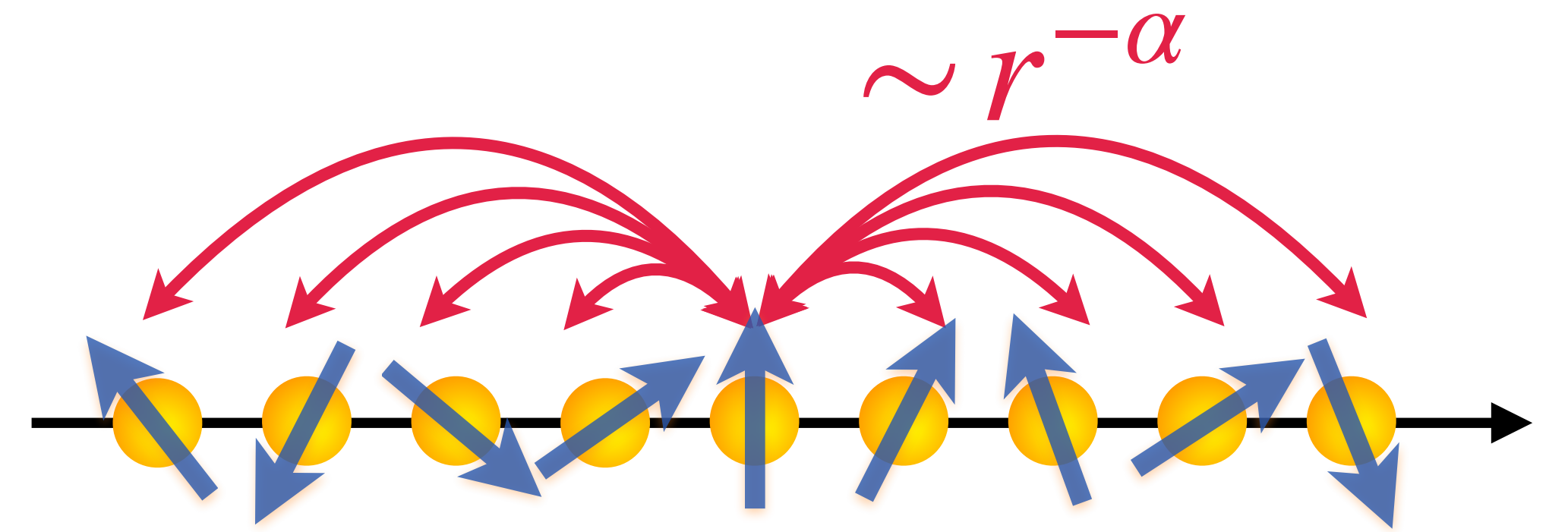




長距離相互作用スピン系における エネルギー・スピン拡散

西川 秀明

理研桑原量子複雑性解析白眉研究チームPD & MD

共同研究者：齊藤圭司（京大）

Phys. Rev. Lett. 135, 147102 (2025) & in preparation

Outline

1. 長距離相互作用系の概要

2. 長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散

HN & K.Saito, PRL (2025)

- モデル&ダイナミクス：横磁場Ising・XYZ
- 1次元系：長距離相互作用系におけるカレント
- 熱伝導率（Green-Kubo公式）の発散
- キュムラントクラスタリング定理
- 長距離相互作用系のゆらぐ流体力学：異常拡散の有効理論
- 高次元の場合

3. 長距離相互作用スピン系のスピン拡散

HN & K.Saito, in preparation

- モデル&ダイナミクス：XXZ

4. 冪指数 $\alpha < D$ におけるエネルギー・スピン輸送

5. まとめ

Outline

1. 長距離相互作用系の概要

2. 長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散

HN & K.Saito, PRL (2025)

- モデル&ダイナミクス：横磁場Ising・XYZ
- 1次元系：長距離相互作用系におけるカレント
- 熱伝導率（Green-Kubo公式）の発散
- キュムラントクラスタリング定理
- 長距離相互作用系のゆらぐ流体力学：異常拡散の有効理論
- 高次元の場合

3. 長距離相互作用スピン系のスピン拡散

HN & K.Saito, in preparation

- モデル&ダイナミクス：XXZ

4. 冪指数 $\alpha < D$ におけるエネルギー・スピン輸送

5. まとめ

長距離相互作用系は自然界の至るところに存在

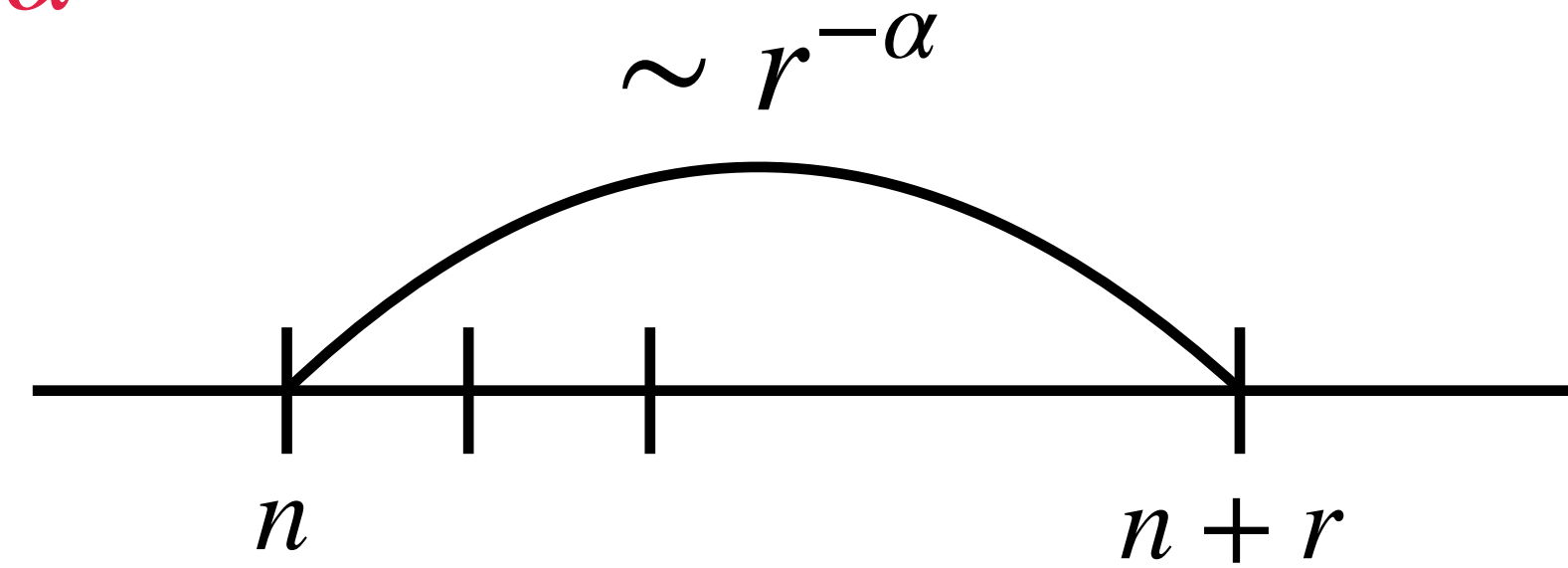
2

- 長距離相互作用系： $V(r) \sim r^{-\alpha}$

e.g. $\alpha = 1$: 重力、プラズマ

$\alpha = 3$: 磁気双極子

$\alpha = 6$: Lennard-Jones ポテンシャル (分子間力)



長距離相互作用系は自然界の至るところに存在

- 近年の実験技術の進展 (Rydberg原子系、冷却原子系、イオントラップ etc)

→ **任意の冪指数 α** における長距離相互作用スピン系を実現

✓ Rydberg原子系

✓ 冷却原子系

✓ イオントラップ

長距離Isingモデル

長距離Ising, XYモデル

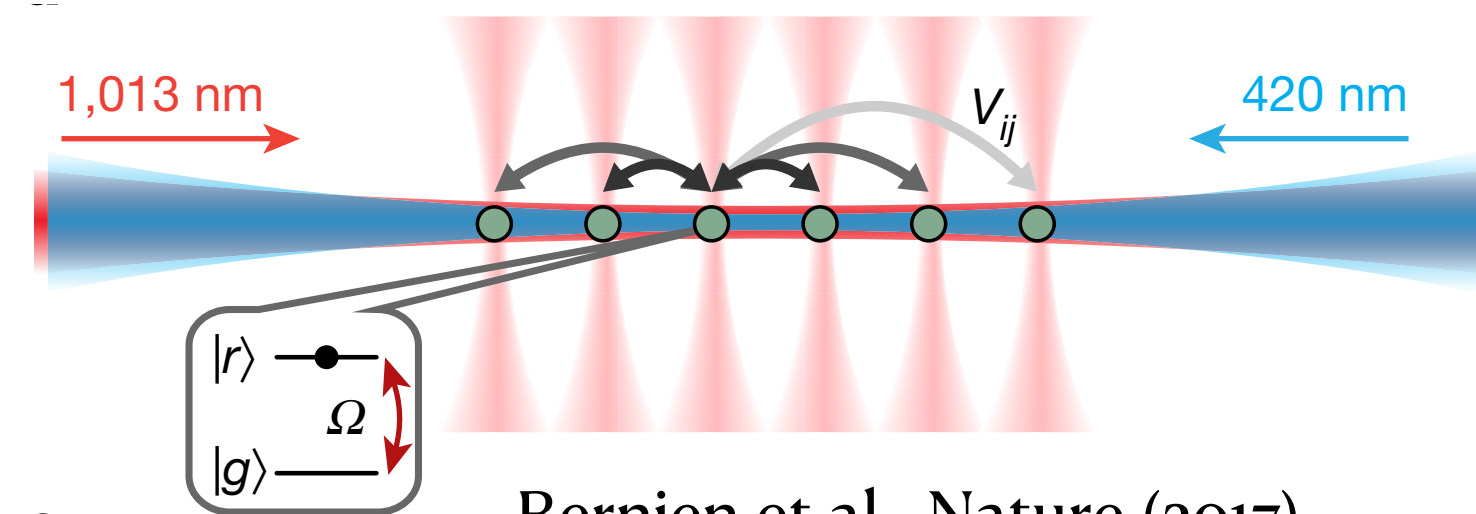
長距離Isingモデル

$$H = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha} S_{\mathbf{r}}^z S_{\mathbf{r}'}^z$$

Aikawa et al., Phys. Rev. Lett. (2012)

Saffman et al., Rev. Mod. Phys. (2010)

Bendkowsky et al., Nature (2009)



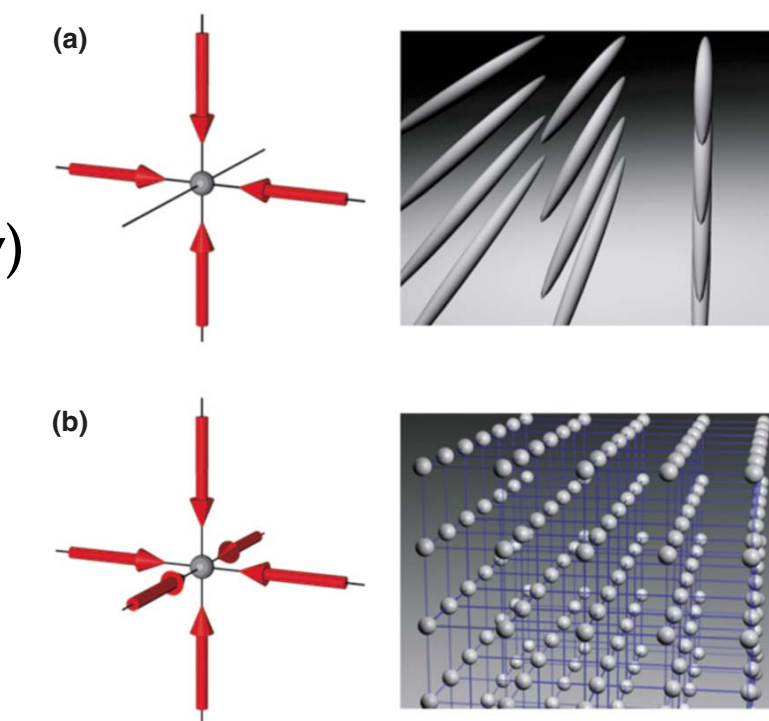
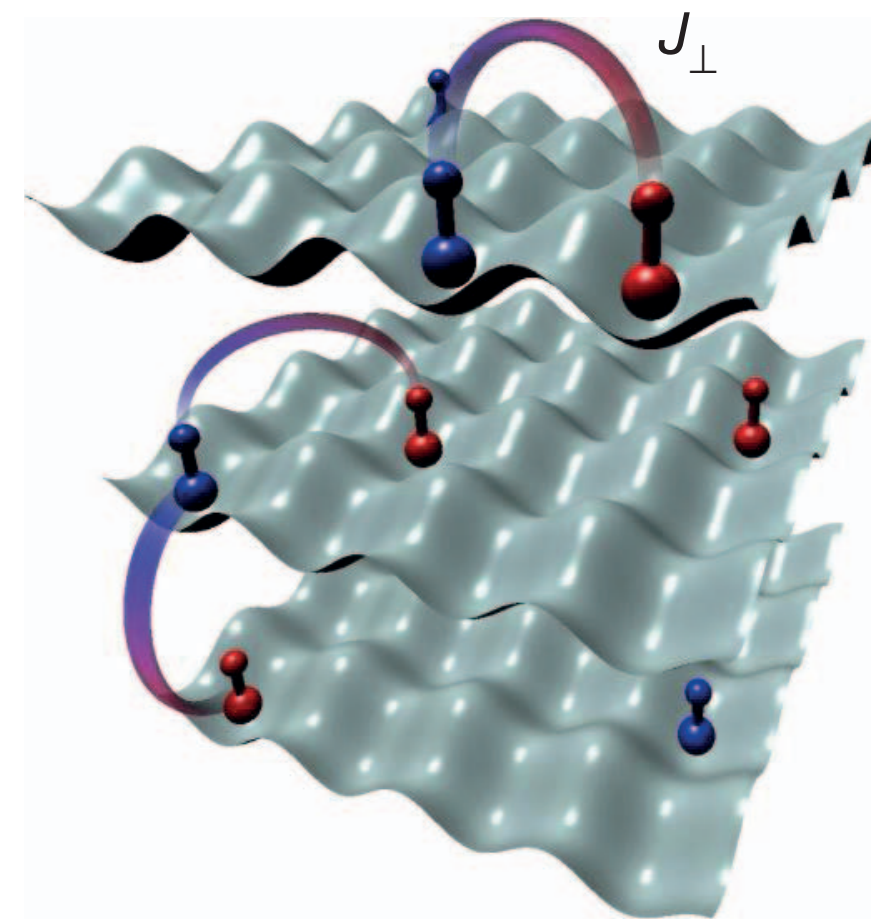
Bernien et al., Nature (2017)

$$\frac{\mathcal{H}}{\hbar} = \sum_i \frac{\Omega_i}{2} \sigma_x^i - \sum_i \Delta_i n_i + \sum_{i < j} V_{ij} n_i n_j$$

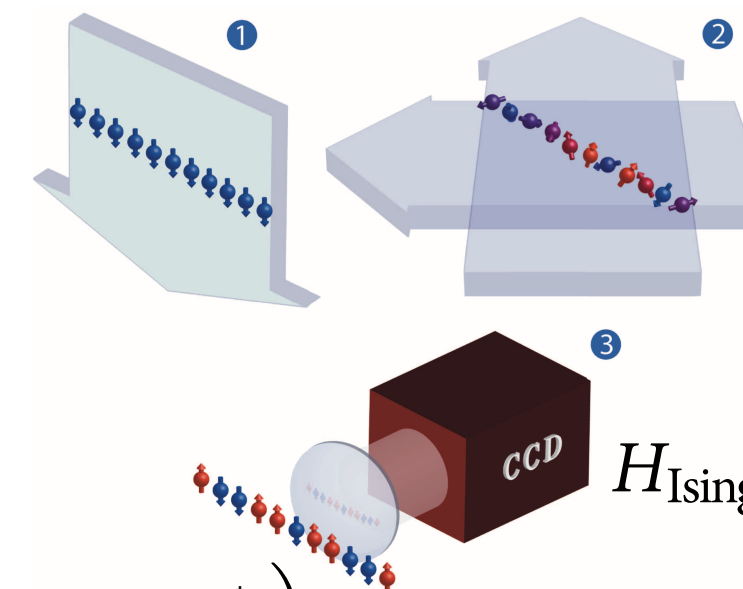
Bloch et al., Nat. Phys. (2005)

Neyenhuis et al., Sci. Adv. (2017)

Yan et al., Nature (2013)



Richerme et al., Nature (2014)

