

時間非依存GKSL方程式による厳密なダイナミクス記述の不可能性



中林拓紀
東大理, RIKEN RQC



まとめ

開放量子系のダイナミクスは厳密に、GKSL方程式を用いて記述することは可能か？

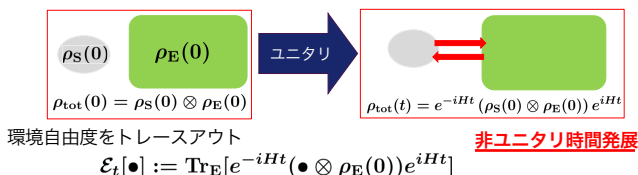
II

近似なしでGKSL方程式を導くことはできるのか？

物理的に自然な仮定を課すことで不可能であることを証明

量子マルコフダイナミクスは理想化したダイナミクス

開放量子系



マルコフ半群性

$$\mathcal{E}_{t+s} = \mathcal{E}_t \mathcal{E}_s \quad \forall t, s > 0$$

⇔ Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad方程式 [G.K.S., 1976], [L., 1976]

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = -i[H, \rho_S(t)] + \sum_k \gamma_k \left(L_k \rho_S(t) L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_k^\dagger L_k, \rho_S(t) \} \right).$$

ミクロなハミルトニアンからのGKSL方程式の導出

いくつかの近似が必要 (Born-Markov近似、回転波近似など)

モチベーション

これらの近似は単なる技術的な制約なのか、それとも量子マルコフダイナミクス自体が実現不能な理想化なのか？

先行研究

非ユニタリなマルコフダイナミクス (GKSL方程式) は、物理的に妥当な全ハミルトニアンから導出できるか

➢ 任意のマルコフダイナミクスが1 径数ユニタリダイナミクスの縮約として実現可能 [Davies 1972]

GKSL方程式を厳密に実現できる可能性を示唆

➢ 非ユニタリなマルコフダイナミクスの実現には、全体系ハミルトニアンが非有界であることが必要 [vom Ende 2023]

非有界ハミルトニアンによる厳密な実現は未解決

なぜ非有界ハミルトニアンが重要か

- ◆ 開放量子系で用いる典型的な環境系ハミルトニアンは非有界
例: ボソン環境 (フォノン、電磁場など)、自由粒子環境、無限スピン環境など
- ◆ マルコフダイナミクスは非有界ハミルトニアンから現れることが期待
無限に大きな環境ではマルコフ近似が正当化される、と考えられる

主結果

定理1 (Global condition)

- (i) 全体系ハミルトニアンは下に有界 (エネルギー安定性)
- (ii) $\text{Tr}[(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_E)H] < \infty$ for any $|\psi\rangle$ (有限の初期状態エネルギー)
➡ GKSL方程式は近似なしで導出不可能

定理2 (Local condition)

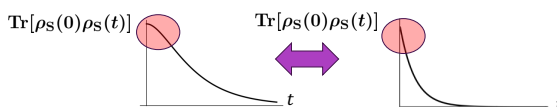
- (i) $H_0 + H_{\text{int}}$ が $D(H_0) \cap D(H_{\text{int}})$ のもとで本質的自己共役 (H_0 と H_{int} が与えられたとき、追加の条件なしで全体ハミルトニアンが定まる)
- (ii) 任意の純粋初期状態に対して、相互作用エネルギーの分散が有限
 $\sup_{0 \leq s \leq \delta} \text{Tr}[\rho_0(s)H_{\text{int}}^2] < \infty \quad H_0 = H_S + H_{\text{int}} \quad \rho_0(s) := e^{-iH_0 s}(|s\rangle\langle s| \otimes \rho_E)e^{iH_0 s}$
➡ GKSL方程式は近似なしで導出不可能

GKSL方程式が厳密に成り立つためには

定理1	基底状態のないハミルトニアン もしくは初期状態のエネルギー期待値の発散が必要
定理2	相互作用エネルギー揺らぎの発散が必要

証明の概略

- Global condition (上凸減衰)
 $\text{Tr}[\rho_S(0)\rho_S(t)] \simeq 1 - \alpha t^p \quad (t \rightarrow 0) \quad p > 1$
- Local condition (二次減衰)
 $\text{Tr}[\rho_S(0)\rho_S(t)] \simeq 1 - \alpha t^2$
- GKSL方程式 (線形減衰)
 $\text{Tr}[\rho_S(0)\rho_S(t)] \simeq 1 - \alpha t \quad (t \rightarrow 0)$



近似なしでGKSL方程式を実現する例

自然放出モデル

[Breuer and Petruccione, The theory of open quantum systems, 2007]
[Taira, Hatano, Nishino, 2026]

$$H_S = \omega_S \sigma_+ \sigma_- \quad H_E = \int_{-\infty}^{\infty} dk \, k b_k^\dagger b_k \quad H_{\text{int}} = g \int_{-\infty}^{\infty} dk (\sigma_+ b_k + \sigma_- b_k^\dagger)$$

with 真空環境

$$\frac{d\rho}{dt} = -iS[\sigma_+ \sigma_-, \rho] + \gamma \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho \} \right),$$

➢ 定理1の条件: 全体系のハミルトニアンが下に非有界

➢ 定理2の条件: $\text{Tr}[|e\rangle\langle e| \otimes |\text{vac}\rangle\langle \text{vac}| H_{\text{int}}^2] = g^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk \rightarrow \infty$

下に有界な全体系ハミルトニアン

Shallow pocket model [Burgarth and Facchi, 2017]

$$H = |0\rangle\langle 0| \otimes q_+ + |1\rangle\langle 1| \otimes q_- \quad q_+ \phi(x) = x_+ \phi(x) \quad q_- \phi(x) = x_- \phi(x)$$
$$x_+ = \max\{x, 0\} \quad x_- = \max\{-x, 0\}$$

初期状態: $\rho_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes |\phi_C\rangle\langle \phi_C|$

$$\langle x | \phi_C \rangle = \phi_C(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{x - \omega_0 - i\gamma}$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i\omega_0[\sigma_z, \rho(t)] - \gamma[\sigma_z, [\sigma_z, \rho(t)]]$$

➢ 定理1の条件: $\text{Tr}[\rho_0 H] = \langle \phi_C | q_+ | \phi_C \rangle = \int_0^\infty dx \, x |\phi_C(x)|^2 = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^\infty dx \frac{x}{(x - \omega_0)^2 + \gamma^2} \rightarrow \infty$

➢ 定理2の条件: $\text{Tr}[\rho_0(s)H_{\text{int}}^2] = \langle 0, \phi_C | H_{\text{int}}^2 | 0, \phi_C \rangle = \langle 0, \phi_C | I_S \otimes q^2 | 0, \phi_C \rangle$
 $= \frac{\gamma}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{(x - \omega_0)^2 + \gamma^2} \rightarrow \infty$

謝辞

本研究は理研ジュニア・リサーチ・アソシエイト (JRA) 制度の支援を受けています