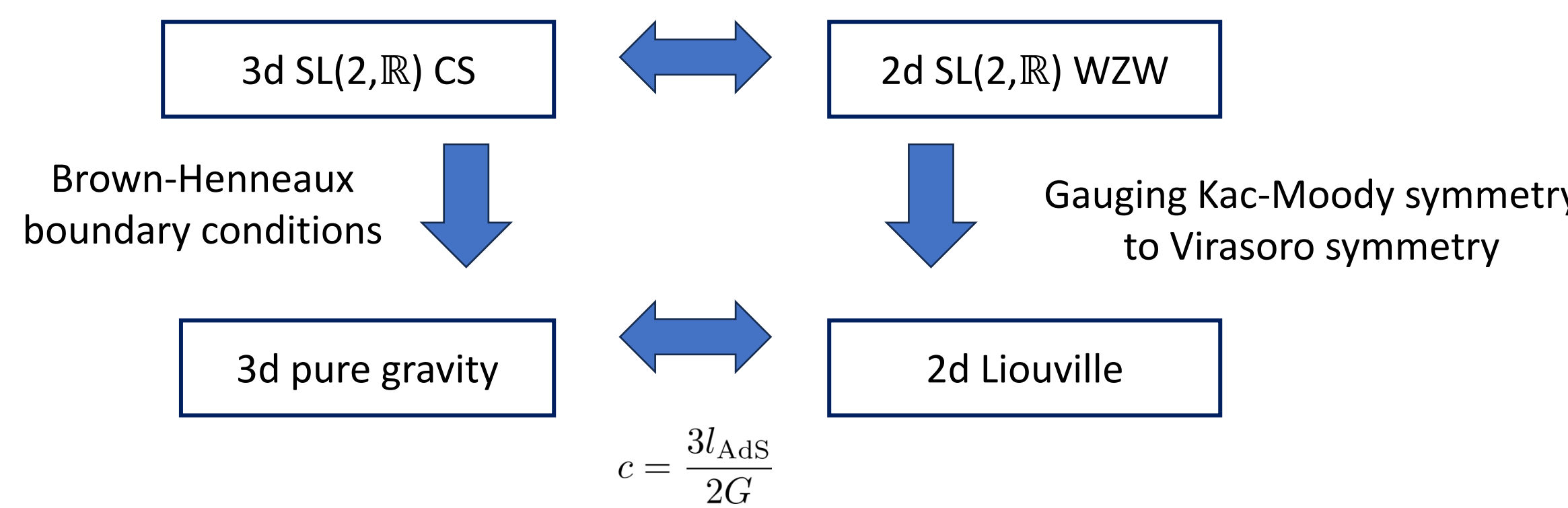


Re $z < 0$ (Im $z > 0$)

$$\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sum_{n=0}^\infty e^{2\pi i n z}$$