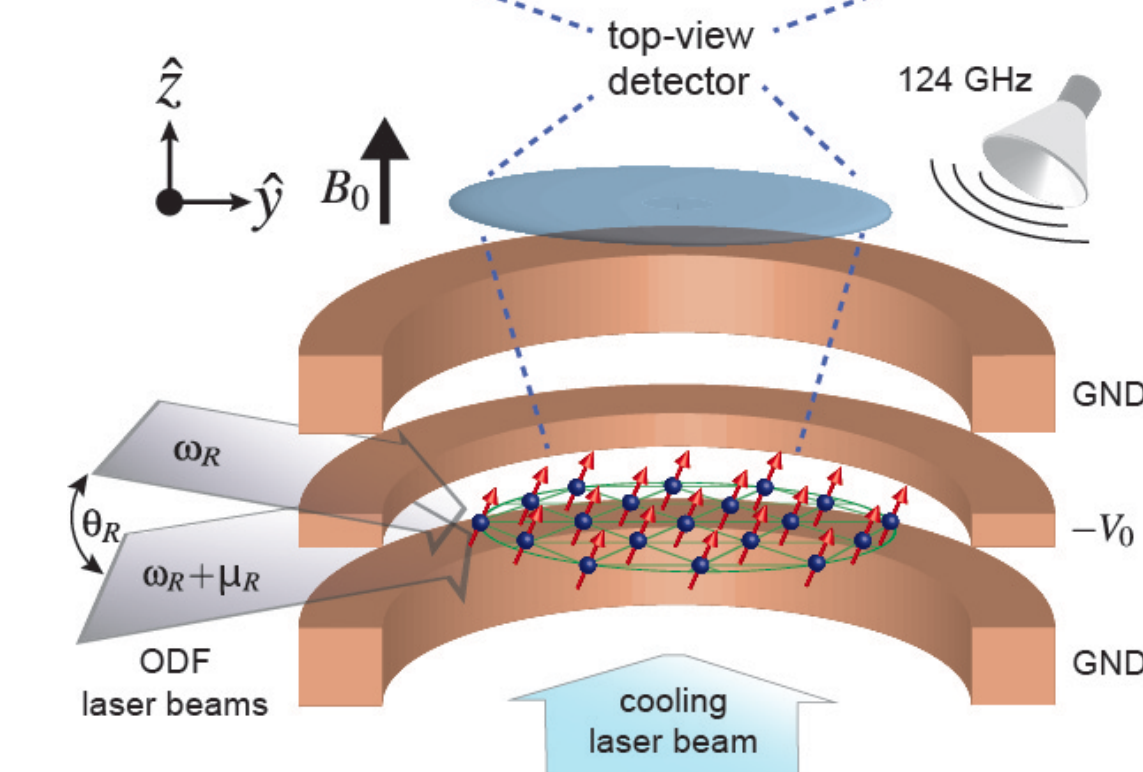
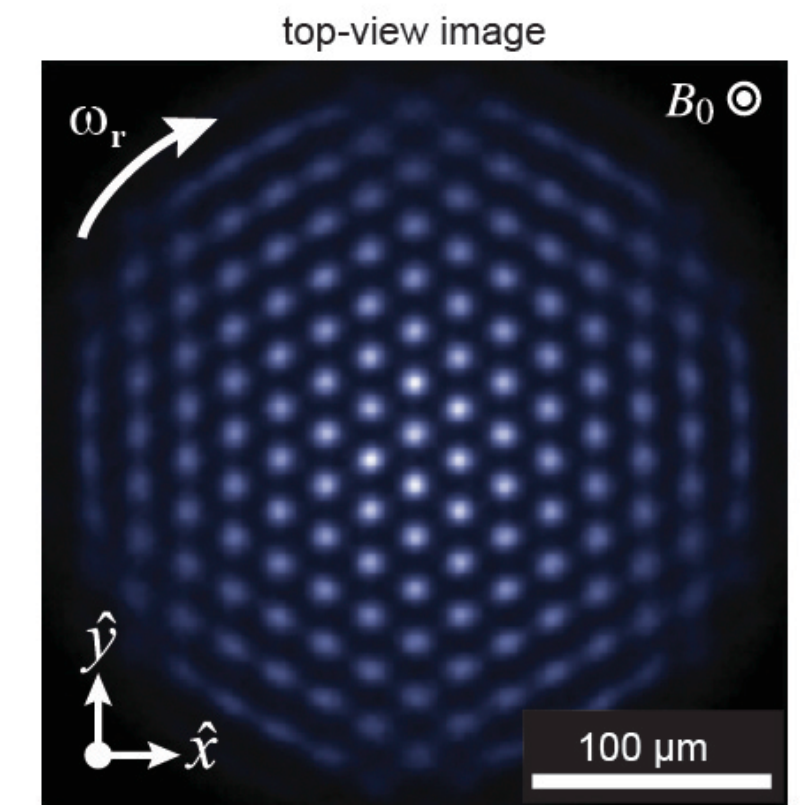


$$H = \frac{J_{\perp}}{2} \sum_{i > j} V_{\text{dd}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \left(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+ \right)$$

$$H_{\text{Ising}} = \sum_{i < j} J_{i,j} \sigma_i^x \sigma_j^x$$

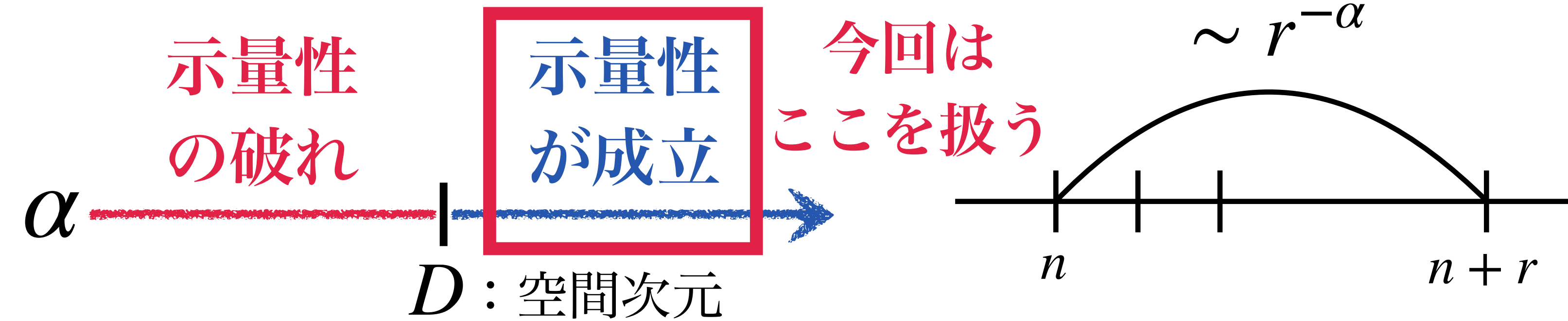
$$H_{\text{XY}} = \frac{1}{2} \sum_{i < j} J_{i,j} \left(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^z \sigma_j^z \right)$$

Britton et al.,
Nature (2012)



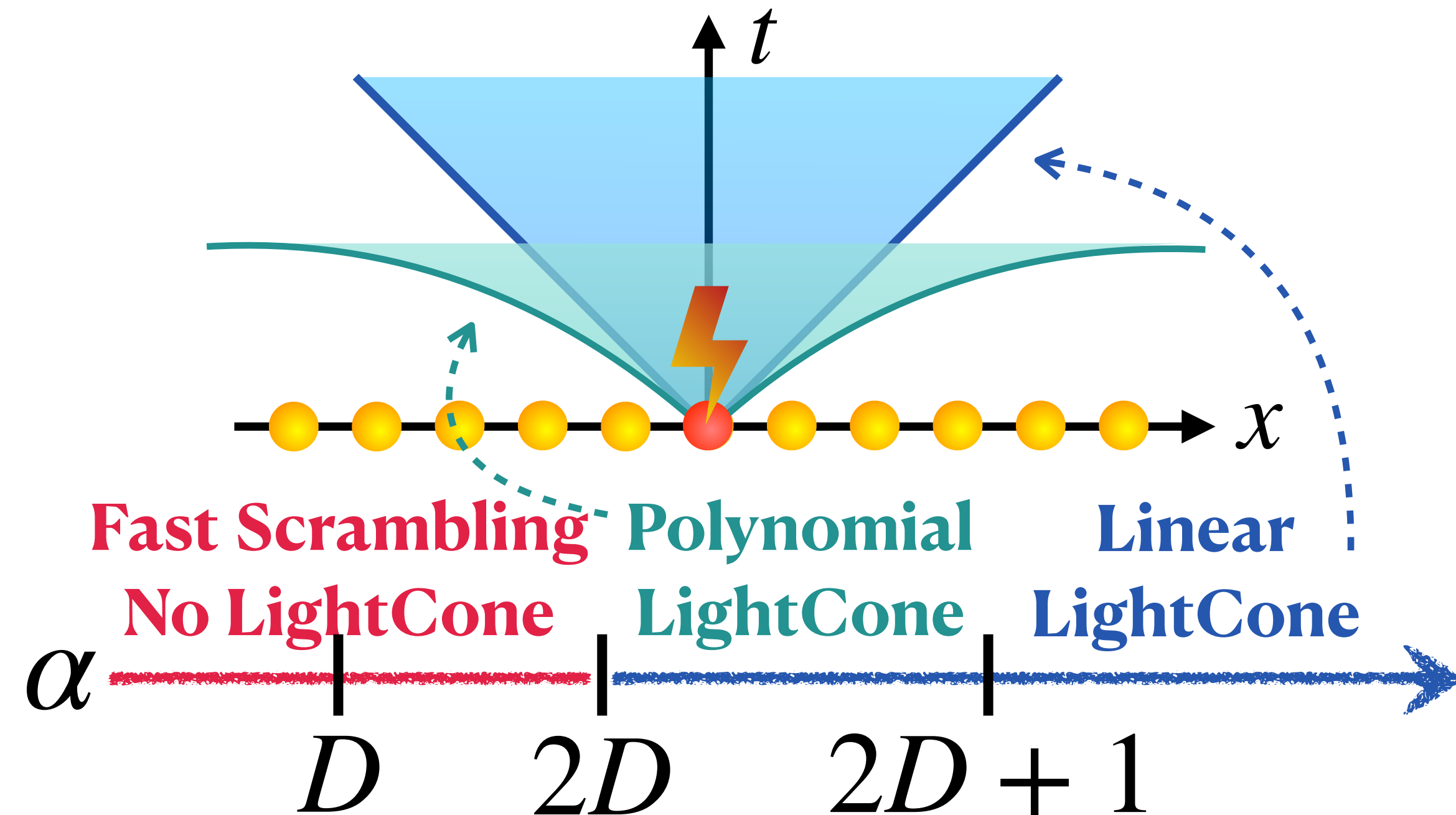
長距離相互作用の効果：動的性質

- 長距離相互作用系の平衡状態



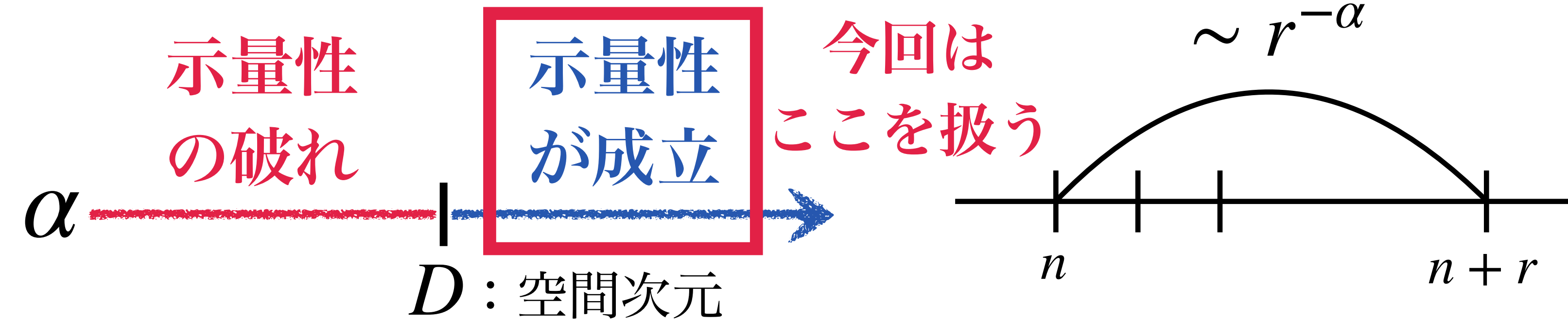
- 長距離相互作用系における情報伝播

Kuwahara & Saito PRX (2020)
Tran et al., PRL (2021)



長距離相互作用の効果：動的性質

- 長距離相互作用系の平衡状態



- 長距離相互作用系における保存量（エネルギー・スピンetc）の伝播

✓スピン系：冷却原子系etcにおいて重要だが、先行研究はスピン拡散の数値計算のみ。エネルギー拡散については数値計算しない。

$$H = \frac{1}{\tilde{N}_\alpha} \sum_{i,j=1}^N J \frac{S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y}{|i-j|^\alpha}$$

スピン拡散： $\langle S_n^z(t) S_0^z(0) \rangle$

$\alpha > 3/2$: Gauss拡散

$\alpha < 3/2$: Levy拡散

Schukert et al., PRB

$$\tilde{N}_\alpha = \sum_{r=1}^{N/2} r^{-2\alpha}$$

α が大きいと、実質短距離
(e.g. Lennard-Jones)
→ Gauss拡散になるはず

長距離相互作用系における伝播

Levy拡散 | Gauss拡散

α_c : 普遍的？

Q. Gauss拡散からLevy拡散への転移が生じる α_c はどこか？

Outline

1. 長距離相互作用系の概要

2. 長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散

HN & K.Saito, PRL (2025)

- モデル&ダイナミクス：横磁場Ising・XYZ
- 1次元系：長距離相互作用系におけるカレント
- 熱伝導率（Green-Kubo公式）の発散
- キュムラントクラスタリング定理
- 長距離相互作用系のゆらぐ流体力学：異常拡散の有効理論
- 高次元の場合

3. 長距離相互作用スピン系のスピン拡散

HN & K.Saito, in preparation

- モデル&ダイナミクス：XXZ

4. 冪指数 $\alpha < D$ におけるエネルギー・スピン輸送

5. まとめ

モデル：典型的なスピン系

- Hamiltonian : 1次元 2-local 古典長距離相互作用スピン系

$$H = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \quad \epsilon_n : \text{サイト } n \text{ におけるエネルギー} \quad N \text{ spins}$$

$$n + N \equiv n : \text{P.B.C.}$$

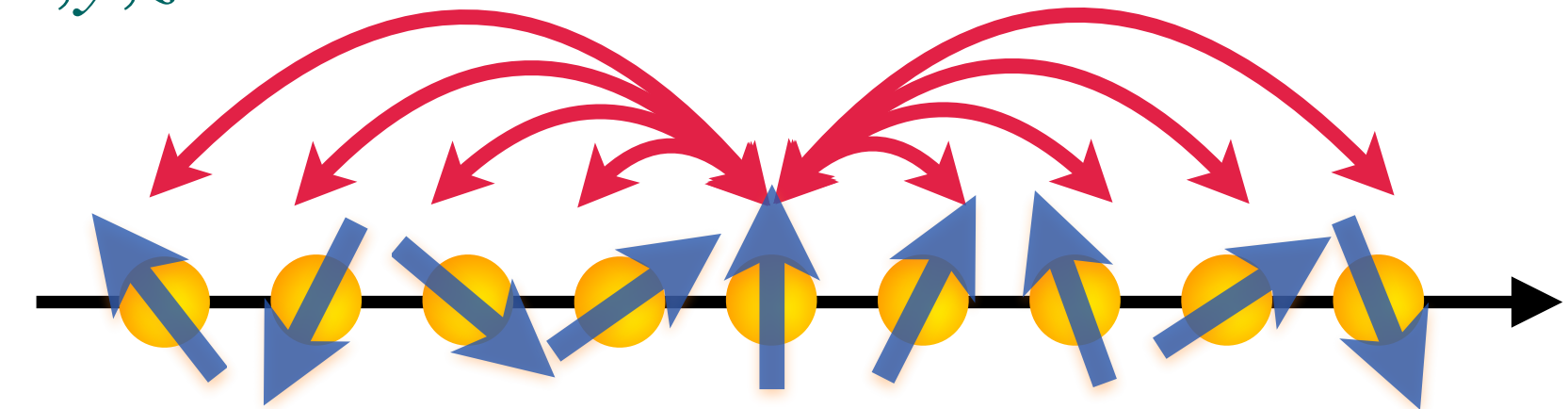
(a) 長距離横磁場Isingモデル

$$\epsilon_n = -\frac{J}{2} \sum_{r=1}^{N/2} \frac{S_n^z S_{n+r}^z + S_n^z S_{n-r}^z}{r^\alpha} - h S_n^x$$

$\alpha > 1$: 示量性が成立

(b) 長距離XYZモデル (XYを含む)

$$\epsilon_n = - \sum_{r=1}^{N/2} \sum_{\sigma=x,y,z} \frac{J_\sigma}{2} \frac{S_n^\sigma S_{n+r}^\sigma + S_n^\sigma S_{n-r}^\sigma}{r^\alpha} \sim r^{-\alpha}$$



✓ 示量性 $\rightarrow \|\epsilon_n\| < \infty$: 1サイトのエネルギーがwell-defined

$\|\cdot\|$: operator norm (maximum value) $\left(\because \int_1^\infty dr r^{-\alpha} < \infty \right)$

✓ 典型的なモデル : Rydberg原子系、冷却原子気体などに適したセットアップ

1次元長距離相互作用系におけるエネルギーカレント

7

- サイト n におけるエネルギー

$$H = \sum_n \epsilon_n \rightarrow \text{エネルギーは局所的な保存量}$$

$$\epsilon_n = -\frac{J}{2} \sum_j \frac{S_n^z S_j^z}{d_{n,j}^\alpha} - h S_n^x \quad : \text{Transverse Ising}$$

$$\epsilon_n = - \sum_j \sum_{\sigma=x,y,z} \frac{1}{d_{n,j}^\alpha} \frac{J_\sigma}{2} S_n^\sigma S_j^\sigma \quad : \text{XYZ}$$

- エネルギーカレント $\mathcal{J}_n^\epsilon$??

