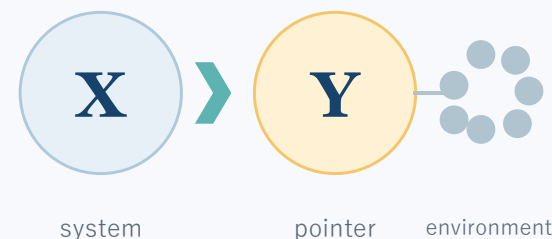


量子実時間発展の数値計算で 探る観測問題



系 + フォンノイマン型測定装置 + Caldeira-
Leggett環境を「丸ごと」実時間発展

西村 淳 (KEK、総研大)

Tin-Long Chau(KEK、総研大) と
山森直幸(KEK→ 9月～国立台湾大NTU)との共同研究に基づく

観測問題を「全体系の実時間発展」から見る

- 通常のコペンハーゲン解釈では、時間発展はユニタリだが、測定では波束の収縮（非ユニタリ発展）を仮定する。
- そこで我々は、「対象系 X + 測定装置 Y + 環境 E 」を一つの量子系として扱い、全自由度をユニタリ実時間発展させる。
- 問い：波束の収縮という現象は、どのように再現・理解されるのか。収縮後の状態は、通常のコペンハーゲン解釈と同じなのか？

**目標：波束の収縮とコペンハーゲン解釈を超える情報を、
第一原理ダイナミクスから抽出・理解する**

モデル：測定対象 X ・ポインタ Y ・巨大な環境 E



original Hamiltonian :

$$H = \frac{P_X^2}{2m_X} + \frac{1}{2}m_X\omega_X^2 X^2 + \frac{P_Y^2}{2m_Y} + \frac{1}{2}m_Y\Omega_Y^2 Y^2 + c_{vN}XP_Y \\ + \sum_{k=1}^{N_E} \left[\frac{p_k^2}{2m_E} + \frac{1}{2}m_E\omega_k^2 q_k^2 - c_E q_k Y \right].$$

completing the squares :

$$H = \frac{P_X^2}{2m_X} + \frac{1}{2}m_X\omega_X^2 X^2 + \frac{P_Y^2}{2m_Y} + \frac{1}{2}m_Y\omega_Y^2 Y^2 + c_{vN}XP_Y \\ + \sum_{k=1}^{N_E} \left[\frac{p_k^2}{2m_E} + \frac{1}{2}m_E\omega_k^2 \left(q_k - \frac{c_E}{m_E\omega_k^2} Y \right)^2 \right].$$

renormalized frequency :

$$\omega_Y^2 \equiv \Omega_Y^2 - \frac{1}{m_Y} \sum_{k=1}^{N_E} \frac{c_E^2}{m_E\omega_k^2}.$$

理想的な測定を可能にするrescaling

Lagrangian:
$$L = \frac{1}{2}m_X\dot{X}^2 - \frac{1}{2}m_X\omega_X^2X^2 + \frac{1}{2}m_Y(\dot{Y} - c_{\text{vn}}X)^2 - \frac{1}{2}m_Y\omega_Y^2Y^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_E} \left[\frac{1}{2}m_E\dot{q}_k^2 - \frac{1}{2}m_E\omega_k^2 \left(q_k - \frac{c_E}{m_E\omega_k^2}Y \right)^2 \right].$$

rescaling:
$$m_X \mapsto \frac{m_X}{\epsilon}, \quad m_Y \mapsto \frac{m_Y}{\epsilon}, \quad m_E \mapsto \frac{m_E}{\epsilon},$$

$$\omega_X \mapsto \omega_X, \quad \omega_Y \mapsto \omega_Y, \quad \omega_k \mapsto \omega_k,$$