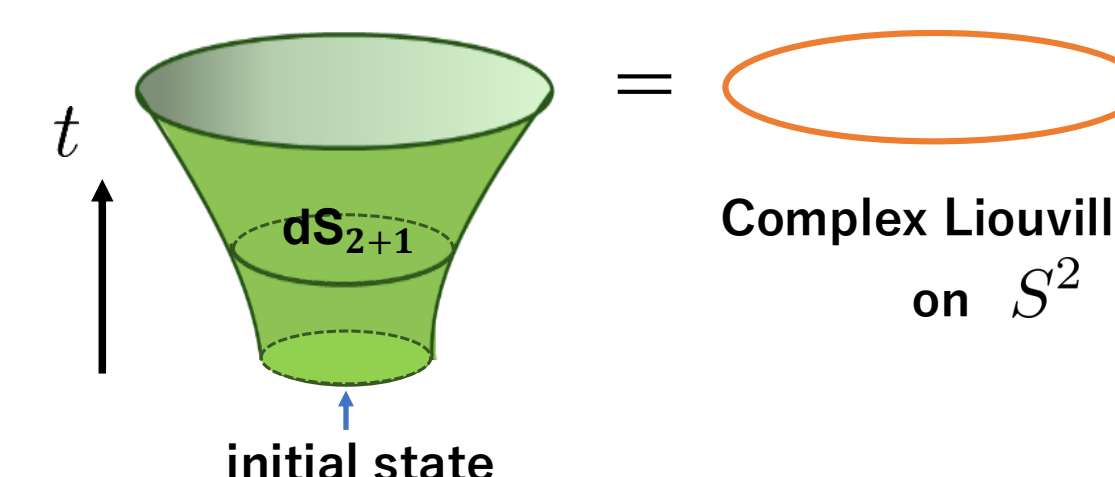
3次元重力のホログラフィ模型

- 物質のいないAdS3重力に双対な理論として2d Liouvilleが挙げられている



- 物質のいないdS3重力に双対な理論として、2d complex Liouvilleが提唱された：

$$c \rightarrow i c_{\text{dS}} \quad (l_{\text{AdS}} \rightarrow i l_{\text{dS}})$$



- 球対称な3次元量子重力の経路積分においてAdS3とdS3の間の解析接続に伴うStokes現象を**バルクと境界で独立に**調べた

バルク側：3d minisuperspace gravity

- B³上のEinstein-Hilbert作用

$$I_{\text{grav}} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int \sqrt{g} (R - 2\Lambda) + I_{\text{GH}} + I_{\text{ct}}$$

- 球対称セクターに限定 (= minisuperspace近似):

$$ds^2 = l_{(A)\text{dS}}^2 (N(\tau)^2 d\tau^2 + a(\tau)^2 d\Omega_2^2).$$

$$Z_{\text{AdS}} \text{ or } \Psi_{\text{dS}} = \int_{\mathcal{C}} dN \int \mathcal{D}a e^{-I[a;N] - I_{\text{ct}}}, \quad (\dot{N} = 0 \text{ のゲージ固定})$$

$$I[a;N] = -\frac{\ell_{(A)\text{dS}}}{2G} \int_0^1 d\tau N \left[\frac{1}{N^2} a'^2 \mp a^2 + 1 \right] \quad (a(0) = 0, \quad a(1) = a_1)$$

- $\dot{N} = 0$ のゲージ固定の下でdS3の波動関数の $a(\tau)$ は積分してしまえる。
 N の積分に対して、元の経路を実時間発展 ($\mathcal{C} = i\mathbb{R}_+$) にして鞍点解析をする：

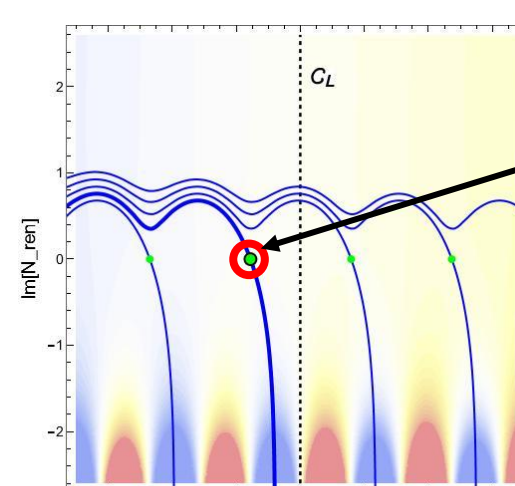
$$\Psi_{\text{dS}} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dN}{\sqrt{\sinh N}} e^{\frac{\ell_{\text{dS}}}{2G} (N + a_1^2 \coth N) - I_{\text{ct}}} \xrightarrow[N_{\text{ren}} := N - i \log(2a_1)]{a_1 \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}} dN_{\text{ren}} \exp \left[\left(\frac{l_{\text{dS}}}{2G} + \frac{i}{2} \right) N_{\text{ren}} - \frac{i l_{\text{dS}}}{4G} e^{2i N_{\text{ren}}} \right] \propto \left(\frac{i l_{\text{dS}}}{4G} \right)^{\left(\frac{i l_{\text{dS}}}{4G} - \frac{1}{4} \right)} \Gamma \left(\frac{1}{4} - \frac{i l_{\text{dS}}}{4G} \right)$$