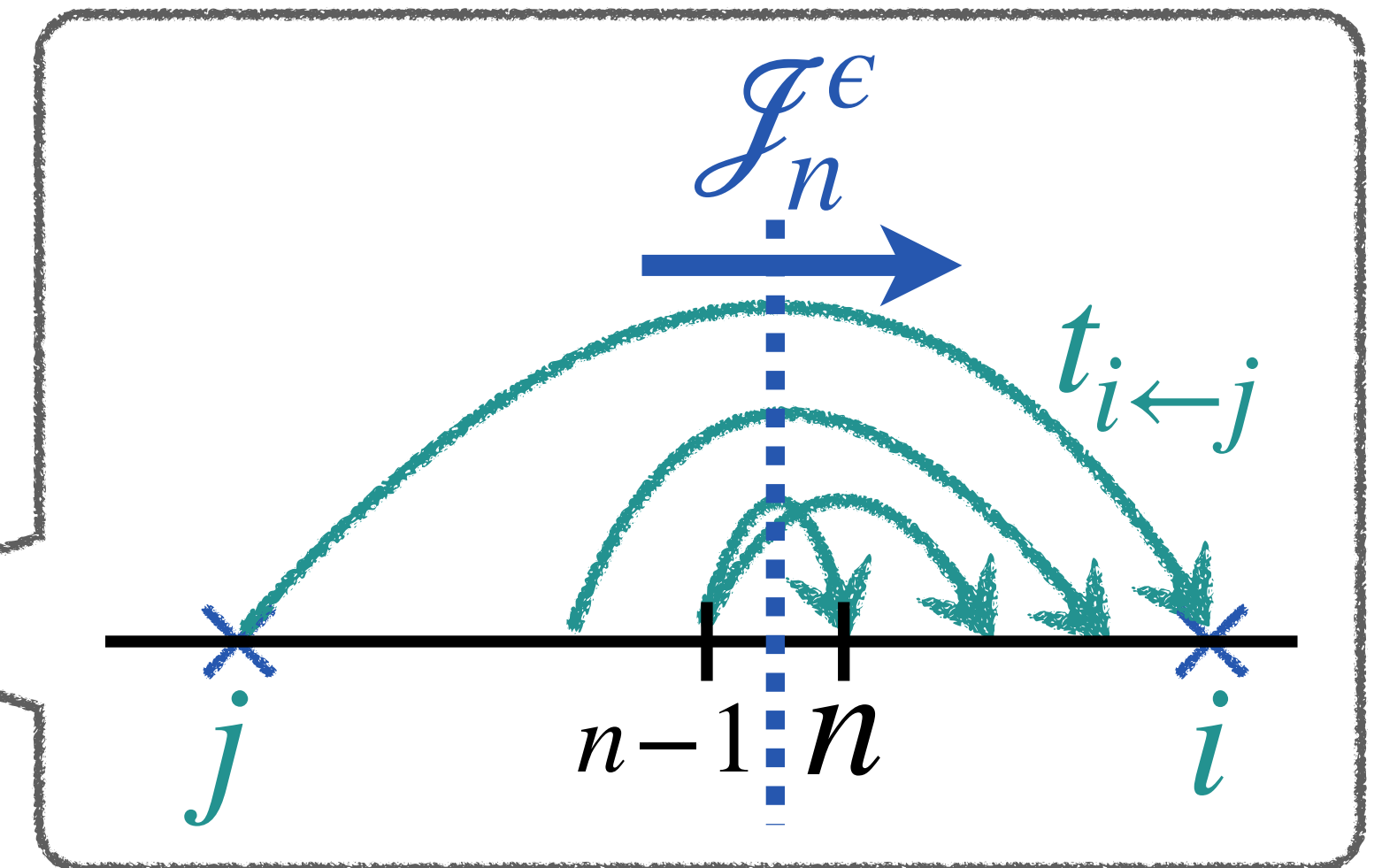
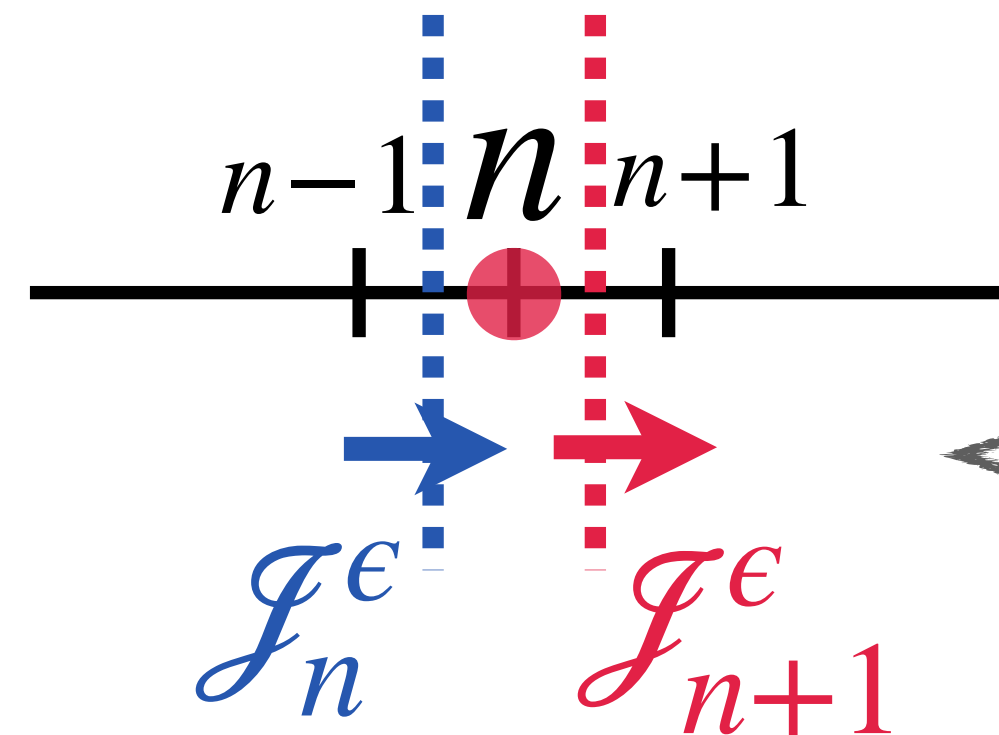
❖ Criteria : 連続の式が成立

$$\partial_t \epsilon_n = -\mathcal{J}_{n+1}^\epsilon + \mathcal{J}_n^\epsilon$$

$$\mathcal{J}_n^\epsilon := \sum_{j < n \leq i} t_{i \leftarrow j}$$

$$t_{i \leftarrow j} := \{\epsilon_i, \epsilon_j\}$$

$\{, \}$: Spin Poisson bracket



Outline

1. 長距離相互作用系の概要

2. 長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散

HN & K.Saito, PRL (2025)

- モデル&ダイナミクス：横磁場Ising・XYZ
- 1次元系：長距離相互作用系におけるカレント
- 熱伝導率（Green-Kubo公式）の発散
- キュムラントクラスタリング定理
- 長距離相互作用系のゆらぐ流体力学：異常拡散の有効理論
- 高次元の場合

3. 長距離相互作用スピン系のスピン拡散

HN & K.Saito, in preparation

- モデル&ダイナミクス：XXZ

4. 冪指数 $\alpha < D$ におけるエネルギー・スピン輸送

5. まとめ

1次元長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散：全体の流れ ⁸

✓ 通常拡散 → 熱伝導率（Green-Kubo公式）が有限値に収束

$$\kappa_N = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty dt \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$$

$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$ が重要！

定理1：キュムラントクラスタリング定理

k -localな長距離系で、 $\alpha > D, T > T_c$ のとき、

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c \leq \text{const.}$$

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{:connected}}} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_p}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

定理2：カレント2点相関の上限

典型的な2-local長距離スピン系（横磁場Ising、XYZモデル）において、

$$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}} < c' n^{2-2\alpha}, \quad (1 < \alpha < 2)$$

$\alpha > 3/2$ ならば、エネルギー拡散は通常拡散

$\alpha < 3/2$ では？：ゆらぐ流体力学による有効記述 → Levy拡散

1次元長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散：全体の流れ ⁸

✓ 通常拡散→熱伝導率（Green-Kubo公式）が有限値に収束

$$\kappa_N = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty dt \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$$

$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$ が重要！



通常拡散と Green-Kubo 公式

- エネルギーが通常拡散なら、

$$\partial_t \epsilon_n(t) = \mathcal{D} \nabla_n^2 \epsilon_n(t) \quad : \text{拡散方程式}$$

$$\mathcal{D} = \frac{\kappa}{c_V}, \quad \kappa : \text{熱伝導率} \quad c_V : \text{単位体積あたりの比熱}$$

- Green-Kubo 公式

$$\kappa_N = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty dt C_N(t), \quad C_N(t) = \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$$

- 通常拡散 → 熱伝導率は有限に収束

- Remark : $c_V < \infty$ for $\alpha > 1$

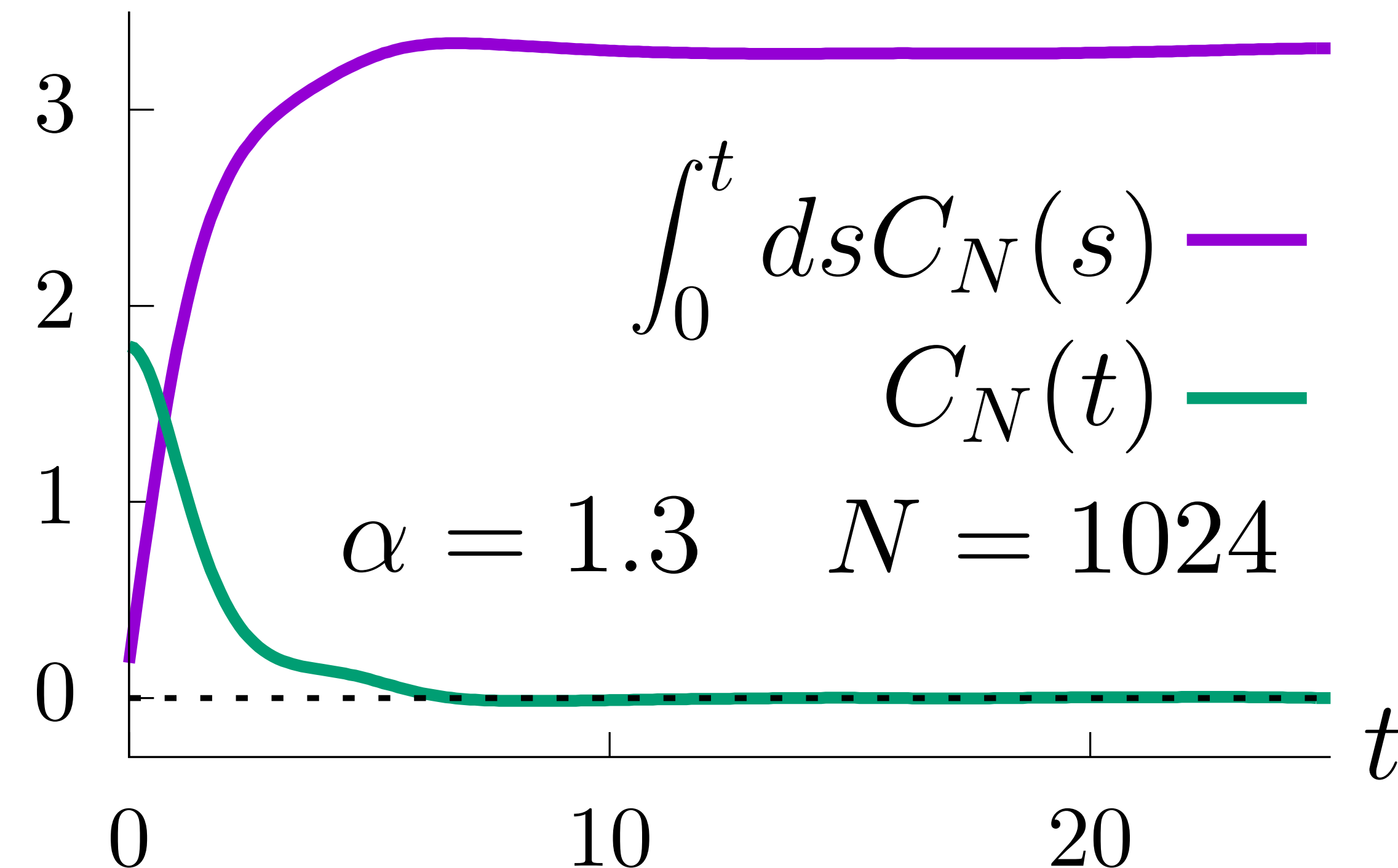
数値計算：トータルカレント相関

- 長距離横磁場Isingモデル

$$H = \sum_n \epsilon_n$$

$$\epsilon_n = -\frac{J}{2} \sum_r \frac{S_n^z S_{n+r}^z + S_n^z S_{n-r}^z}{r^\alpha} - h S_n^x$$

- トータルカレント相関： $C_N(t) = \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$



✓ $C_N(t)$: 時間について指数減衰

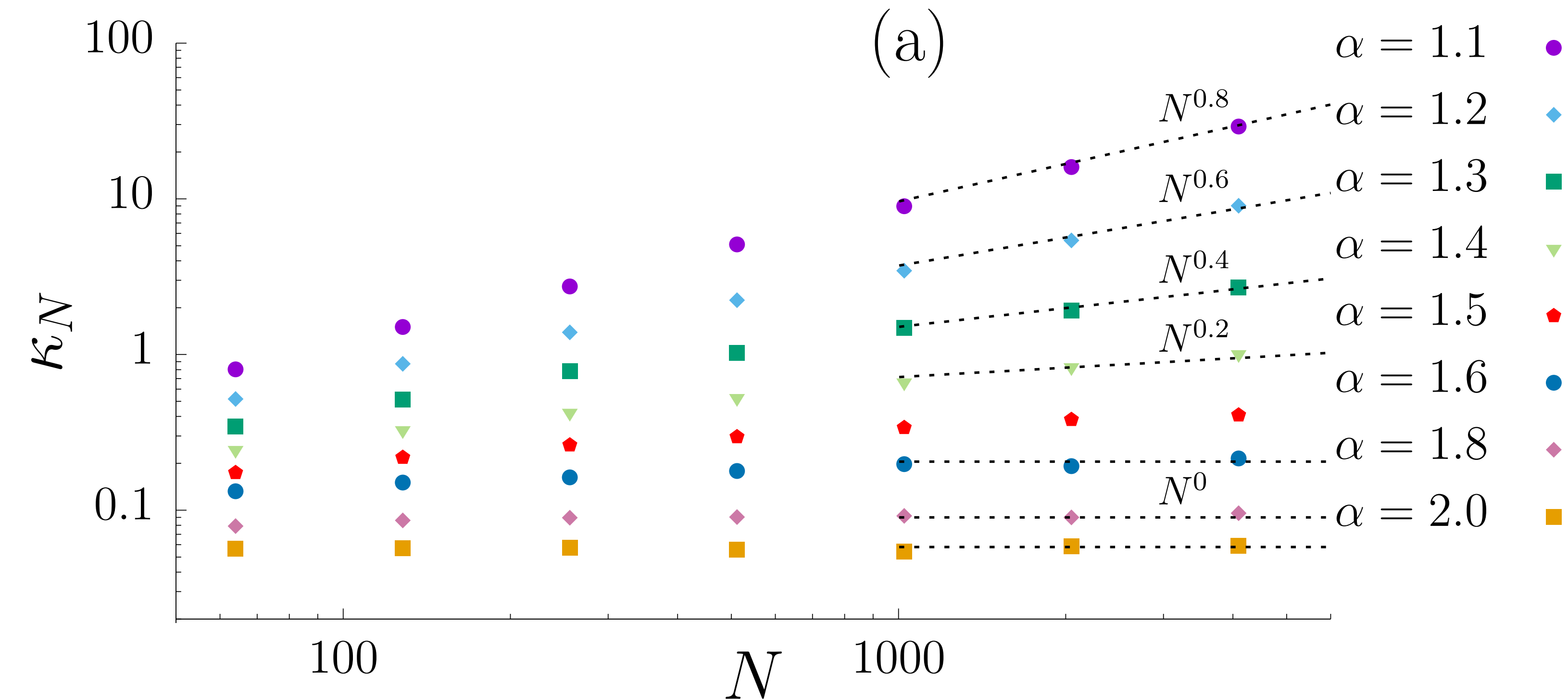
→ **Long-time tail**は存在しない

✓ Green-Kubo積分は収束

✓ (物理的には) 系の非可積分性と連続空間並進対称性に由来

数値計算：熱伝導率

・ 熱伝導率： $\kappa_N = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty dt C_N(t)$, $C_N(t) = \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$