$$c_{\text{vn}} \mapsto c_{\text{vn}}, \quad c_E \mapsto \frac{c_E}{\epsilon}.$$

パラメータ設定: $m_X = 1.0, \quad m_Y = 1.0, \quad m_E = 1.0,$ 環境との相互作用

$$\omega_X = 1.0, \quad \omega_Y = 1.0, \quad \omega_{\text{cut}} = 16,$$

$$c_{\text{vn}} = 1.0, \quad \gamma = 0.1, \quad T = 20.0,$$

$$N_E = 2^{17}$$

$$c^2 \sim \frac{4\omega_{\text{cut}}^3}{3\pi N_E} \gamma$$

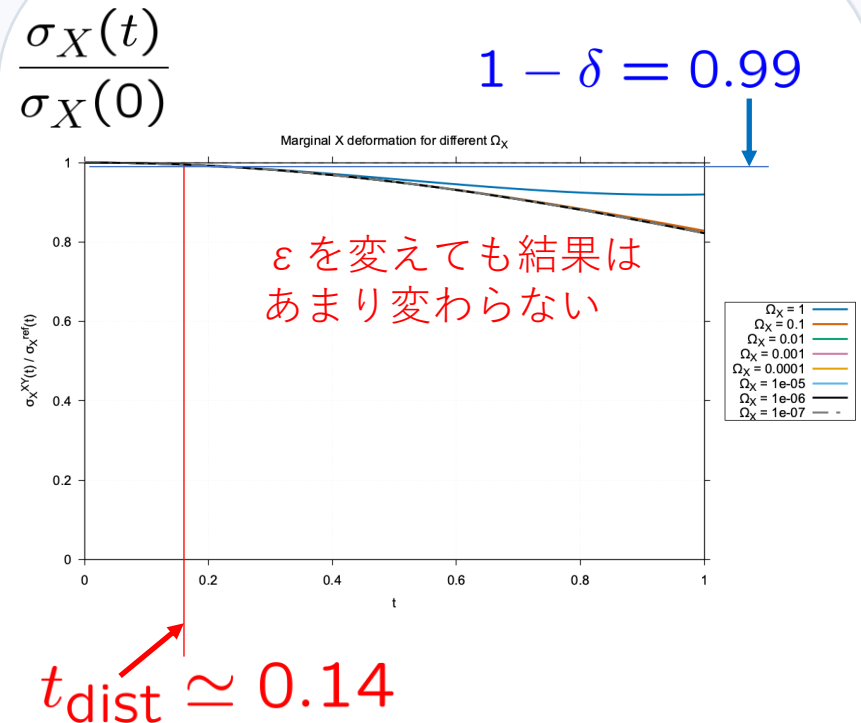
対象系の初期状態(t=0)をガウス波束にとる $\sigma_X(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathcal{O}(\epsilon^0)$

ϵ を導入したrescalingにより、初期ガウス幅を保ったまま“量子ゆらぎ”を制御

測定は、測定対象を乱さない範囲内で行う

- X の確率分布が、フォンノイマン結合によって大きく変化する前に測定を終了する。
- この最大測定時間 t_{dist} は、量子効果制御パラメタ ε にほとんど依らない。

理想的な測定
 相関を作る必要があるが、
 対象系を壊してはいけない

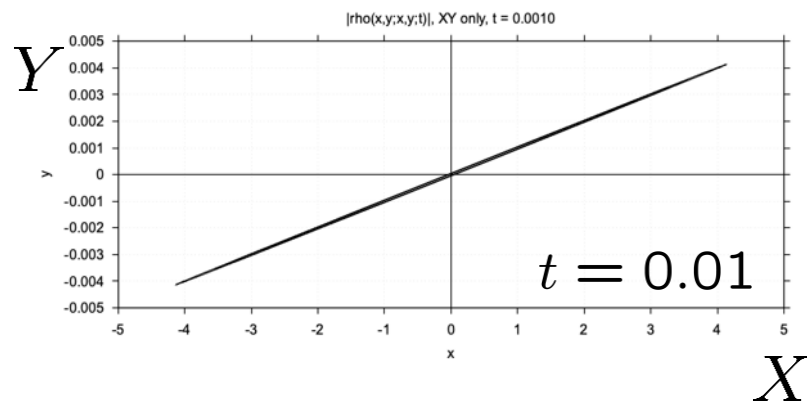
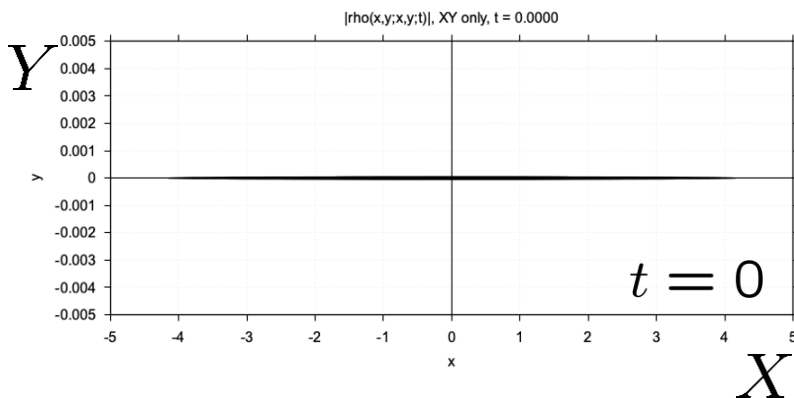


(ここでは環境は導入していない)