- AdS3の分配関数は、dS3の波動関数の解析接続として決定できる

$$Z_{\text{AdS}} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dN}{\sqrt{\sinh N}} e^{\frac{\ell_{\text{AdS}}}{2G} (N + a_1^2 \coth N) - I_{\text{ct}}} \xrightarrow[N_{\text{ren}} := N - \log(2a_1)]{a_1 \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}} dN_{\text{ren}} \exp \left[\left(\frac{l_{\text{AdS}}}{2G} - \frac{1}{2} \right) N_{\text{ren}} + \frac{l_{\text{AdS}}}{4G} e^{-2N_{\text{ren}}} \right] \propto \left(\frac{-l_{\text{AdS}}}{4G} \right)^{\left(\frac{l_{\text{AdS}}}{4G} - \frac{1}{4} \right)} \Gamma \left(\frac{1}{4} - \frac{l_{\text{AdS}}}{4G} \right)$$

- バルク側で寄与する鞍点は以下ようになる：

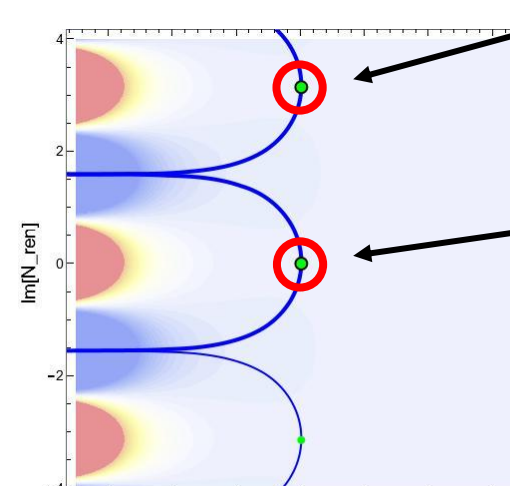
(i) dS case



Tunneling wavefunction
(NOT Hartle-Hawking)

$$\Psi_{\text{dS}} \sim e^{-\frac{\pi i l_{\text{dS}}}{4G} + \frac{i l_{\text{dS}}}{4G}}$$

(ii) AdS case



EAdS + Bang + Crunch

EAdS

$$Z_{\text{AdS}} \sim e^{\frac{l_{\text{AdS}}}{4G}} \sum_{n=0}^\infty e^{\frac{2\pi i n l_{\text{AdS}}}{4G}}$$

境界側：Liouville zeromode

- S²上のLiouville作用

$$S_L[\phi;g] = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} d^2x \sqrt{g} [(\nabla\phi)^2 + Q R_g \phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}], \quad Q = b + \frac{1}{b}.$$

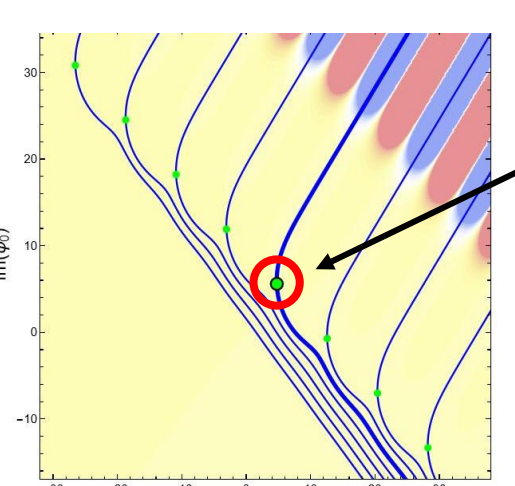
$$c = 1 + 6Q^2 = 1 + 6 \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \quad (\Rightarrow b^{-2} = \frac{c}{6} - \frac{13}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c}\right))$$

- ここでも、球対称セクター (= zero mode) に注目する：

$$Z_0 = \int_{\mathcal{C}} d\phi_0 \exp[-2Q\phi_0 - 4\pi\mu e^{2b\phi_0}] = \frac{(4\pi\mu)^{\frac{Q}{6}}}{2b} \Gamma\left(-\frac{Q}{b}\right) = \frac{(4\pi\mu)^{1+\frac{1}{6b}}}{2b} \Gamma\left(-1 - \frac{1}{b^2}\right)$$