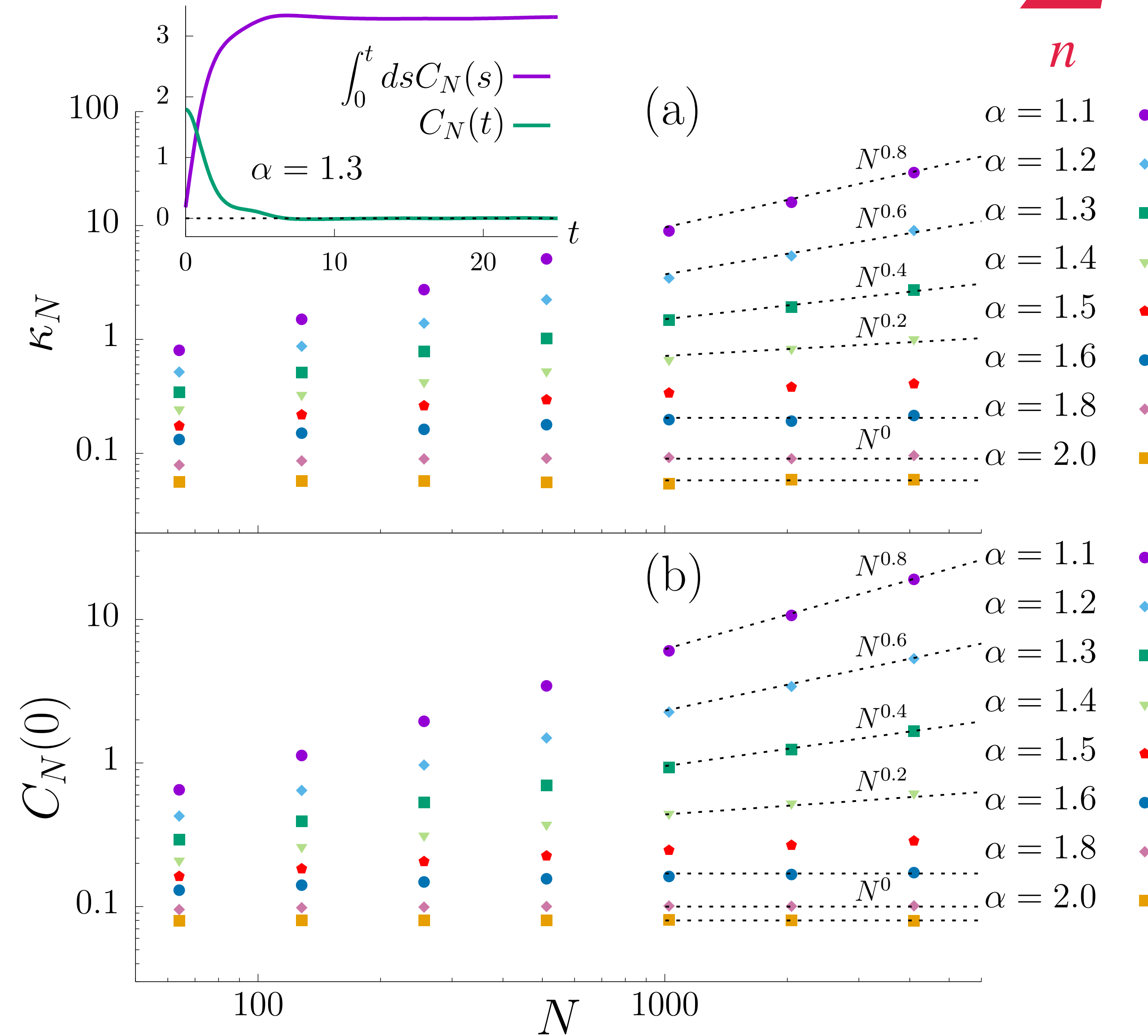
✓ 小さい α (< 1.5) では熱伝導率が発散している：異常熱輸送

→ 熱伝導率の発散の起源はなにか？

cf) $C_N(t)$ に long-time tail はない

熱伝導率 (Green-Kubo 公式) の発散

✓ カレント同時刻相関： $C_N(0) = \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$ に注目



$$\kappa_N = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty dt C_N(t),$$

$$C_N(t) = \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$$

✓ 上下で定性的には同じふるまい

✓ 新しいメカニズム：

カレント同時刻相関 $C_N(0)$ の発散

1次元長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散：全体の流れ

✓ 通常拡散→熱伝導率（Green-Kubo公式）が有限値に収束

$$\kappa_N = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty dt \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$$

$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$ が重要！

定理1：キュムラントクラスタリング定理

k -localな長距離系で、 $\alpha > D, T > T_c$ のとき、

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c \leq \text{const}.$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_{i_p}}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

:connected

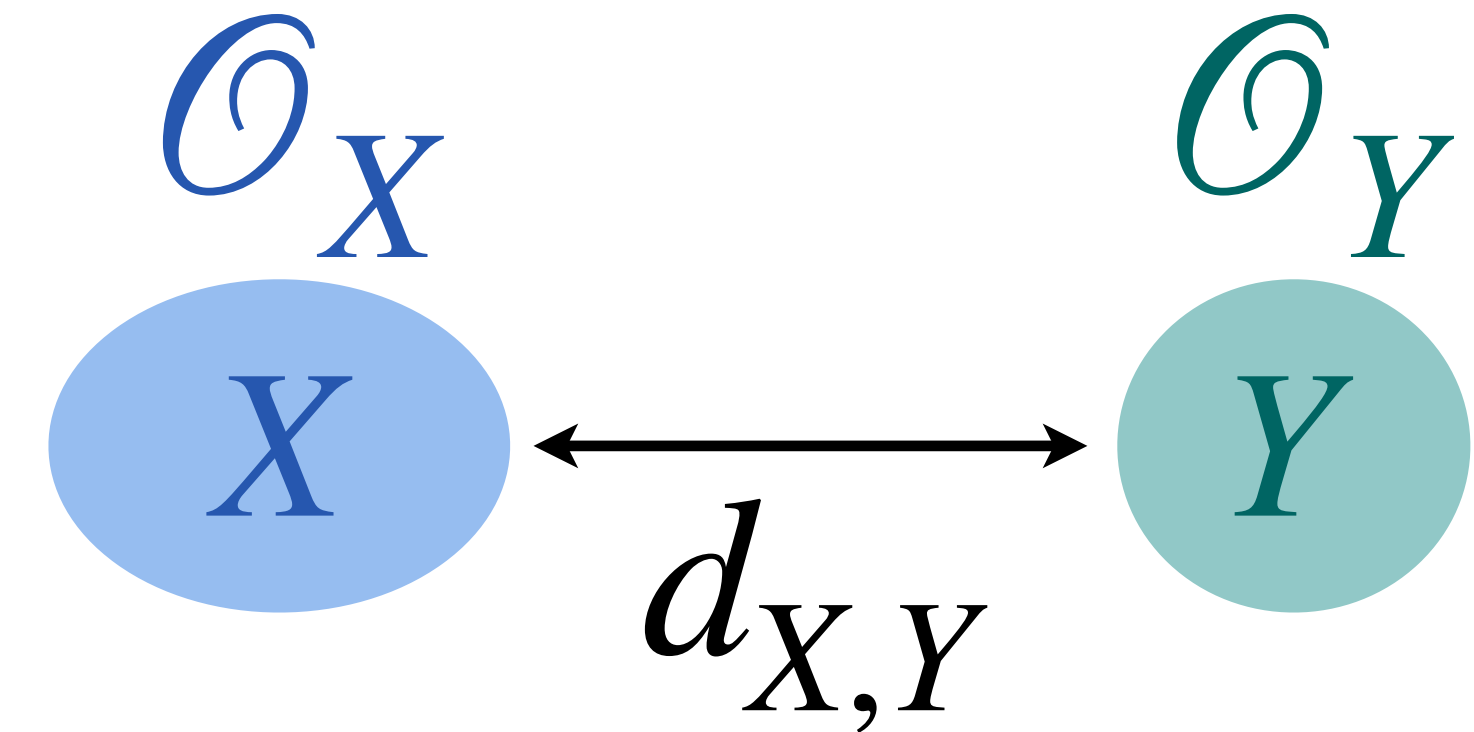


多体系におけるクラスタリング定理

✓ 短距離相互作用系におけるクラスタリング定理

Araki, Comm. Math. Phys. (1969)
Gross, Comm. Math. Phys. (1979)
Kliesh et al., Phys. Rev. X (2014)

$$\langle \delta \mathcal{O}_X \delta \mathcal{O}_Y \rangle_{\text{eq}} \leq \text{const.} \cdot \|\mathcal{O}_X\| \cdot \|\mathcal{O}_Y\| e^{-c' d_{X,Y}}$$



✓ 長距離相互作用系におけるクラスタリング定理

Kim, Kuwahara, Saito
Phys. Rev. Lett. (2025)

$$\langle \delta \mathcal{O}_X \delta \mathcal{O}_Y \rangle_{\text{eq}} \leq \text{const.} \cdot \|\mathcal{O}_X\| \cdot \|\mathcal{O}_Y\| \frac{|X| |Y| e^{(|X|+|Y|)/k}}{(d_{X,Y})^\alpha}$$

証明：高温条件におけるクラスター展開

長距離相互作用系におけるキュムラントクラスタリング定理¹⁴

定理1：長距離相互作用系におけるキュムラントクラスタリング定理

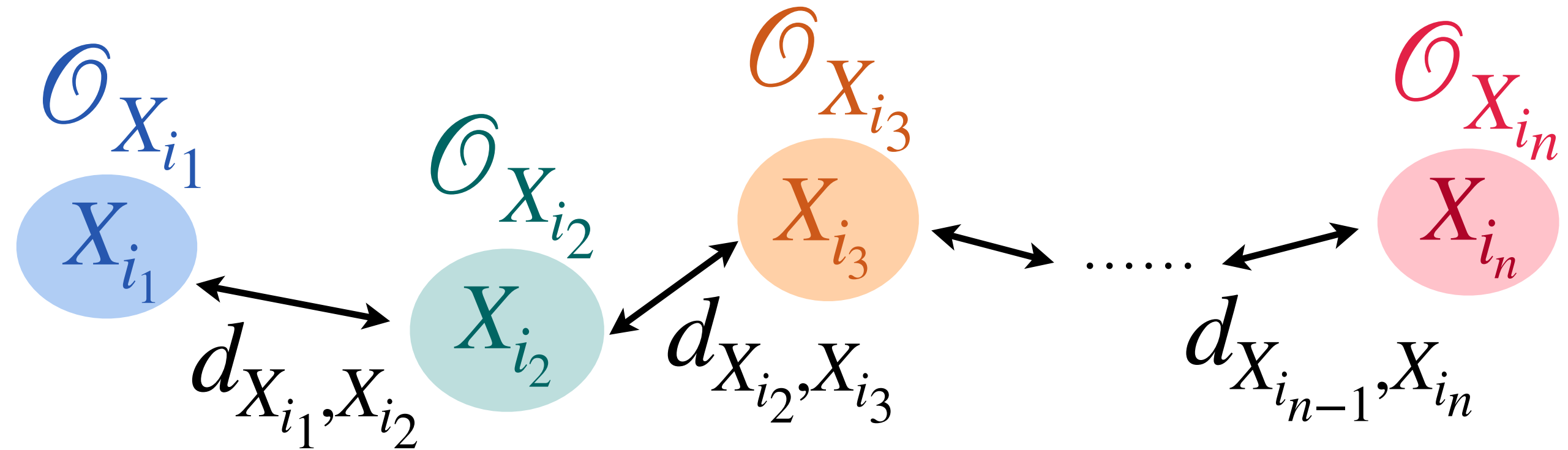
HN & K.Saito,
PRL (2025)

k -localな長距離相互作用系で、 $\alpha > D, T > T_c$ のとき、以下が成り立つ

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c \leq \text{const.} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{:connected}}} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_p}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c := \left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \right|_{\vec{\lambda}=0} \mu(\vec{\lambda})$$
$$\mu(\vec{\lambda}) = \ln \langle \left(\sum_i \lambda_i \mathcal{O}_{X_i} \right) \rangle$$

e.g. 3次のキュムラントの場合



$$\langle \delta \mathcal{O}_X \delta \mathcal{O}_Y \delta \mathcal{O}_Z \rangle_{\text{eq}} \leq \frac{\mathcal{O}(1)}{(d_{X,Y})^\alpha (d_{Y,Z})^\alpha} + \frac{\mathcal{O}(1)}{(d_{Y,Z})^\alpha (d_{Z,X})^\alpha} + \frac{\mathcal{O}(1)}{(d_{Z,X})^\alpha (d_{X,Y})^\alpha}$$

長距離相互作用系におけるキュムラントクラスタリング定理¹⁴

定理1：長距離相互作用系におけるキュムラントクラスタリング定理

HN & K.Saito,
PRL (2025)

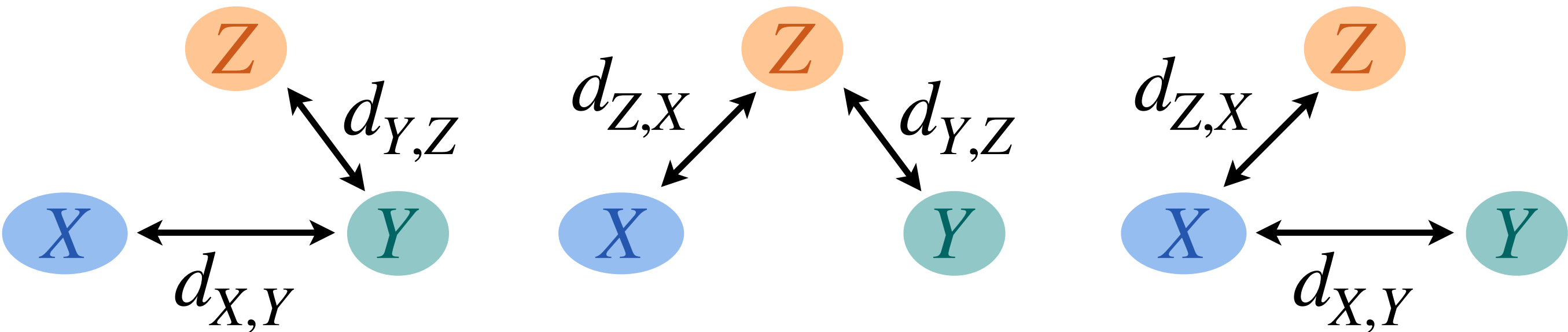
k -localな長距離相互作用系で、 $\alpha > D, T > T_c$ のとき、以下が成り立つ

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c \leq \text{const.} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{:connected}}} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_p}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c := \left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \right|_{\vec{\lambda}=0} \mu(\vec{\lambda})$$

$$\mu(\vec{\lambda}) = \ln \langle \left(\sum_i \lambda_i \mathcal{O}_{X_i} \right) \rangle$$

e.g. 3次のキュムラントの場合



この定理は量子系でも成り立つ!!

$$\langle \delta \mathcal{O}_X \delta \mathcal{O}_Y \delta \mathcal{O}_Z \rangle_{\text{eq}} \leq \frac{\mathcal{O}(1)}{(d_{X,Y})^\alpha (d_{Y,Z})^\alpha} + \frac{\mathcal{O}(1)}{(d_{Y,Z})^\alpha (d_{Z,X})^\alpha} + \frac{\mathcal{O}(1)}{(d_{Z,X})^\alpha (d_{X,Y})^\alpha}$$

1次元長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散：全体の流れ

✓ 通常拡散 → 熱伝導率（Green-Kubo公式）が有限値に収束

$$\kappa_N = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty dt \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$$

$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$ が重要！

定理1：キュムラントクラスタリング定理

k -localな長距離系で、 $\alpha > D, T > T_c$ のとき、

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c \leq \text{const.}$$

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{:connected}}} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_p}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

定理2：カレント2点相関の上限

典型的な2-local長距離スピン系（横磁場Ising、XYZモデル）において、

$$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}} < c' n^{2-2\alpha}, \quad (1 < \alpha < 2)$$

$\alpha > 3/2$ ならば、エネルギー拡散は通常拡散

カレントの2点相関の上限→通常拡散の十分条件

定理2：長距離スピン系のエネルギーカレントの2点相関の上限

HN & K.Saito, PRL (2025)

典型的な2-local長距離相互作用古典スピン系（横磁場Ising、XYZモデル）において、エネルギーカレントの2点相関 $\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$ について、 $T > T_c$ で以下の不等式が成り立つ

$$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}} < c' n^{2-2\alpha}, \quad (1 < \alpha < 2)$$

証明の骨子 系の対称性由来の性質 + キュムラントクラスタリング定理

- ✓ 横磁場Ising → $\langle S_i^z \rangle_{\text{eq}} = \langle S_i^y \rangle_{\text{eq}} = 0$, $\langle S_i^y S_j^y \mathcal{O} \rangle_{\text{eq}} = \delta_{ij} \langle (S_i^y)^2 \mathcal{O} \rangle_{\text{eq}}$
- ✓ XYZ → $\langle S_i^\sigma \rangle_{\text{eq.}} = 0$, $\langle S_i^\sigma S_j^\tau \rangle_{\text{eq.}} = \delta_{\sigma\tau} \langle S_i^\sigma S_j^\sigma \rangle_{\text{eq.}}$ ($\sigma, \tau = x, y, z$)

この定理は量子系でも成り立つ!!