X の分布 : Y と結合した場合／しない場合の比較

測定相関の形成： XとY の間の量子もつれ

$$|\rho(X, Y; X, Y; t)| \quad \epsilon = 10^{-10}$$



時間が経過するにつれ、YがXの値に応じて変化していく

XとYの間に強い相関（量子もつれ）が形成される

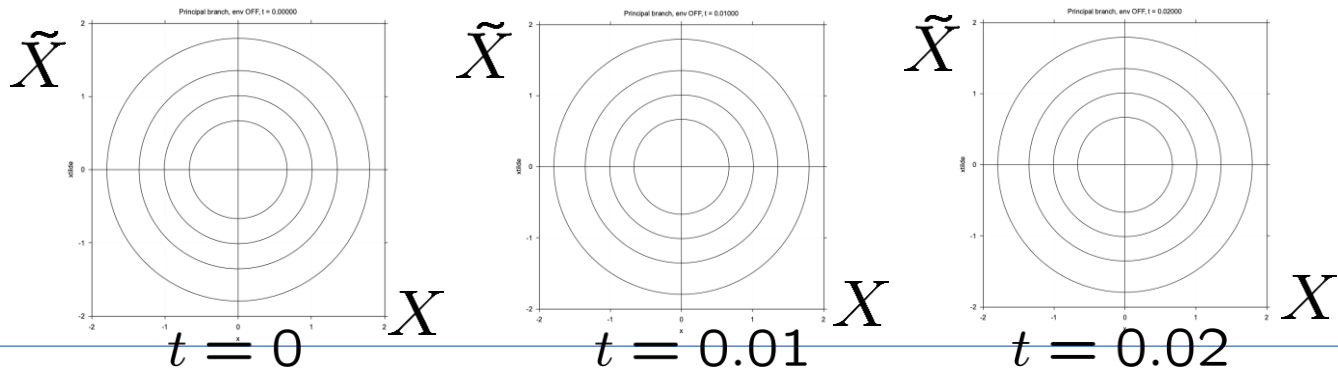
$$Y = f(X; t)$$

pointer Y の値から、X の値が読み出せるようになる

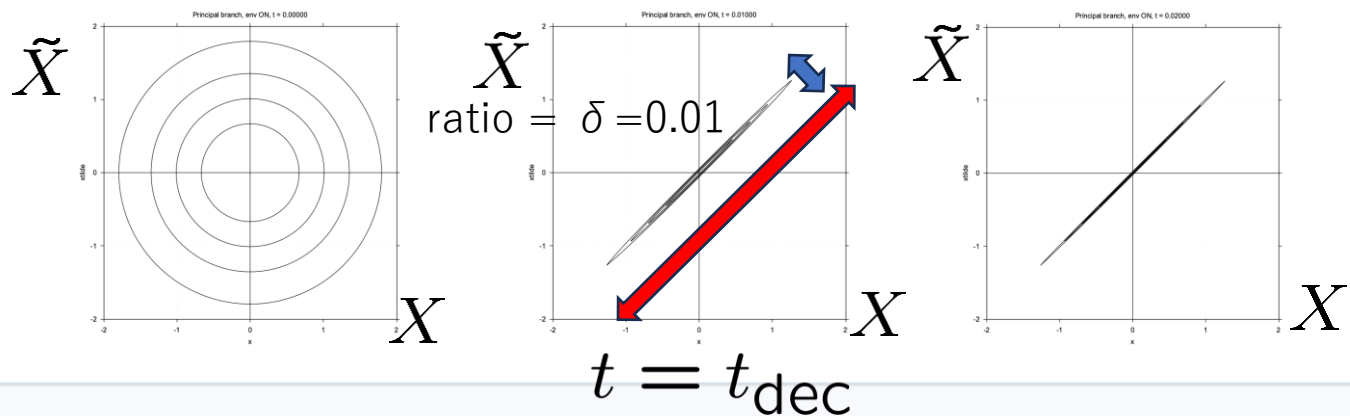
環境の役割：量子干渉を消し、確率的な分岐を引き起こす

$$|\rho(X, f(X; t); \tilde{X}, f(\tilde{X}; t); t)| \quad \epsilon = 10^{-10}$$

環境無し



