

量子計量と非線形Hall効果による光の重力レンズへの補正

秋葉 桂大、山本 直希（慶應義塾大学）

概要

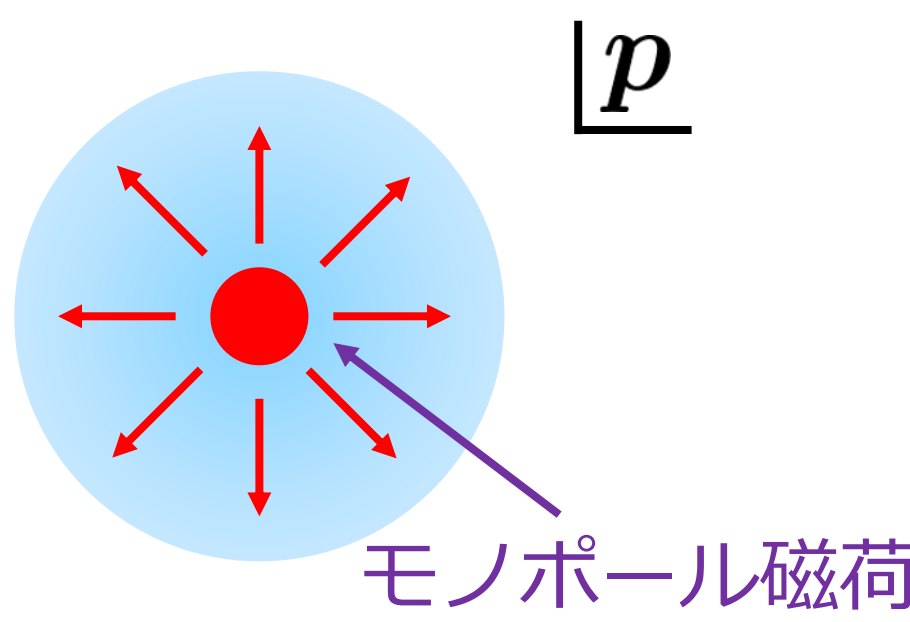
ヘリシティ（偏光）の自由度を考慮すると、フォトンのHamilton方程式はBerry曲率による補正を受けることが知られている。本発表では、この方程式が運動量空間における量子状態同士の“距離”を与える計量である**量子計量**によっても補正されることを説明する。さらに、応用として曲がった時空における**光の重力レンズ**を考える。量子計量を考慮したHamilton方程式を用いることによって、重力場に対して非線形な応答を示す**非線形Hall効果**による補正項が現れることについて議論する。本発表は主に[1]の内容に基づく。

フォトンの量子幾何

Berry曲率 [2]

- ハミルトニアン： $H = \pm c \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}$
($\mathbf{S}$: スピン1の表現行列, $\pm$: ヘリシティ)
- Berry接続： $\mathbf{a}_p = i \langle u_p | \nabla_p | u_p \rangle$ ($|u_p\rangle$: エネルギー固有状態)
- Berry曲率： $\Omega_p = \nabla_p \times \mathbf{a}_p = \pm \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^3}$

➡ $\mathbf{p}$ 空間におけるモノポール磁場



量子計量

量子計量 g_{ij} : $\mathbf{p}$ 空間で量子状態同士の“距離”を与える [3]

$$ds^2 = 1 - |\langle u_p | u_{p+d\mathbf{p}} \rangle|^2 = g_{ij} dp_i dp_j$$

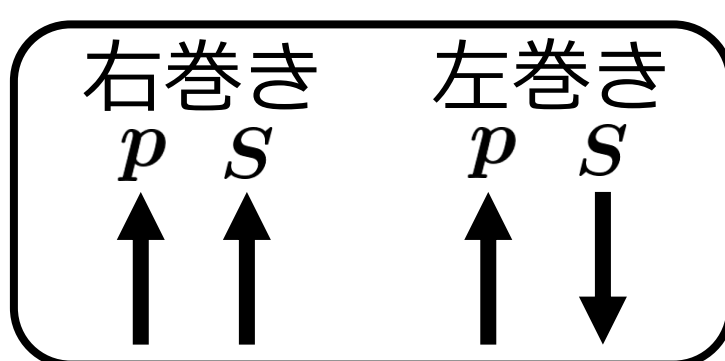
フォトンの場合 [1]

(エネルギーで規格化した) 量子計量:

$$G_{ij} = \frac{1}{c|\mathbf{p}|^3} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|^2} \right)$$