- 境界側で寄与する鞍点は、以下ようになる：

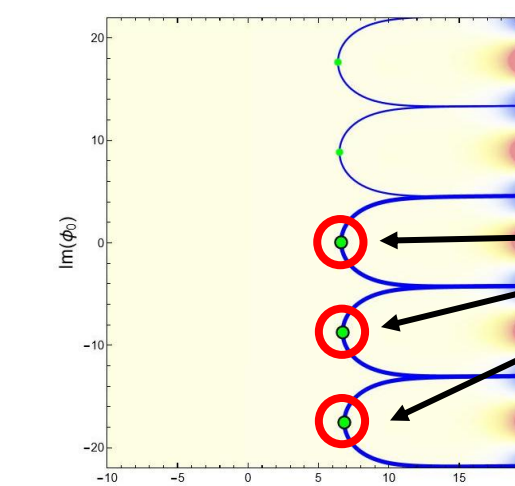
(i) $-1 - \frac{1}{b^2} \sim -\frac{ic_{\text{dS}}}{6} + \frac{7}{6}$ (dS case)



Only one saddle contributes.

$$Z_0^{\text{dS}} \sim e^{-\frac{\pi c_{\text{dS}}}{6} + \frac{i c_{\text{dS}}}{6}}$$

(ii) $-1 - \frac{1}{b^2} \sim -\frac{c}{6} + \frac{7}{6}$ (AdS case)



Infinitely many saddles contribute.

$$Z_0^{\text{AdS}} \sim e^{\frac{c}{6}} \sum_{n=0}^\infty e^{\frac{2\pi i n c}{6}}$$

- 鞍点近似は、 $c = \frac{3l_{\text{AdS}}}{2G}$ の下でバルク側とピッタリと合う！！

Summary & Discussion

- 球対称な3次元量子重力の経路積分において、
dS3: トンネリング鞍点 AdS3: EAdSを含む無限個の鞍点
が寄与することを、バルクと境界のそれぞれの経路積分から独立に示した！
- 特に、バルクと境界の経路積分がどちらもガンマ関数で表現できた
- AdS/CFTとdS/CFTの間の解析接続とStokes現象を明示的に確認できた

Discussion: 全セクターの鞍点？

- 我々の結果は、dS4のminisuperspace経路積分でトンネリング鞍点のみが寄与するという結果 [4] と一貫している
- dS3に双対なLiouvilleの完全な経路積分の鞍点はトンネリング鞍点だけでなくHartle-Hawking鞍点に相当する寄与もあると指摘されている [5]
- これらから、minisuperspace近似はトンネリング鞍点の寄与しかとらえられておらず、Hartle-Hawking鞍点の寄与をとらえるには完全な3次元重力の経路積分が必要であることが示唆される

References

- [1] G. 't Hooft, Dimensional reduction in quantum gravity, Conf. Proc. C 930308 (1993) 284 [gr-qc/9310026]; L. Susskind, The World as a hologram, J. Math. Phys. 36 (1995) 6377 [hep-th/9409089].
- [2] J. M. Maldacena, The Large N limit of superconformal field theories and supergravity, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231 [hep-th/9711200].
- [3] D. Harlow, J. Maltz, and E. Witten, "Analytic Continuation of Liouville Theory," JHEP 12 (2011) 071, arXiv:1108.4417 [hep-th].
- [4] M. Honda, H. Matsui, K. Okabayashi, and T. Terada, "Resurgence in Lorentzian quantum cosmology: No-boundary saddles and resummation of quantum gravity corrections around tunneling saddle points," Phys. Rev. D 110, no. 8 (2024) 083508, arXiv:2402.09981 [gr-qc].
- [5] H.-Y. Chen, Y. Hikida, Y. Taki, and T. Uetoko, "Semiclassical saddles of three-dimensional gravity via holography," Phys. Rev. D 110, no. 2 (2024) 026018, arXiv:2403.02108 [hep-th].