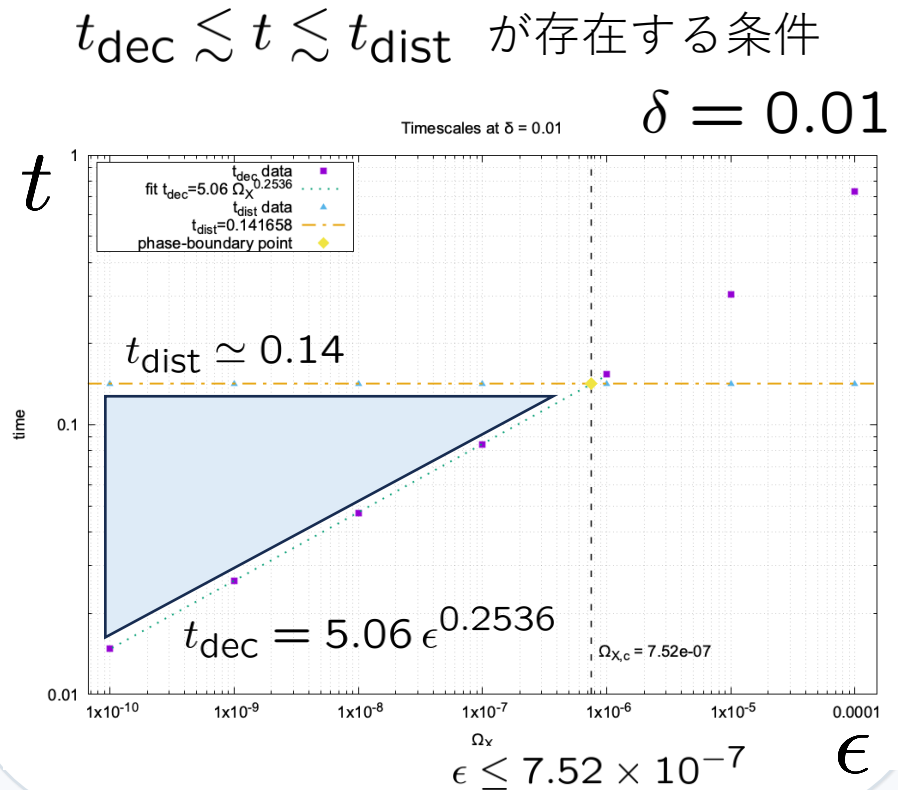
環境有り
 $\gamma = 0.1$



非対角方向と対角方向の幅の比が $\delta = 0.01$ となる時間を t_{dec} とする。
デコヒーレンスに最低必要な時間。

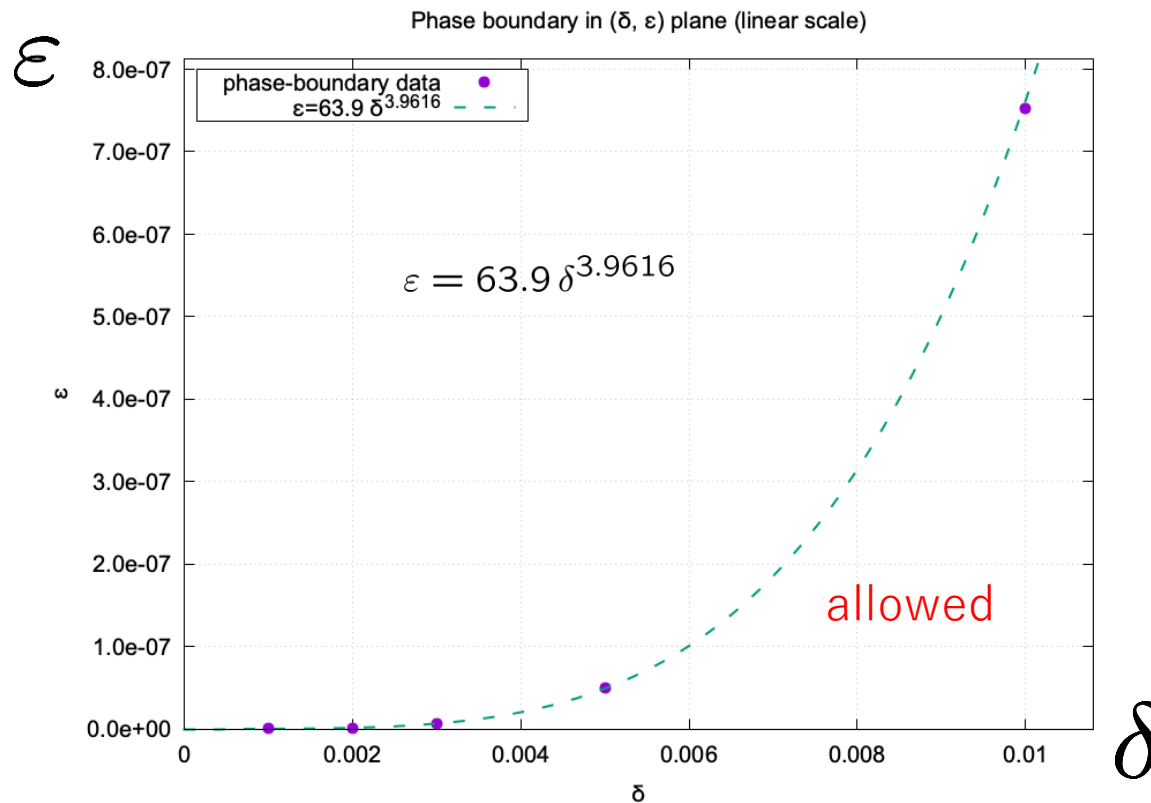
測定ができる時間領域

- 短すぎる：環境によるデコヒーレンスが不十分。
- 長すぎる：測定により、 X の確率分布が変わる。
- その間に時間領域が存在するための ϵ に対する条件



量子ゆらぎ制御パラメータ ϵ を十分小さくとる必要がある

完全に理想的な測定には古典極限が必要



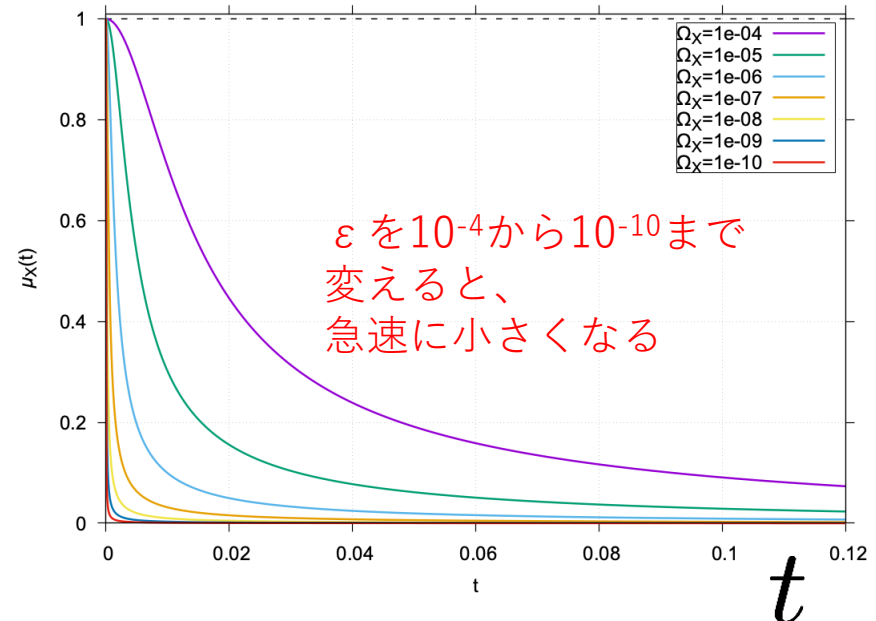
有限な ε では、完全に理想的な測定はできない

測定装置との量子もつれにより、混合状態へ

purity: $\mu \equiv \text{Tr}[\hat{\rho}^2]$ $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 : \text{pure state,} \\ \mu < 1 : \text{mixed state.} \end{array} \right.$

$$\rho_X(x, \tilde{x}; t) = \int dy \rho_{XY}(x, y; \tilde{x}, y; t)$$

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \text{Tr}_X[\hat{\rho}_X^2(t)] \\ &= \int dx d\tilde{x} |\rho_X(x, \tilde{x}; t)|^2 \end{aligned}$$