カレントの2点相関の上限→通常拡散の十分条件

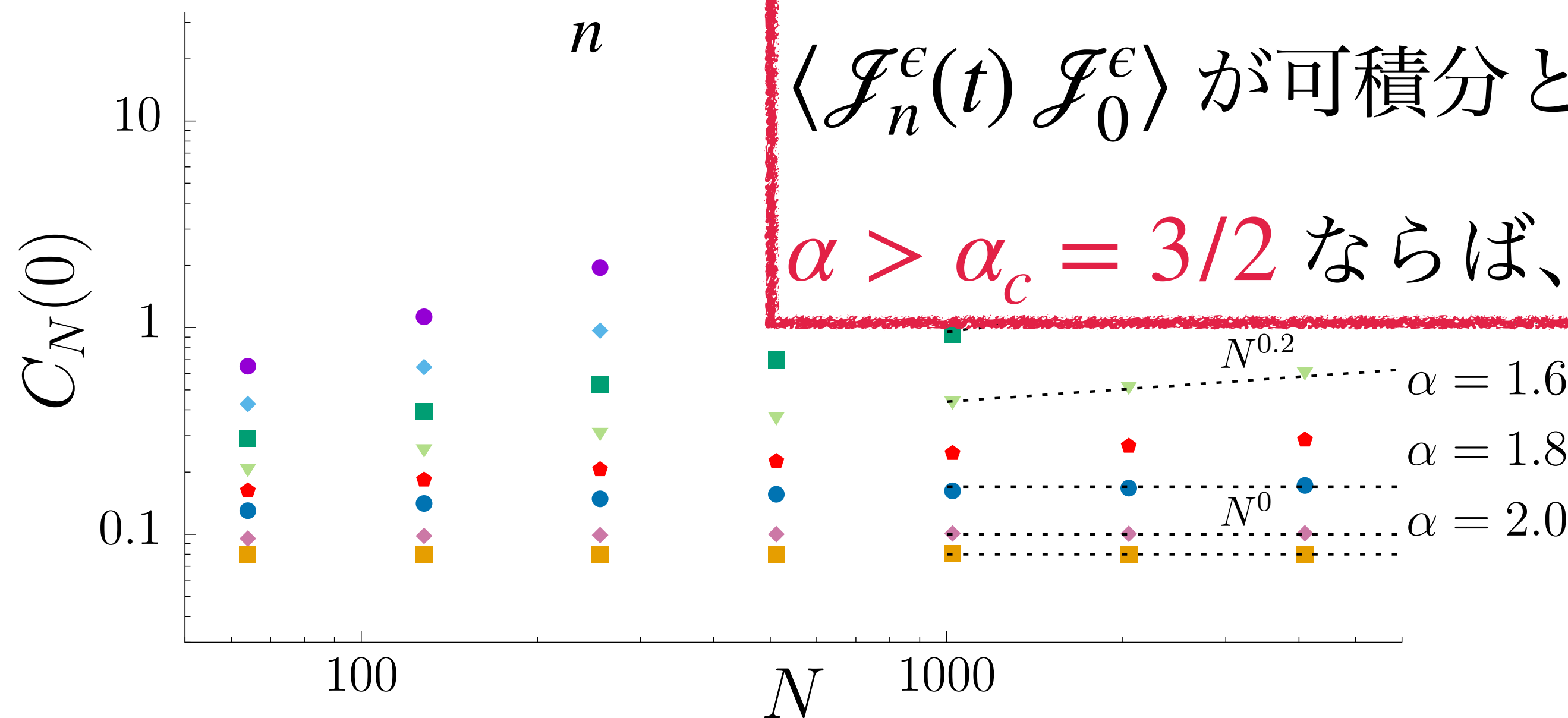
定理2：長距離スピン系のエネルギーカレントの2点相関の上限

HN & K.Saito, PRL (2025)

典型的な2-local長距離相互作用古典スピン系（横磁場Ising、XYZモデル）において、エネルギーカレントの2点相関 $\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$ について、 $T > T_c$ で以下の不等式が成り立つ

$$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}} < c' n^{2-2\alpha}, \quad (1 < \alpha < 2)$$

$$\rightarrow C_N(0) = \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}} < c'' N^{3-2\alpha} + \text{const.} < \infty \quad (\alpha > 3/2)$$



$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle$ が可積分という仮定のもとで、

$\alpha > \alpha_c = 3/2$ ならば、エネルギー拡散は通常拡散である

1次元長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散：全体の流れ

✓ 通常拡散 → 熱伝導率（Green-Kubo公式）が有限値に収束

$$\kappa_N = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty dt \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$$

$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$ が重要！

定理1：キュムラントクラスタリング定理

k -localな長距離系で、 $\alpha > D, T > T_c$ のとき、

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c \leq \text{const.}$$

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{:connected}}} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_p}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

定理2：カレント2点相関の上限

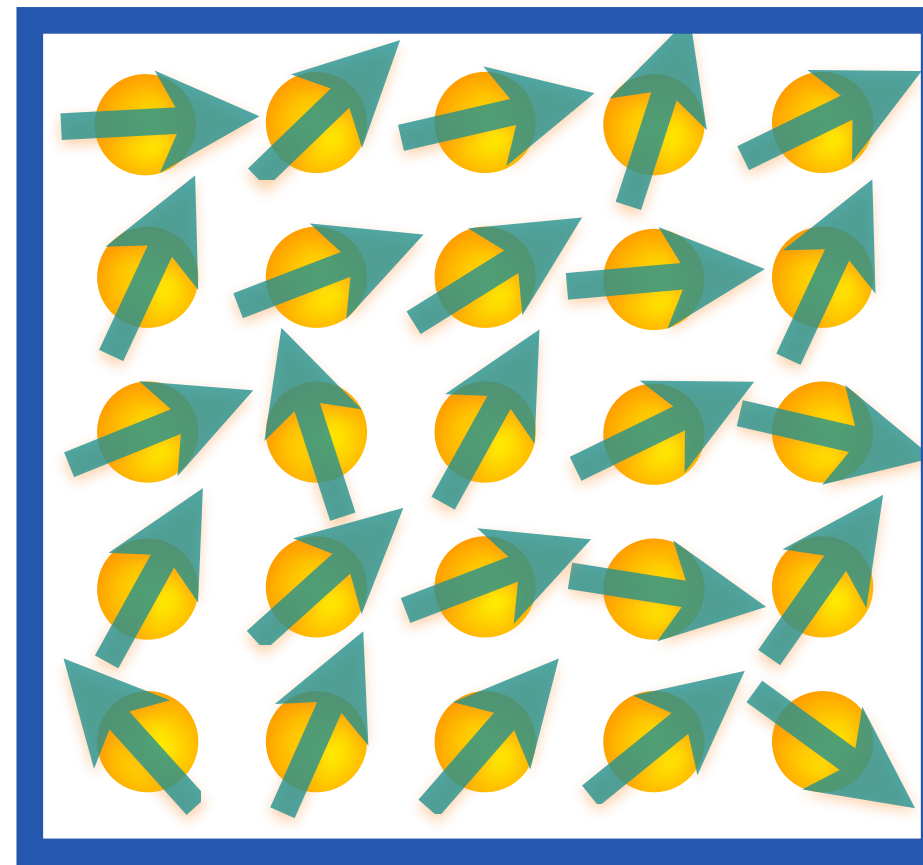
典型的な2-local長距離スピン系（横磁場Ising、XYZモデル）において、

$$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}} < c' n^{2-2\alpha}, \quad (1 < \alpha < 2)$$

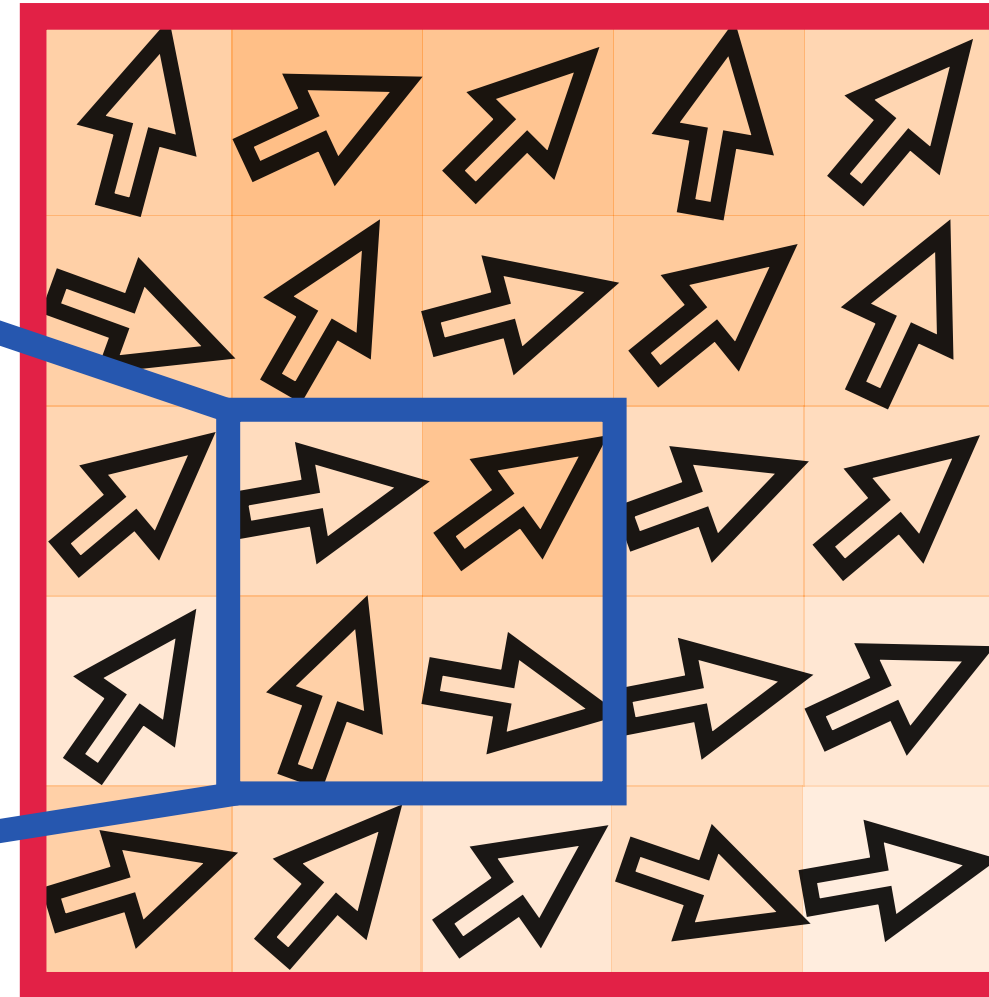
$\alpha > 3/2$ ならば、エネルギー拡散は通常拡散

$\alpha < 3/2$ では？：ゆらぐ流体力学による有効記述 → Levy拡散

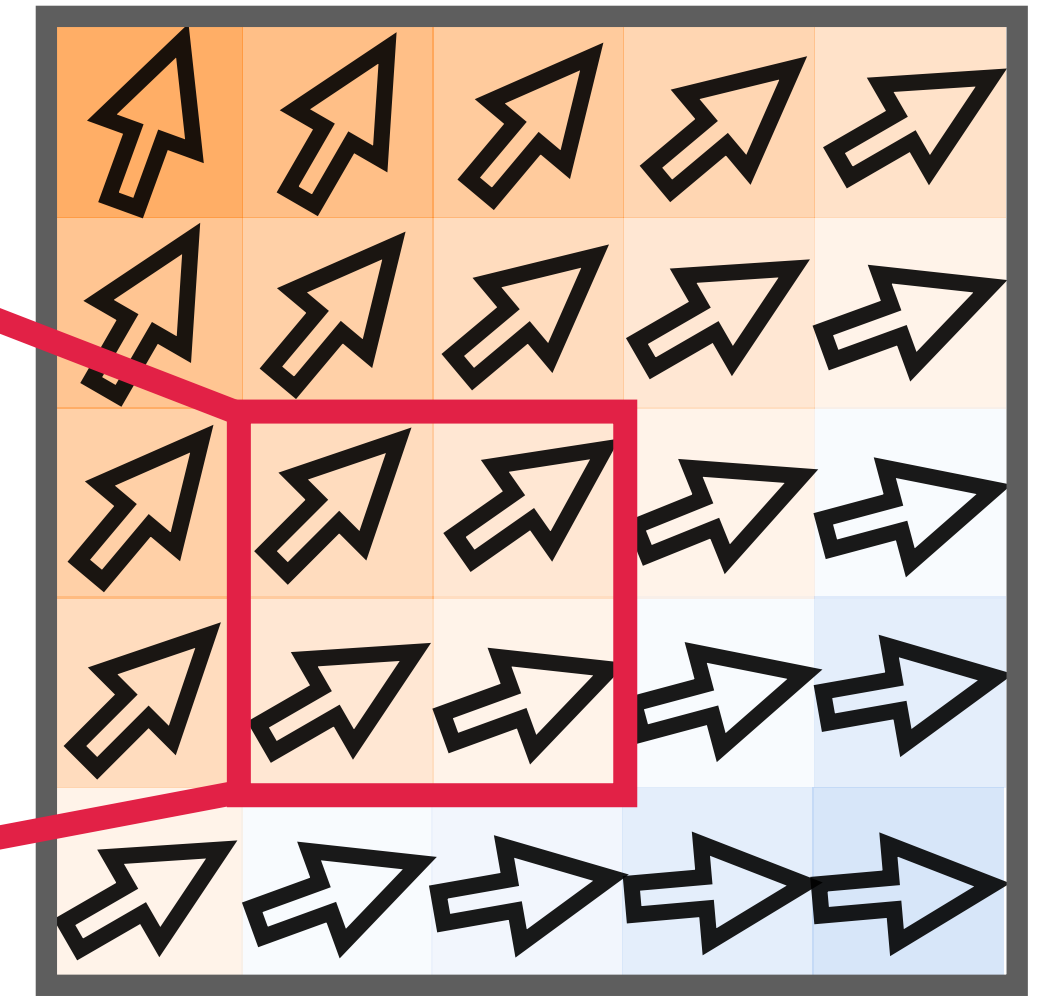
短距離相互作用系におけるゆらぐ流体力学



ミクロスケール
(力学)



メソスケール
(ゆらぐ流体力学)



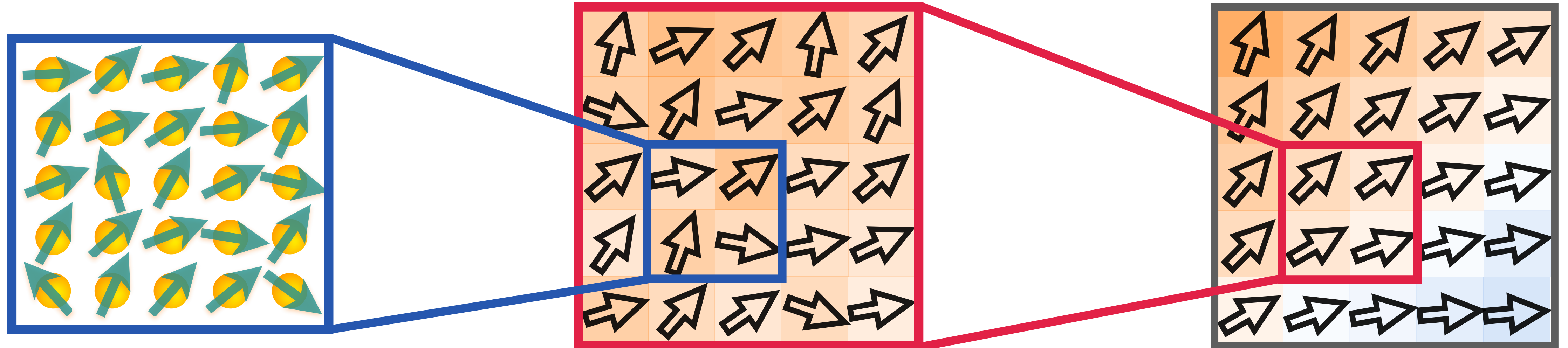
マクロスケール
(流体力学)

- ✓ 2次元流体の粘性係数の発散
- ✓ 低次元格子系での熱伝導率の発散
- ✓ 非平衡定常状態での長距離相関

マクロ流体では記述できない

→ メソスケールのゆらぎが重要

短距離相互作用系におけるゆらぐ流体力学



ミクロスケール
(力学)

射影演算子法
Zwanzig Phys. Rep. (1961)
Saito et al., PRL (2021)

メソスケール
(ゆらぐ流体力学)

動的繰り込み群
Forester, Nelson, Stephen
Phys. Rep. (1977)

マクロスケール
(流体力学)

$$\partial_t u_a(x, t) = -\partial_x \left[J_a(\{u\}) - \sum_{a'} D_{a,a'} \partial_{x'} u_a(x, t) + \xi_{a,x}(t) \right]$$

局所的な保存量 平衡カレント a' 散逸項 ゆらぎ

✓ 長距離相互作用スピン系では??

✓ $\alpha < 3/2$ での熱伝導率の発散

$$\partial_t u_a(x, t) = -\partial_x \left[\sum_{a'} \int dx' \tilde{D}_{a,a'}(x - x') \partial_{x'} u_{a'}(x', t) + \xi_{a,x}(t) \right]$$

HN & K.Saito, PRL (2025) 非局所的な拡散項 (長距離性を反映)

長距離相互作用系におけるゆらぐ流体力学

● ゆらぐ流体力学方程式

HN & K.Saito, PRL (2025)