➡ $\mathbf{p}$ に垂直

➡ $\mathbf{p}$ の向きで指定されるフォトンの量子状態の変化を記述



量子幾何補正を含むHamilton方程式 [1]

右巻きフォトンの経路積分の遷移振幅:

$$\int \mathcal{D}\mathbf{x} \mathcal{D}\mathbf{p} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - c \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) \right]$$

作用積分を
 $O(\hbar^2)$ まで対角化

右巻きフォトンの作用積分:

$$I = \int dt \left[\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \varepsilon_p - \hbar \mathbf{a}_p \cdot \dot{\mathbf{p}} - \frac{1}{2} \hbar^2 \dot{p}_i \dot{p}_j G_{ij} \right] \quad (\varepsilon_p = c|\mathbf{p}|)$$

Berry曲率の補正 量子計量の補正

Hamilton方程式:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \nabla_{p_i} \varepsilon_p + \hbar \epsilon_{ijk} \dot{p}_j \Omega_k - \hbar^2 (\dot{p}_j \dot{p}_k \Gamma_{jki} + \ddot{p}_j G_{ij}) \\ \dot{p}_i = -\nabla_{x_i} \varepsilon_p \end{cases}$$

量子計量に関するChristoffel記号: $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (\partial_i^p G_{jk} + \partial_j^p G_{ki} - \partial_k^p G_{ij})$

曲がった時空における光の重力レンズ

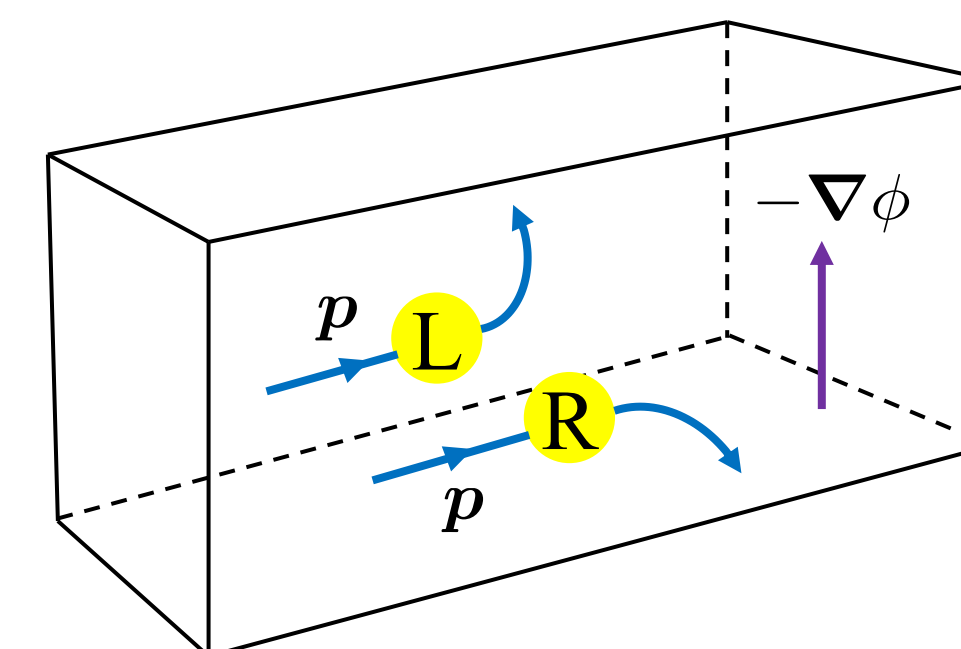
- 弱重力ポテンシャル ϕ 中の光の座標速度: $c' \approx c \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right)$
- 空間の“屈折率”: $n = \frac{c}{c'} \approx 1 - \frac{2\phi}{c^2}$

Berry曲率の補正: スピンHall効果 [4]

- Berry曲率の補正を含むHamilton方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{c}{n} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} - \hbar \frac{2\lambda}{c} \nabla \phi \times \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2}$$