purityは急速に小さくなり、純粋状態から混合状態へ。

測定装置の読み取りにより、混合状態から純粋状態へ

時刻 t に測定値 Y_0 を得たとする。

$$\rho_X(x, \tilde{x}; t) \rightarrow \rho_{X|Y=Y_0}(x, \tilde{x}; t)$$

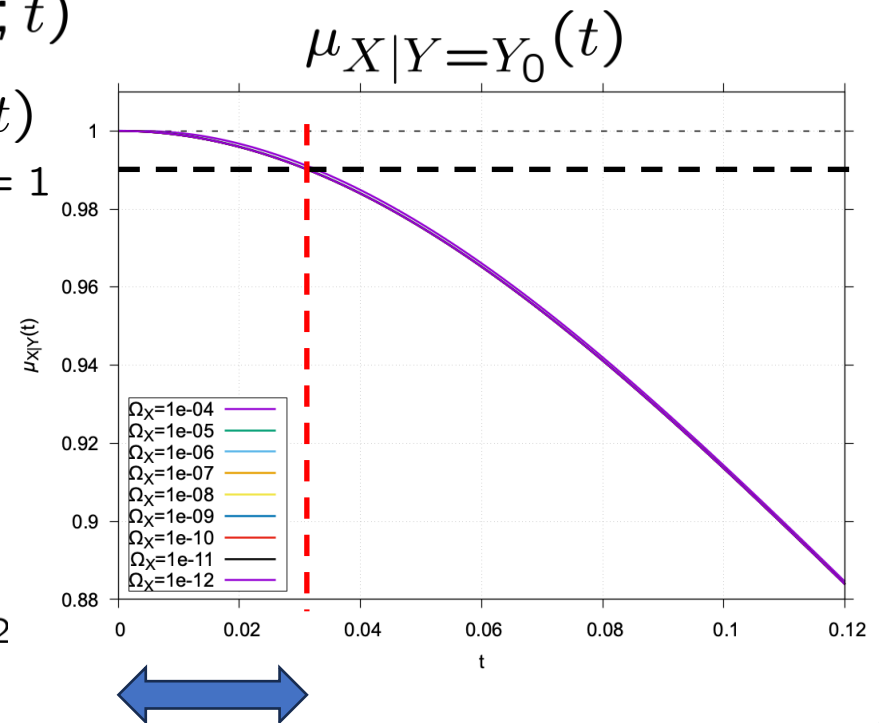
$$Y_0(t) = f(X_0; t)$$

Below we use $X_0 = 1$

conditional density matrix:

$$\rho_{X|Y=Y_0}(x, \tilde{x}; t) = \frac{\rho_{XY}(x, Y_0; \tilde{x}, Y_0; t)}{\int dx' \rho_{XY}(x', Y_0; x', Y_0; t)}$$

$$\begin{aligned} \mu_{X|Y=y_0}(t) &= \text{Tr}_X [\hat{\rho}_{X|Y=Y_0}^2(t)] \\ &= \int dx d\tilde{x} |\rho_{X|Y=Y_0}(x, \tilde{x}; t)|^2 \end{aligned}$$



この間に測定を終えた場合は、ほぼ純粋状態に遷移

測定終了後の波動関数の抽出

conditional state : $\rho(x, \tilde{x}; t) \equiv \rho_{XY}(x, Y_0; \tilde{x}, Y_0; t)$

almost pure state for $t < 0.03$

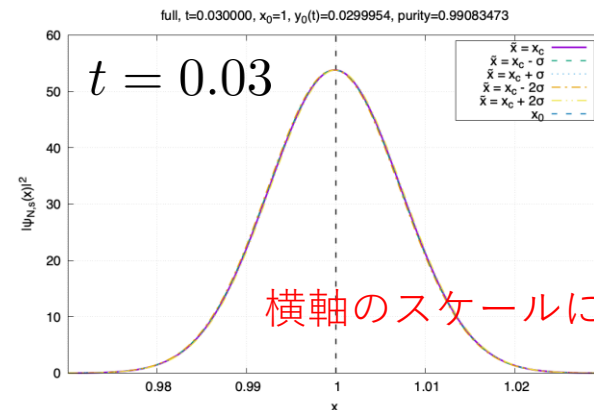
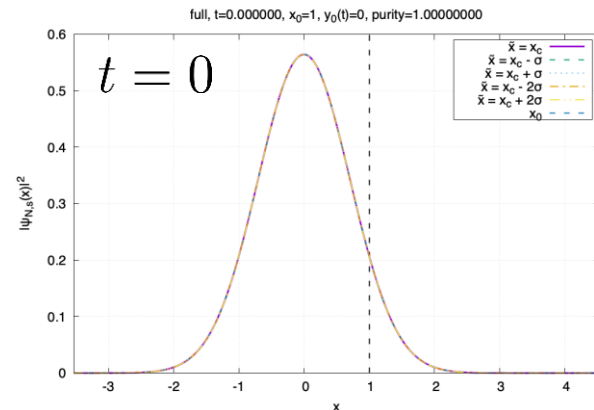
$$\rho(x, \tilde{x}; t) \simeq \psi(x; t) \psi^*(\tilde{x}; t)$$

$$\frac{\psi(x; t)}{\psi(0; t)} \simeq \frac{\rho(x, \tilde{x}; t)}{\rho(0, \tilde{x}; t)} \quad \text{indep. of } \tilde{x}$$



In what follows, we define :