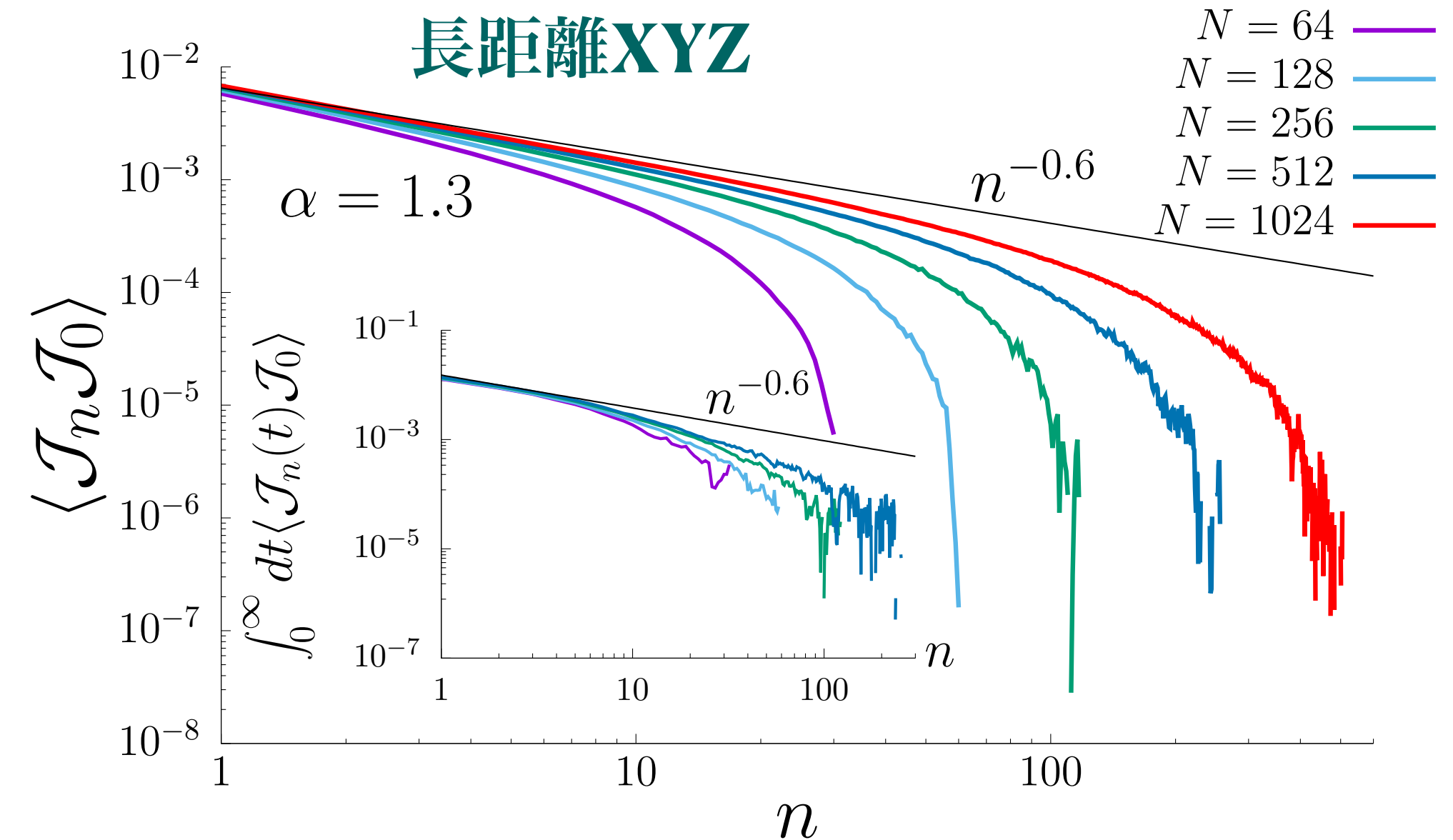
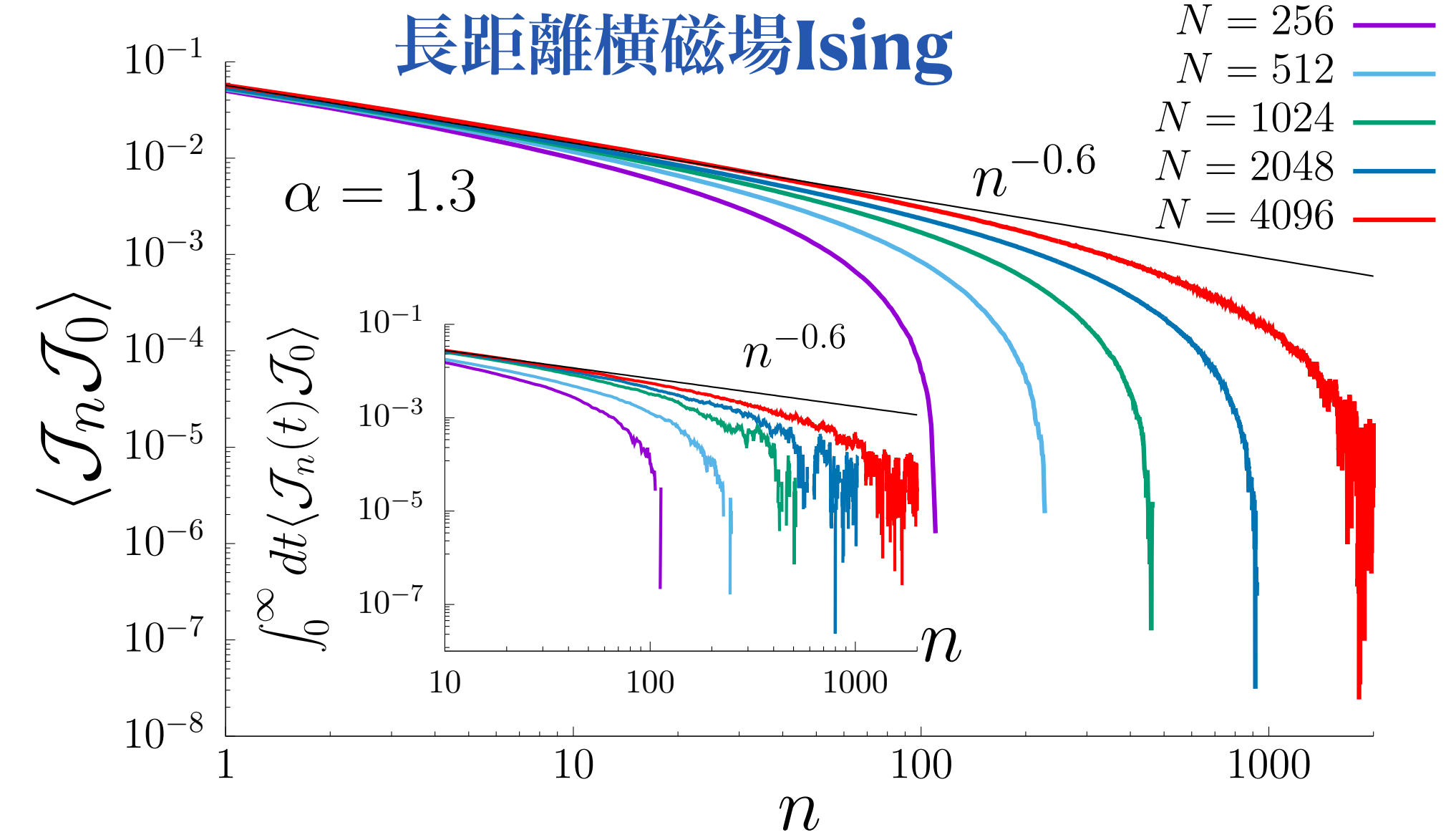
$$\partial_t \epsilon_n(t) = \nabla_n \left(\sum_m D_{n-m} \nabla_m \epsilon_m + \xi_n(t) \right)$$

$$\langle \xi_n(t) \xi_m(t') \rangle = 2D_{n-m} \delta(t - t')$$

$$D_n = T^{-2} c_V^{-1} \int_0^\infty dt \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle$$

定理 2

$$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}} < c' n^{2-2\alpha}$$



長距離相互作用系におけるゆらぐ流体力学

• ゆらぐ流体力学方程式

HN & K.Saito, PRL (2025)

$$\partial_t \epsilon_n(t) = \nabla_n \left(\sum_m D_{n-m} \nabla_m \epsilon_m + \xi_n(t) \right)$$

$$\langle \xi_n(t) \xi_m(t') \rangle = 2D_{n-m} \delta(t - t')$$

$$D_n = T^{-2} c_V^{-1} \int_0^\infty dt \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle \sim n^{2-2\alpha}$$

定理 2 は最適な上限！

$$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}} \sim n^{2-2\alpha}$$

Fourier変換

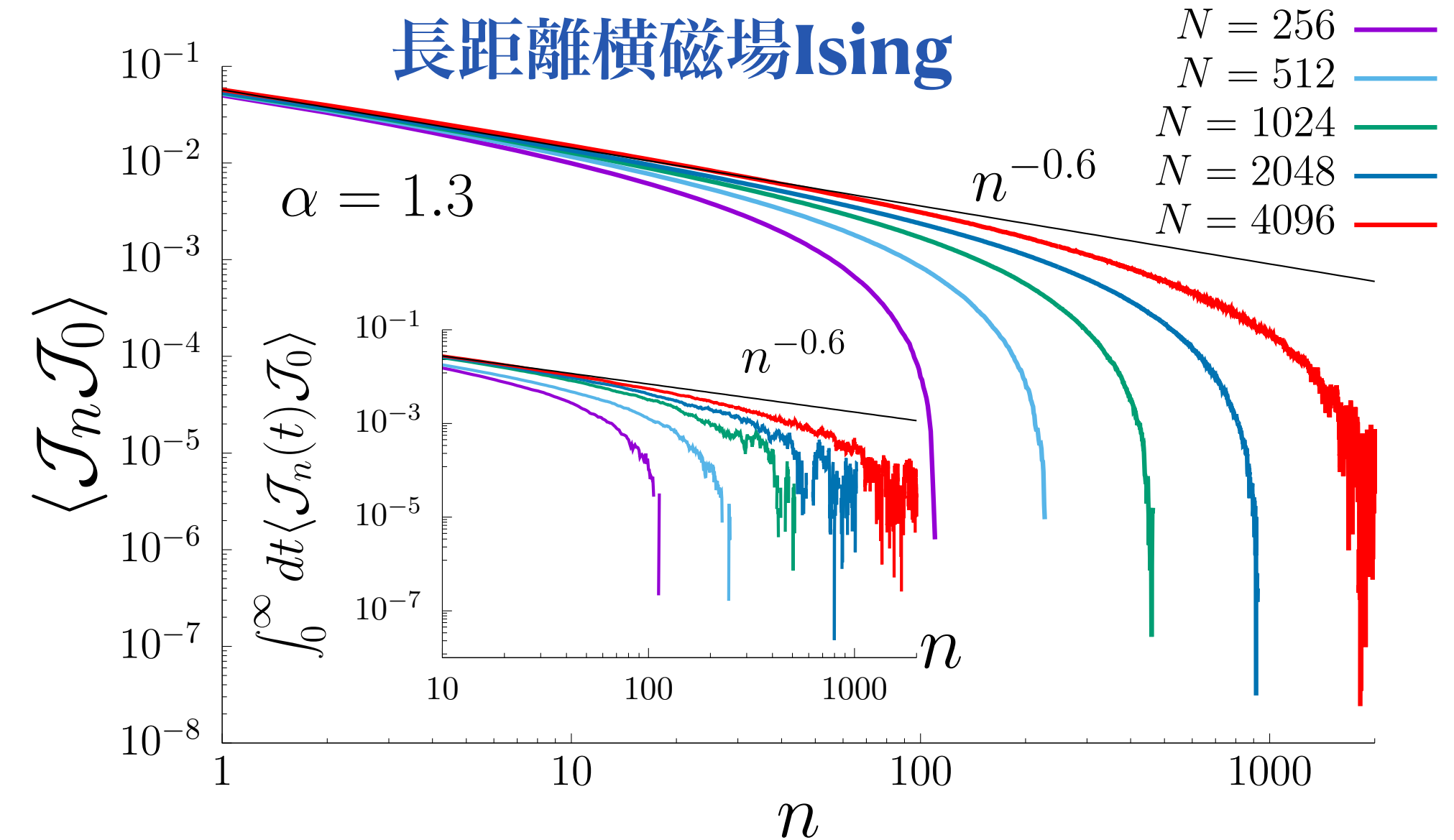
$$\langle \delta \tilde{\epsilon}(k, t) \delta \epsilon_0 \rangle_{\text{eq}} \sim k^2 k^{2\alpha-3} \langle \delta \tilde{\epsilon}(k, t) \delta \epsilon_0 \rangle_{\text{eq}}$$

Levy拡散

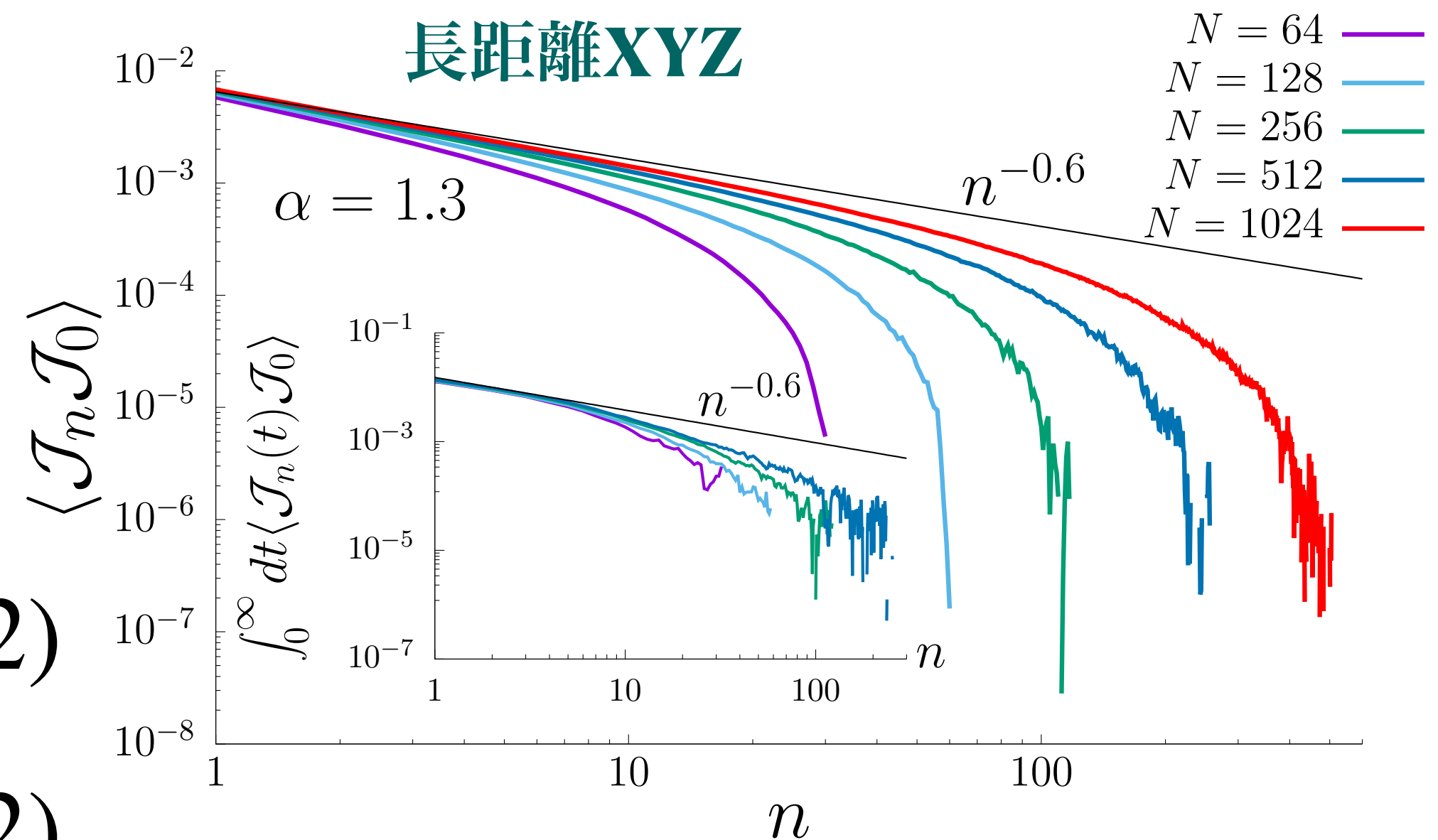
$$\langle \delta \epsilon_n(t) \delta \epsilon_0(0) \rangle_{\text{eq}} \sim \begin{cases} t^{-1/(2\alpha-1)} f\left(\frac{n}{t^{1/(2\alpha-1)}}\right) & (\alpha < 3/2) \\ t^{-1/2} f\left(\frac{n}{t^{1/2}}\right) & (\alpha \geq 3/2) \end{cases}$$

Gauss拡散

長距離横磁場Ising

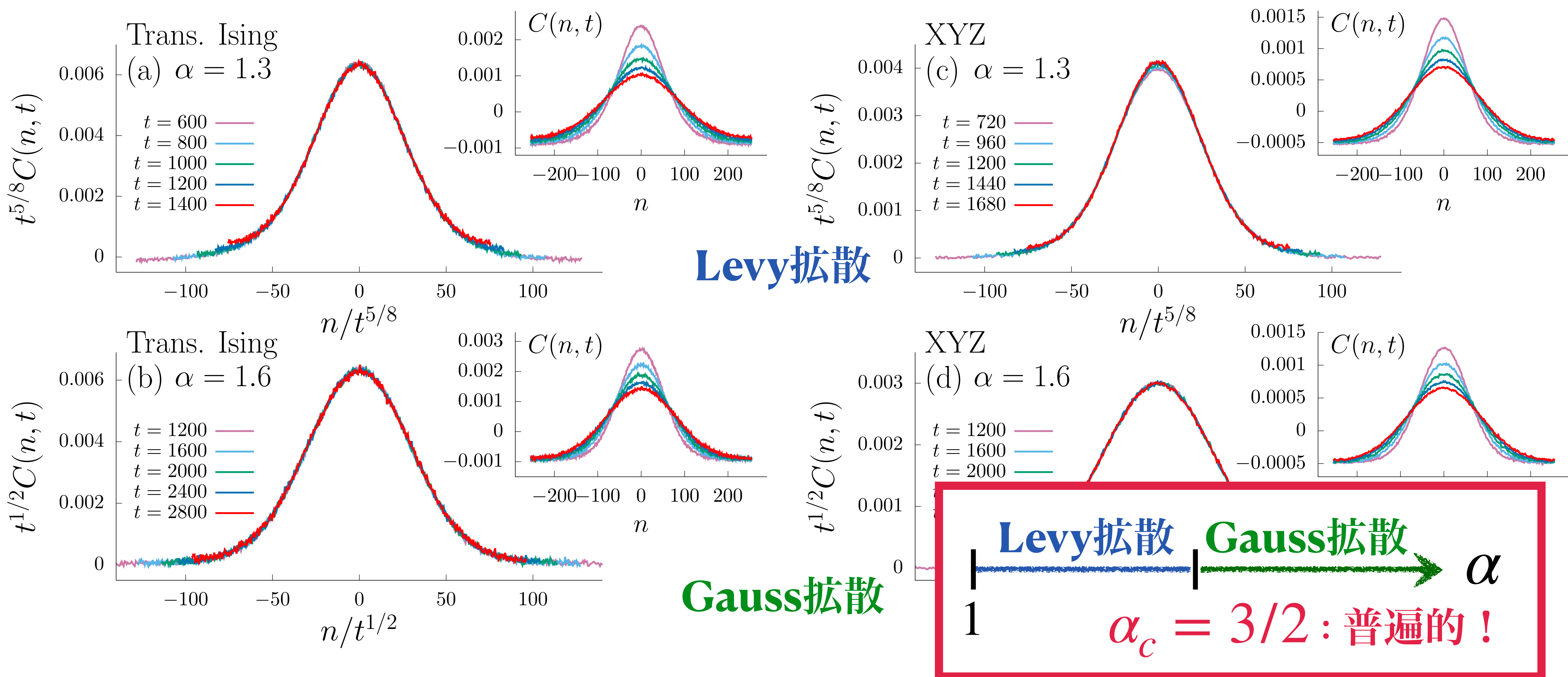


長距離XYZ



長距離相互作用スピン系におけるエネルギー拡散

✓ エネルギーの時空相関： $C(n, t) := \langle \delta\epsilon_n(t) \delta\epsilon_0 \rangle_{\text{eq}}$



1次元長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散：全体の流れ

✓ 通常拡散 → 熱伝導率（Green-Kubo公式）が有限値に収束

$$\kappa_N = \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty dt \sum_n \langle \mathcal{J}_n^\epsilon(t) \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$$