ヘリシティに依存したHall効果



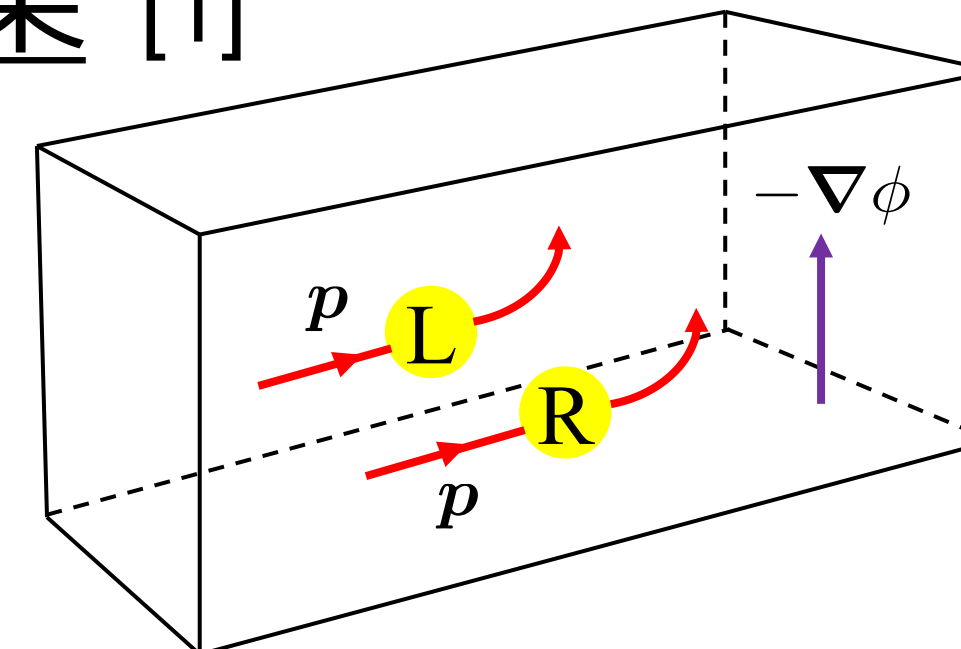
量子計量の補正: 非線形Hall効果 [1]

- 量子計量の補正を含むHamilton方程式

$$\dot{x}_k = \frac{c}{n} \frac{p_k}{|\mathbf{p}|} - \hbar \frac{2\lambda}{c} \left(\nabla \phi \times \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2} \right)_k$$

$$- \hbar^2 \left(\frac{2}{c} \right)^2 (\nabla_i \phi) (\nabla_j \phi) \{ |\mathbf{p}|^2 \Gamma_{ijk} + p_i G_{jk} \}$$

ヘリシティに依存しない非線形応答 $\propto p_k, -\nabla_k \phi$



- オーダー評価

質量 M のSchwarzschild BHの作るポテンシャル: $\phi = -\frac{GM}{r}$

$\mathcal{M}^{(n)}$: $O(\hbar^n)$ の項の典型的な大きさ

$$\frac{\mathcal{M}^{(2)}}{\mathcal{M}^{(0)}} \sim \frac{n^2}{4\pi^2} \left(\frac{R_s}{r} \right)^4 \left(\frac{l}{R_s} \right)^2 \quad (l: \text{波長}, R_s: \text{Schwarzschild半径})$$

$$\downarrow R_s \sim 3 \text{ km}, l \sim 300 \text{ m}, r \sim 5 R_s$$

$$\sim 10^{-7}$$

光学系での応用 [1]

- 媒質中の光の速度: $v(\mathbf{x}) = \frac{c}{n(\mathbf{x})}$ ($n(\mathbf{x})$: 屈折率)

- $O(\hbar^2)$ の項の寄与:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{2v|\mathbf{p}|^2} \left[\left\{ (\nabla v)^2 + 3 \left(\nabla v \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right)^2 \right\} \hat{\mathbf{p}} - 4 \left(\nabla v \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right) \nabla v \right]$$

- 量子計量の補正による光の軌道のずれ:

$$\delta x^{(2)} \sim D \left(\frac{l}{2\pi L_n} \right)^2 \quad (D: \text{光が伝搬する距離}, L_n = |\nabla \ln n|^{-1})$$

$$\downarrow l \sim 10 \mu\text{m}, D \sim 100 \mu\text{m}, L_n \sim 2 \text{ mm}$$

$$\sim 6 \times 10^{-2} \text{ nm}$$

➡ 光学実験で検出が期待

結論

- フォトンのHamilton方程式に対する**量子計量**の補正
- 量子計量を考慮したHamilton方程式の重力レンズへの応用 ➡ **非線形Hall効果**の補正

参考文献

- [1] K. Akiba and N. Yamamoto, “Quantum Metric and Nonlinear Hall Effect of Photons,” [arXiv:2604.27751 [hep-th]].
- [2] M. Onoda, S. Murakami, and N. Nagaosa, Phys. Rev. Lett. **93**, 083901 (2004).
- [3] J. P. Provost and G. Vallee, Commun. Math. Phys. **76**, 289-301 (1980).
- [4] N. Yamamoto, Phys. Rev. D **98**, 061701 (2018).