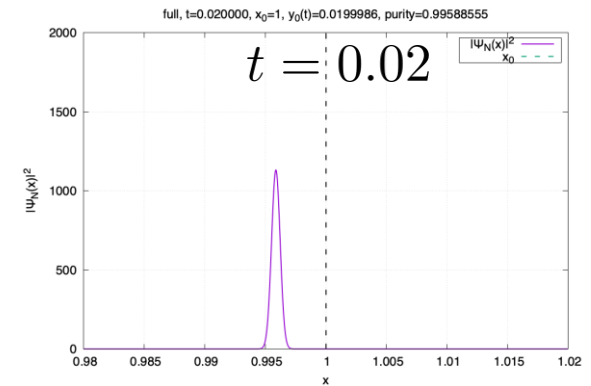
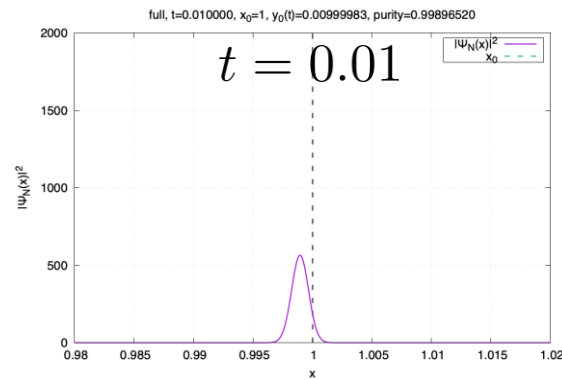
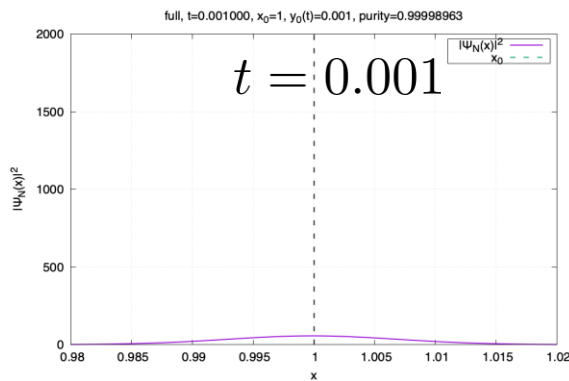
$$\psi(x; t) \propto \int d\tilde{x} \frac{\rho(x, \tilde{x}; t)}{\rho(0, \tilde{x}; t)} \rho(\tilde{x}, \tilde{x}; t)$$