$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}}$ が重要！

定理1：キュムラントクラスタリング定理

k -localな長距離系で、 $\alpha > D, T > T_c$ のとき、

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c \leq \text{const.}$$

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{:connected}}} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_p}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

定理2：カレント2点相関の上限

典型的な2-local長距離スピン系（横磁場Ising、XYZモデル）において、

$$\langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^\epsilon \rangle_{\text{eq}} < c' n^{2-2\alpha}, \quad (1 < \alpha < 2)$$

$\alpha > 3/2$ ならば、エネルギー拡散は通常拡散

$\alpha < 3/2$ では？：ゆらぐ

Levy拡散 Gauss拡散 → α

$\alpha_c = 3/2$: 普遍的！

Outline

1. 長距離相互作用系の概要

2. 長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散

HN & K.Saito, PRL (2025)

- モデル&ダイナミクス：横磁場Ising・XYZ
- 1次元系：長距離相互作用系におけるカレント
- 熱伝導率（Green-Kubo公式）の発散
- キュムラントクラスタリング定理
- 長距離相互作用系のゆらぐ流体力学：異常拡散の有効理論
- 高次元の場合

3. 長距離相互作用スピン系のスピン拡散

HN & K.Saito, in preparation

- モデル&ダイナミクス：XXZ

4. 冪指数 $\alpha < D$ におけるエネルギー・スピン輸送

5. まとめ

D 次元長距離相互作用系におけるGreen-Kubo公式

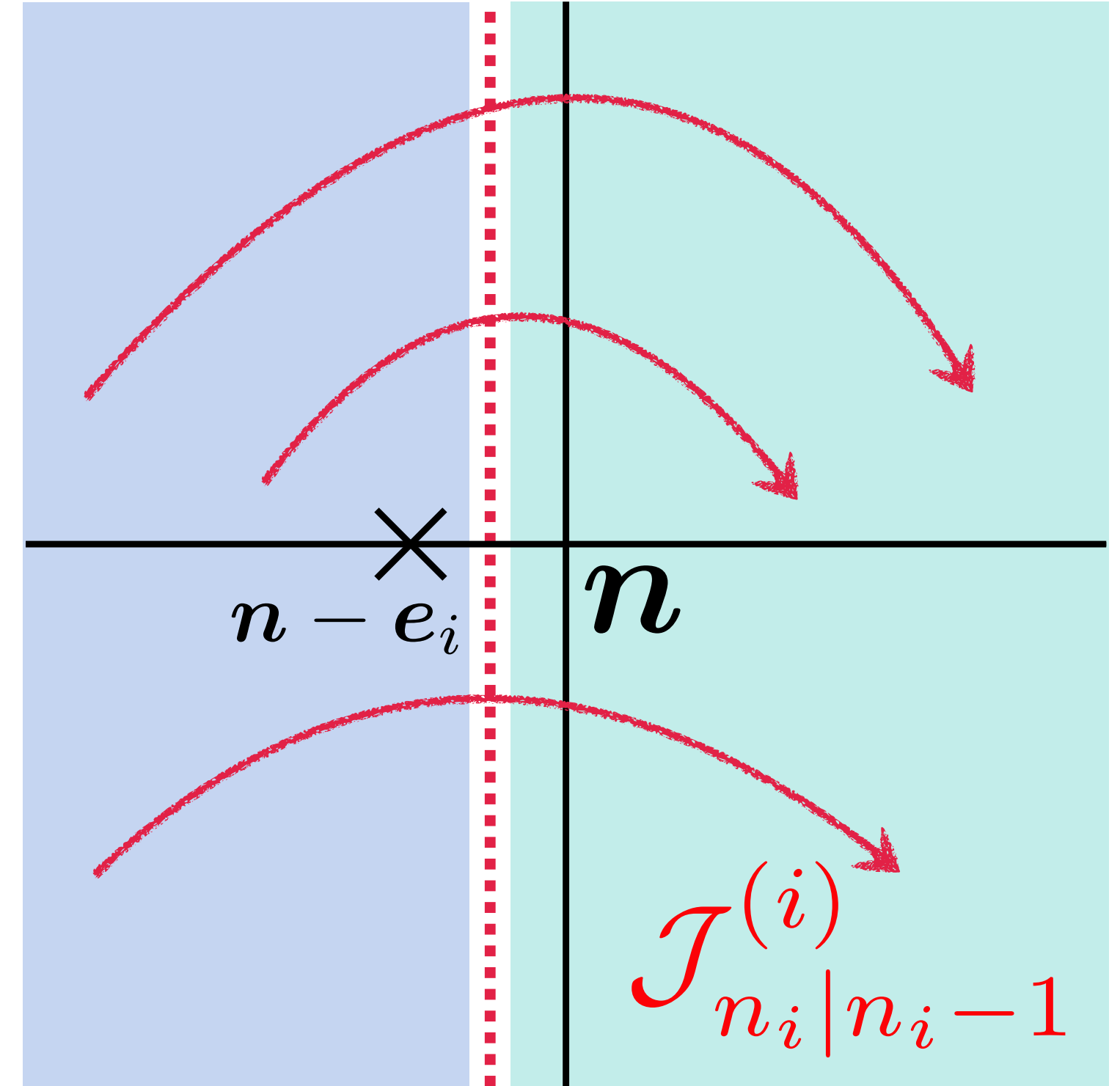
✓ Green-Kubo公式： $\mathcal{D} = \frac{1}{c_V k_B T^2} \int_0^\infty dt C_N^{(D)}(t)$

HN & K.Saito, PRL (2025)

$$C_N^{(D)}(t) = N^{1-D} \sum_{i=1}^D \sum_{n_i=1}^N \langle \mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{(i)}(t) \mathcal{J}_{0|-1}^{(i)} \rangle$$

$\mathcal{D}$ ：拡散係数

$$\mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{(i)} = \sum_{\substack{k:k_i \geq n_i \\ \ell:l_i < n_i}} t_{k \leftarrow \ell}$$



定理3： D 次元長距離相互作用スピン系のカレント相関の上限

HN & K.Saito, PRL (2025)

$D (\geq 2)$ 次元の典型的な2-local長距離相互作用スピン系（横磁場Ising、XYZモデル）について、 $\alpha > D, T > T_c$ においては、以下が成り立つ： $C_N^{(D)}(0) < \infty$

$C_N^{(D)}(t)$ が可積分なら、 $\alpha > D$ において、高次元では必ず通常拡散！

ここまでのまとめ

長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散

HN & K.Saito, PRL (2025)

- 典型的な2-local 長距離相互作用古典スピン系（長距離横磁場Ising、XYZモデル）におけるエネルギー拡散のユニバーサルな振る舞い
- メカニズム：**カレント同時刻相関の異常な増大**
- 長距離相互作用系におけるキュムラントクラスタリング定理
- 1次元：ゆらぐ流体力学の有効理論を構築
 1. $\alpha \geq \alpha_c = 3/2$: **Gauss(通常)拡散**
 2. $\alpha < \alpha_c = 3/2$: **Levy(異常)拡散**
- $D (\geq 2)$ 次元： $\alpha > D$ では**Gauss**拡散

1次元	$\alpha < 1$	$1 < \alpha < 3/2$	$3/2 < \alpha$
	—	異常拡散	通常拡散
D 次元 ($D \geq 2$)	$\alpha < D$	$D < \alpha$	α : 冪指数
	—	通常拡散	

Outline

1. 長距離相互作用系の概要

2. 長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散

HN & K.Saito, PRL (2025)

- モデル&ダイナミクス：横磁場Ising・XYZ
- 1次元系：長距離相互作用系におけるカレント
- 熱伝導率（Green-Kubo公式）の発散
- キュムラントクラスタリング定理
- 長距離相互作用系のゆらぐ流体力学：異常拡散の有効理論
- 高次元の場合

3. 長距離相互作用スピン系のスピン拡散

HN & K.Saito, in preparation

- モデル&ダイナミクス：XXZ

4. 冪指数 $\alpha < D$ におけるエネルギー・スピン輸送

5. まとめ

長距離相互作用古典スピン系におけるスピン拡散

- Hamiltonian : 2-localな1次元長距離古典スピン系

$\alpha > 1$: 示量性を仮定

❖ 長距離XXZモデル : S^z の和が保存

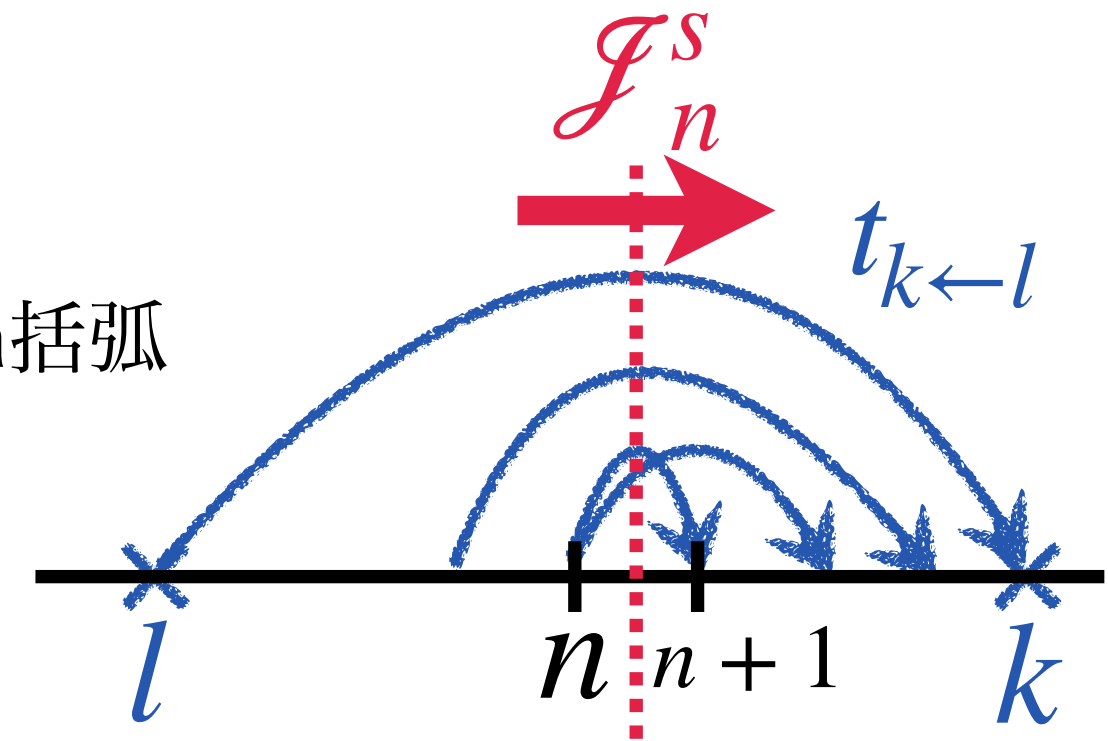
$$H = - \sum_{i,j} \frac{1}{d_{i,j}^\alpha} [J(S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) + \Delta S_i^z S_j^z]$$

- スピンについての連続の式 HN & K.Saito, in preparation

$$\partial_t S_n^z = -(\mathcal{J}_n^S - \mathcal{J}_{n-1}^S), \quad \mathcal{J}_n^S := - \sum_{l \leq n < k} t_{k \leftarrow l}^S \quad t_{k \leftarrow l}^S := 2\{S_k^z, \epsilon_l\}$$

$\{, \}$: スピン系のPoisson括弧

- スピンの時空相関 $\langle S_n^z(t) S_0^z \rangle_{\text{eq}}$ を調べる



1次元長距離相互作用スピン系のスピン拡散：全体の流れ 22

✓ 通常拡散→スピン伝導率（Green-Kubo公式）が有限値に収束

$$\kappa_N^S = \Lambda^{-1} \int_0^\infty dt \sum_n \langle \mathcal{J}_n^S(t) \mathcal{J}_0^S \rangle_{\text{eq}}$$

$\langle \mathcal{J}_n^S \mathcal{J}_0^S \rangle_{\text{eq}}$ が重要！

定理1：キュムラントクラスタリング定理

k -localな長距離系で、 $\alpha > D, T > T_c$ のとき、

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c \leq \text{const.}$$

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{:connected}}} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_p}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

定理4：カレント2点相関の上限

長距離XXZモデル（全 z スピンが保存）
において、

$$\langle \mathcal{J}_n^S \mathcal{J}_0^S \rangle_{\text{eq}} < c' n^{2-2\alpha}, \quad (1 < \alpha < 2)$$

$\alpha > 3/2$ ならば、スピン拡散は通常拡散

$\alpha < 3/2$ では？：ゆらぐ流体力学による有効記述→Levy拡散

Outline

1. 長距離相互作用系の概要

2. 長距離相互作用スピン系のエネルギー拡散

HN & K.Saito, PRL (2025)

- モデル&ダイナミクス：横磁場Ising・XYZ
- 1次元系：長距離相互作用系におけるカレント
- 熱伝導率（Green-Kubo公式）の発散
- キュムラントクラスタリング定理
- 長距離相互作用系のゆらぐ流体力学：異常拡散の有効理論
- 高次元の場合

3. 長距離相互作用スピン系のスピン拡散

HN & K.Saito, in preparation

- モデル&ダイナミクス：XXZ

4. 冪指数 $\alpha < D$ におけるエネルギー・スピン輸送

5. まとめ

Energy & Spin Diffusion in the regime $\alpha < D$ with Kac factor

- Hamiltonian : 1-dim 2-local Classical LRI Spin Systems with the Kac factor

❖ LRI XXZ model

$$H = - \sum_{i,j} \frac{1}{\mathcal{N}_\alpha (d_{i,j})^\alpha} [J(S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) + \Delta S_i^z S_j^z]$$

$$\mathcal{N}_\alpha = \sum_{r=1}^{N/2} r^{-\alpha} \quad : \text{Kac factor}$$

- Continuity Eq. for Energy and Spin

$$\partial_t u_n^a = - (\mathcal{J}_n^a - \mathcal{J}_{n-1}^a), \quad \mathcal{J}_n^a := - \sum_{l \leq n < k} t_{k \leftarrow l}^a \quad t_{k \leftarrow l}^a := \{u_k^a, \epsilon_l\}$$

$$u_n^\epsilon = \epsilon_n, u_n^s = S_n^z \quad (a = \epsilon, s)$$

$\{, \}$: Spin Poisson bracket

- We would like to investigate the **Space-time Correlation** $\langle u_n^a(t) u_0^a \rangle_{\text{eq}}$

Cumulant Power-law Clustering for the Systems with Kac factor

Thm.5 : Cumulant Power-law Clustering Theorem for LRI Systems with Kac factor

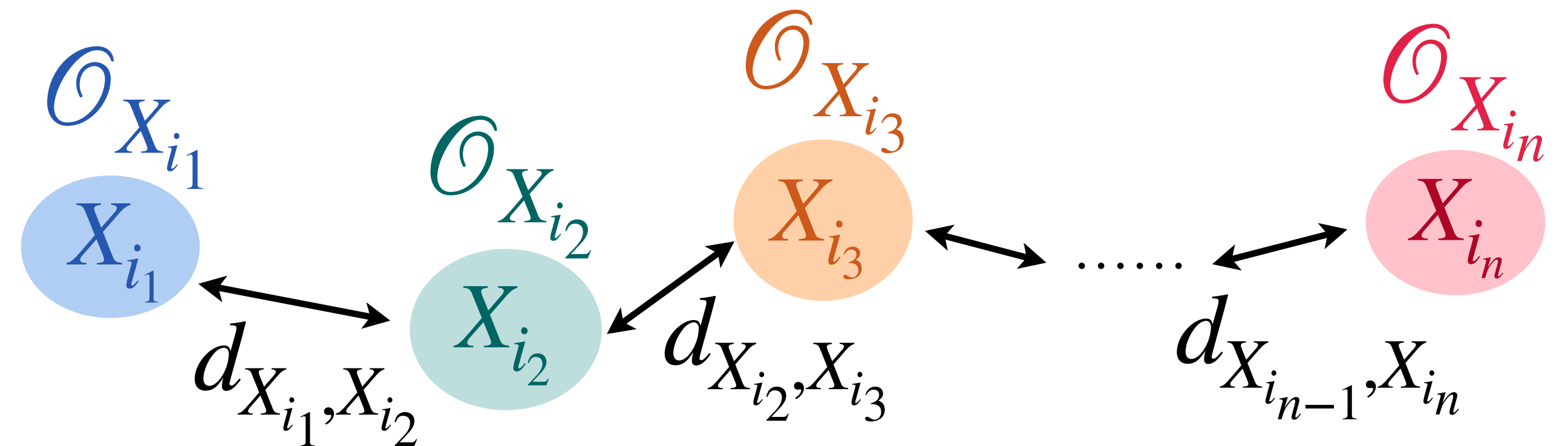
HN & K.Saito, in preparation

Consider k -local LRI systems with the Kac factor on D -dim lattices. For $0 \leq \alpha < D, T > \tilde{T}_c$, the following inequality holds:

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c \leq \text{const.} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{:connected}}} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_p}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{\mathcal{N}_\alpha(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

$$\langle \mathcal{O}_{X_1} \dots \mathcal{O}_{X_n} \rangle_c := \left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \right|_{\vec{\lambda}=0} \mu(\vec{\lambda})$$

$$\mu(\vec{\lambda}) = \ln \langle \left(\sum_i \lambda_i \mathcal{O}_{X_i} \right) \rangle$$



Proof: high-temperature cluster expansion technique

Upper Bound on Energy and Spin Current Correlation

26

Thm.6 : Upper Bound on Current Correlation for 1-Dim LRI Systems with Kac factor

HN & K.Saito, in preparation

For 1-dim LRI XXZ model with the Kac factor, assuming $T > \tilde{T}_c$, the equal-time equilibrium energy and spin current correlation $\langle \mathcal{J}_n^a \mathcal{J}_0^a \rangle_{\text{eq}}$, ($a = s, \epsilon$) is upper-bound as

$$\langle \mathcal{J}_n^a \mathcal{J}_0^a \rangle_{\text{eq}} < \text{const.}, \quad (0 \leq \alpha < 1, \alpha \neq 1/2).$$

- The convergence of Green-Kubo integral is poorly understood because of the strong finite size effect.
- The physical meaning of this upper bound remains unclear.