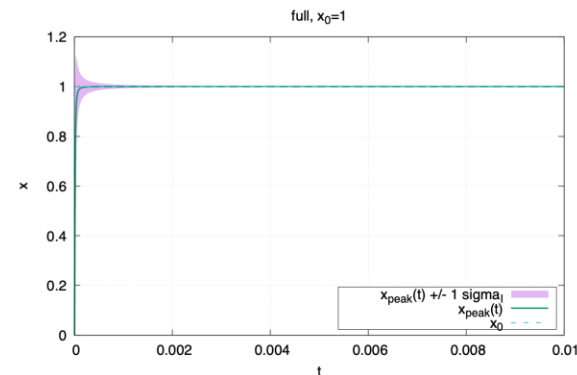
測定後の波束の局在化：確率分布が鋭くなる

$$\varepsilon = 10^{-10}$$

$$t_{\text{dec}} \simeq 0.01$$

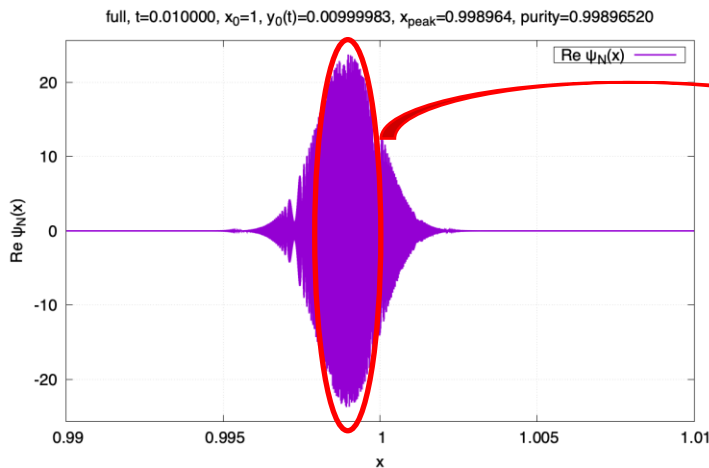


波束の中心と幅の時間依存性

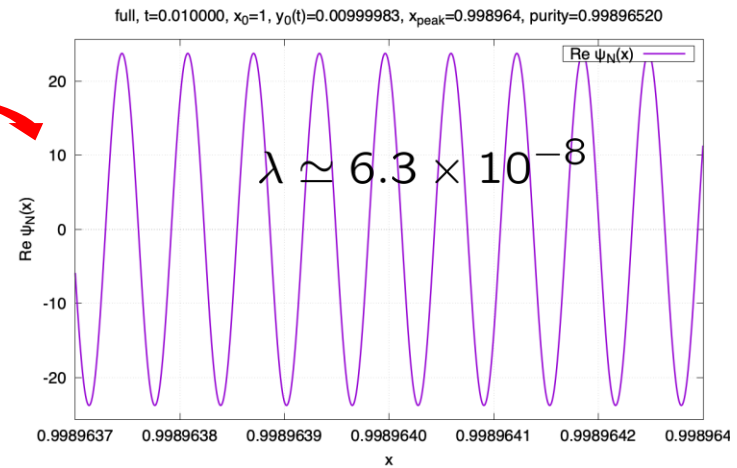


まず位置 x_0 への局在が起こる。しかし、実は運動量をもっている。（次頁）

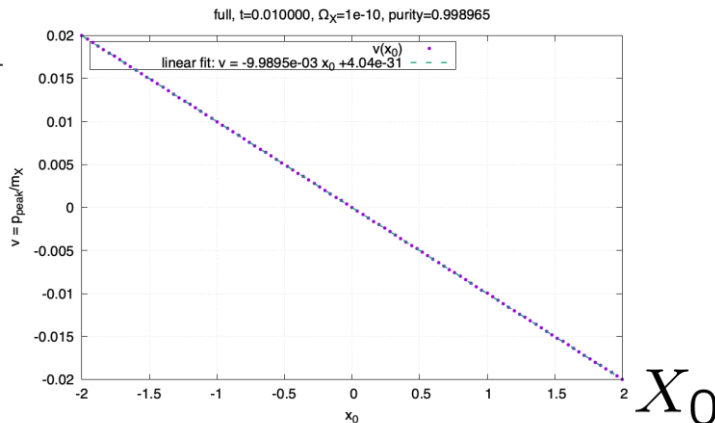
収縮後の状態には、観測値と 관련된 有限の運動量が残る

 $\text{Re } \psi(x, t)$ 

$$\varepsilon = 10^{-10}, \quad X_0 = 1.0, \quad t = 0.01$$



$$v = \frac{p}{m_X}$$



$$|p| = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \simeq \frac{2\pi}{6.3 \times 10^{-8}} = 10^8$$

$$v = \frac{p}{m_X} \sim \frac{-10^8}{10^{10}} = -0.01$$

$$F = -m_X \omega_X^2 X_0$$

$$v \simeq \frac{F}{m_X} t = -\omega_X^2 X_0 t (= -X_0 t)$$

$$\begin{matrix} X_0 = 1.0 \\ t = 0.01 \end{matrix}$$

コペンハーゲン解釈を越えた測定後の状態の詳細

射影測定（コペンハーゲンの記述）

位置 X を測定して $X=X_0$ を得る

$$|\psi\rangle \rightarrow |X_0\rangle$$

測定を公理として導入し、測定後、
状態を位置固有状態へ射影

第一原理ダイナミクスに基づく測定

X_0 に局在した波束

+

X_0 と関連した有限の運動量

$$\langle P_x \rangle \simeq -m_x \omega_x^2 X_0 t$$

測定後状態には、観測値 X_0 だけでなく
そこに至るまでの力学的履歴が残る。

- 初期状態に運動量 P_{init} を入れることも可能。
 $\langle P_x \rangle \simeq P_{init} - m_x \omega_x^2 X_0 t$ と予想。

微視的な測定過程には、コペンハーゲン解釈ではとらえられない情報が存在する。

まとめ：観測問題を“計算できる問題”にする

- フォンノイマン型測定装置と Caldeira–Leggett 環境を含む全体系の量子実時間発展を、巨大な環境・長時間まで数値的に追跡できる方法を構築した。
- 測定相関の形成 → デコヒーレンス → 測定後の波束の局在化を、同じ microscopic model の中で統一的に記述した。
- ハイライト：収縮後の状態は X_0 に局在するだけでなく、 X_0 と相関した有限の運動量を持つ。 ε が小さいので、不確定性原理には抵触しない。
- $\varepsilon \rightarrow 0$ では $\langle P_x \rangle \simeq -m_x \omega_x^2 X_0 t$ と古典的に理解できる。コペンハーゲン解釈では捨てられる測定過程の力学的情報が、実際の測定後状態には残っている。

第一原理計算だからこそ、「収縮」を導くだけでなく、
コペンハーゲン解釈の背後にある測定ダイナミクスまで見えた。