Thm.7 : Upper Bound on Current Correlation for D -dim LRI Spin Systems with Kac factor

HN & K.Saito, in preparation

For $D (\geq 2)$ -dim LRI XXZ model with the Kac factor, assuming $T > \tilde{T}_c$, the equal-time total energy and spin current correlation is finite :

$$C_N^{a,(D)}(0) = N^{1-D} \sum_{i=1}^D \sum_{n_i=1}^N \langle \mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{a,(i)} \mathcal{J}_{0|-1}^{a,(i)} \rangle < \infty, \quad (0 \leq \alpha < D, \alpha \neq D/2, D/2 + 1).$$

まとめ

長距離相互作用スピン系のエネルギー・スピン拡散

HN & K.Saito, PRL (2025) & in preparation

- 長距離相互作用スピン系における輸送現象の普遍的なふるまい
 - ✓ 長距離相互作用横磁場Ising・XY・XYZモデルのエネルギー拡散
 - ✓ 長距離相互作用XXZモデルのスピン拡散
- メカニズム：**同時刻カレント相関の異常な増大**
- キュムラントクラスタリング定理
- ゆらぐ流体力学による有効理論

1次元	$\alpha < 1$	$1 < \alpha < 3/2$	$3/2 < \alpha$
	—	異常拡散	通常拡散
D 次元 ($D \geq 2$)	$\alpha < D$	$D < \alpha$	α : 冪指数
	—	通常拡散	

今後の課題

- 非平衡定常状態でのゆらぐ流体記述の妥当性
- 長距離相互作用スピン系の非可積分性、Long-time tailがないことの厳密証明
- ばね粒子系（ノルム≠有限），Boson系（サイトあたりのエネルギー≠有限）での理論
- $\alpha < D$ でのふるまい：時間発展の扱いが難しい、どこからが平均場的なのか？

Backup Slides

証明：長距離系におけるキュムラントクラスタリング定理

✓ k -local LRI Hamiltonian :

$$H = \sum_{Z: |Z| \leq k} h_Z \quad Z: \text{相互作用するサイトの集合} \quad J_{i,j} := \sum_{Z: Z \ni \{i,j\}} \|h_Z\| \leq \frac{g}{(d_{i,j} + 1)^\alpha} : \text{LRI}$$

✓ Multi-phase spaces technique :

$\tilde{\rho} = \bigotimes_{i=1}^N \rho^{(i)}$: multi-phase spaces 上での分布関数

$O_X^{(i)}$: i 番目の phase space で、領域 X 上で定義された局所的な物理量

$$O_X^{(i,j)} := O_X^{(i)} - O_X^{(j)}, \quad (i < j)$$

$$\tilde{O}_{X_1, X_2, \dots, X_n}^{(1,2,\dots,n)} := O_{X_1}^{(1)} \prod_{j=2}^n \left(\sum_{k=1}^{j-1} O_{X_j}^{(k,j)} \right) : n\text{-th cumulant operator}$$

$$\langle O_{X_1} \dots O_{X_n} \rangle_c = \text{tr} \left(\tilde{\rho} \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1,\dots,n)} \right) : n\text{-th cumulant}$$

証明：長距離系におけるキュムラントクラスタリング定理

Lemma 1

$$Z_1, \dots, Z_m \text{ が } X_1, \dots, X_n \text{ と連結でないとき、 } \text{tr} \left(\tilde{O}_{Z_1} \dots \tilde{O}_{Z_m} \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} \right) = 0$$

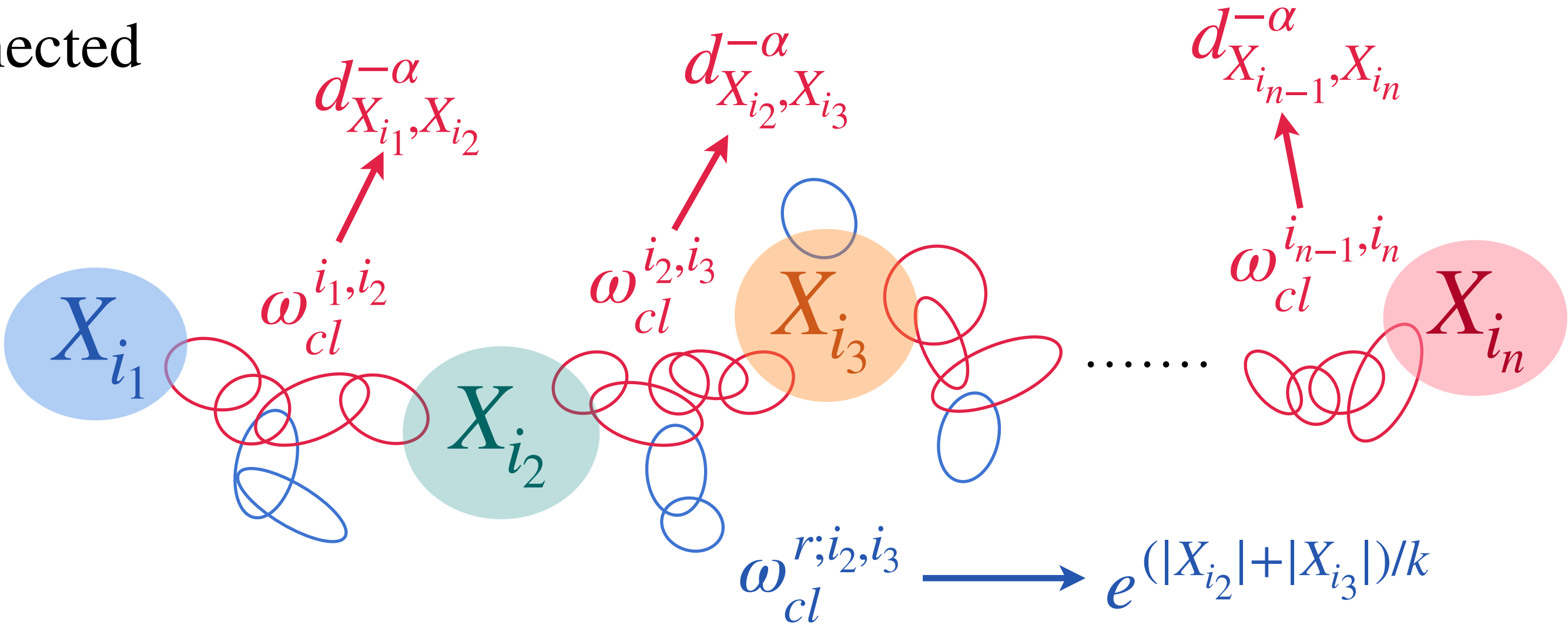
$$\tilde{\rho} = \frac{e^{-\beta \tilde{H}}}{\mathcal{Z}^n} \quad : \text{ multi-phase spaces での平衡分布} \quad \tilde{H} = \bigotimes_{i=1}^n H^{(i)}$$

→ 連結成分のみによる cluster expansion が可能：Lemma 1 より、非連結成分は消失

$$\begin{aligned} \langle O_{X_1} \dots O_{X_n} \rangle_c &= \text{tr} \left(\tilde{\rho} \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} \right) = \frac{1}{\mathcal{Z}^n} \text{tr} \left(e^{-\beta \tilde{H}} \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}^n} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{Z_1, \dots, Z_m \\ \text{:connected}}} \frac{(-\beta)^m}{m!} \text{tr} \left(\tilde{h}_{Z_1} \dots \tilde{h}_{Z_m} \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} \right) \end{aligned}$$

証明：長距離系におけるキュムラントクラスタリング定理

$$\langle O_{X_1} \dots O_{X_n} \rangle_c = \frac{1}{\mathcal{Z}^n} \sum_{m=0}^\infty \sum_{\substack{Z_1, \dots, Z_m \\ \text{:connected}}} \frac{(-\beta)^m}{m!} \text{tr} \left(\tilde{h}_{Z_1} \dots \tilde{h}_{Z_m} \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} \right)$$



$$\leq \text{const.} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{:connected}}} \prod_{p=1}^{n-1} \|\mathcal{O}_{X_p}\| \frac{|X_{i_p}| |X_{i_{p+1}}| e^{(|X_{i_p}| + |X_{i_{p+1}}|)/k}}{(d_{X_{i_p}, X_{i_{p+1}}})^\alpha}$$

証明：長距離系におけるキュムラントクラスタリング定理

✓ multi-phase spaceでの n -th cumulantの表式の証明

$$\langle O_{X_1} \dots O_{X_n} \rangle_c = \text{tr} \left(\tilde{\rho} \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} \right) \quad \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} := o_{X_1}^{(1)} \prod_{j=2}^n \left(\sum_{k=1}^{j-1} o_{X_j}^{(k, j)} \right)$$

✓ Fact： n -th momentの分解

$$\langle O_{X_1} \dots O_{X_n} \rangle = \langle O_{X_1} \dots O_{X_n} \rangle_c + D_n$$

D_n ： $O_{X_1}, \dots, O_{X_n}$ の結合キュムラントによる分解の全ての組み合わせ

e.g.
$$D_2 = \langle O_{X_1} \rangle_c \langle O_{X_2} \rangle_c$$
$$D_3 = \langle O_{X_1} O_{X_2} \rangle_c \langle O_{X_3} \rangle_c + \langle O_{X_2} O_{X_3} \rangle_c \langle O_{X_1} \rangle_c + \langle O_{X_3} O_{X_1} \rangle_c \langle O_{X_2} \rangle_c + \langle O_{X_1} \rangle_c \langle O_{X_2} \rangle_c \langle O_{X_3} \rangle_c$$

$$\langle O_{X_1} \dots O_{X_n} \rangle_c = \langle O_{X_1} \dots O_{X_n} \rangle - D_n$$

$$\langle O_{X_1} \dots O_{X_n} \rangle = \text{tr} \left(\tilde{\rho} \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^u \right)$$

multi-phase spaceでは、以下が成り立つことを示す。

$$\tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} = \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^u - \mathcal{D}_n \quad \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^u := o_{X_1}^{(1)} o_{X_2}^{(1)} \prod_{j=3}^n \left(o_{X_j}^{(1)} + \sum_{k=2}^{j-1} o_{X_j}^{(k, j)} \right)$$

証明：長距離系におけるキュムラントクラスタリング定理

✓ 示したいこと： $\tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} = \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^u - \mathcal{D}_n$

$$\tilde{O}_{X_1, X_2, X_3}^{(1, 2, 3)} = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1, 2)} (O_{X_3}^{(1, 2)} + O_{X_3}^{(1, 3)})$$

✓ 帰納法： $n = 3$ で示す

$$\tilde{O}_{X_1, X_2, X_3}^u = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1)} (O_{X_3}^{(1)} + O_{X_3}^{(2, 3)})$$

$$\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2(O_{X_3}^{(1, 3)} + O_{X_3}^{(2, 3)}) + (\tilde{O}_{X_1, X_2}^{(1, 2)} + \mathcal{D}_2)O_{X_3}^{(3)}$$

$$\tilde{O}_{X_1, X_2}^{(1, 2)} = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1, 2)}$$

O_{X_3} が2次以上の
キュムラントに寄与

O_{X_3} が1次の
キュムラントに寄与

$$\tilde{O}_{X_1, X_2}^u = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1)} \quad \mathcal{D}_2 = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(2)}$$

$$\langle O_{X_1} \rangle_c \langle O_{X_2} O_{X_3} \rangle_c + \langle O_{X_2} \rangle_c \langle O_{X_1} O_{X_3} \rangle_c \quad \langle O_{X_1} O_{X_2} \rangle_c \langle O_{X_3} \rangle_c + \langle O_{X_1} \rangle_c \langle O_{X_2} \rangle_c \langle O_{X_3} \rangle_c$$



$$O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(2)} O_{X_3}^{(2, 3)} + O_{X_2}^{(1)} O_{X_1}^{(2)} O_{X_3}^{(2, 3)} \\ = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(2)} (O_{X_3}^{(1, 3)} + O_{X_3}^{(2, 3)})$$

$$O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1, 2)} O_{X_3}^{(3)} + O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(2)} O_{X_3}^{(3)} \\ = (O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1, 2)} + O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(2)}) O_{X_3}^{(3)}$$

証明：長距離系におけるキュムラントクラスタリング定理

✓ 示したいこと： $\tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} = \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^u - \mathcal{D}_n$

$$\tilde{O}_{X_1, X_2, X_3}^{(1, 2, 3)} = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1, 2)} (O_{X_3}^{(1, 2)} + O_{X_3}^{(1, 3)})$$

✓ 帰納法： $n = 3$ で示す

$$\tilde{O}_{X_1, X_2, X_3}^u = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1)} (O_{X_3}^{(1)} + O_{X_3}^{(2, 3)})$$

$$\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2(O_{X_3}^{(1, 3)} + O_{X_3}^{(2, 3)}) + (\tilde{O}_{X_1, X_2}^{(1, 2)} + \mathcal{D}_2)O_{X_3}^{(3)}$$

$$\tilde{O}_{X_1, X_2}^{(1, 2)} = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1, 2)}$$

O_{X_3} が2次以上の
キュムラントに寄与

O_{X_3} が1次の
キュムラントに寄与

$$\tilde{O}_{X_1, X_2}^u = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(1)} \quad \mathcal{D}_2 = O_{X_1}^{(1)} O_{X_2}^{(2)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{X_1, X_2, X_3}^u - \mathcal{D}_3 &= \tilde{O}_{X_1, X_2, X_3}^u - \mathcal{D}_2(O_{X_3}^{(1, 3)} + O_{X_3}^{(2, 3)}) - (\tilde{O}_{X_1, X_2}^{(1, 2)} + \mathcal{D}_2)O_{X_3}^{(3)} \\ &= \tilde{O}_{X_1, X_2}^u (O_{X_3}^{(1)} + O_{X_3}^{(2, 3)}) - \mathcal{D}_2(O_{X_3}^{(1, 3)} + O_{X_3}^{(2, 3)}) - \tilde{O}_{X_1, X_2}^u O_{X_3}^{(3)} \\ &= (\tilde{O}_{X_1, X_2}^u - \mathcal{D}_2)(O_{X_3}^{(1)} + O_{X_3}^{(2, 3)}) \\ &= \tilde{O}_{X_1, X_2}^{(1, 2)} (O_{X_3}^{(1)} + O_{X_3}^{(2, 3)}) = \tilde{O}_{X_1, X_2, X_3}^{(1, 2, 3)} \end{aligned}$$

証明：長距離系におけるキュムラントクラスタリング定理

✓ 示したいこと： $\tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} = \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^u - \mathcal{D}_n$ $\tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} := o_{X_1}^{(1)} \prod_{j=2}^n \left(\sum_{k=1}^{j-1} o_{X_j}^{(k, j)} \right)$

✓ 帰納法： n で成立を仮定 $\rightarrow n+1$ で示す

$$\tilde{O}_{X_1, \dots, X_{n+1}}^u - \mathcal{D}_{n+1} \qquad \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^u := o_{X_1}^{(1)} o_{X_2}^{(1)} \prod_{j=3}^n \left(o_{X_j}^{(1)} + \sum_{k=2}^{j-1} o_{X_j}^{(k, j)} \right)$$

$$= \tilde{O}_{X_1, \dots, X_{n+1}}^u - \mathcal{D}_n \sum_{l=1}^n o_{X_{n+1}}^{(l, n+1)} - (\tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} + \mathcal{D}_n) o_{X_{n+1}}^{(n+1)}$$

$$= \tilde{O}_{X_1, \dots, X_{n+1}}^u - \mathcal{D}_n \sum_{l=1}^n o_{X_{n+1}}^{(l, n+1)} - \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^u o_{X_{n+1}}^{(n+1)}$$

$$= (\tilde{O}_{X_1, \dots, X_{n+1}}^u - \mathcal{D}_n) \sum_{l=1}^n o_{X_{n+1}}^{(l, n+1)}$$

$$= \tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} \sum_{l=1}^n o_{X_{n+1}}^{(l, n+1)} = \tilde{O}_{X_1, \dots, X_{n+1}}^{(1, \dots, n+1)}$$

Lemma 2

$$\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_n \sum_{l=1}^n o_{X_{n+1}}^{(l, n+1)} + (\tilde{O}_{X_1, \dots, X_n}^{(1, \dots, n)} + \mathcal{D}_n) o_{X_{n+1}}^{(n+1)}$$

証明：長距離系におけるキュムラントクラスタリング定理

Lemma 2

$$\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_n \sum_{l=1}^n o_{X_{n+1}}^{(l,n+1)} + (\tilde{O}_{X_1,\dots,X_n}^{(1,\dots,n)} + \mathcal{D}_n) o_{X_{n+1}}^{(n+1)}$$
$$\tilde{O}_{X_1,\dots,X_n}^{(1,\dots,n)} := o_{X_1}^{(1)} \prod_{j=2}^n \left(\sum_{k=1}^j o_{X_j}^{(k,j)} \right)$$

$O_{X_{n+1}}$ が 2 次以上の

$O_{X_{n+1}}$ が 1 次の

キュムラントに寄与

キュムラントに寄与

$\mathcal{D}_n$ の $m (\leq n)$ 個のキュムラントへの分解

$$\tilde{O}_{X_{i(1)},\dots,X_{i(l_1)}}^{(i(1),\dots,i(l_1))} \tilde{O}_{X_{i(l_1+1)},\dots,X_{i(l_2)}}^{(i(l_1+1),\dots,i(l_2))} \dots \tilde{O}_{X_{i(l_{m-1}+1)},\dots,X_{i(l_m)}}^{(i(l_{m-1}+1),\dots,i(l_m))}$$



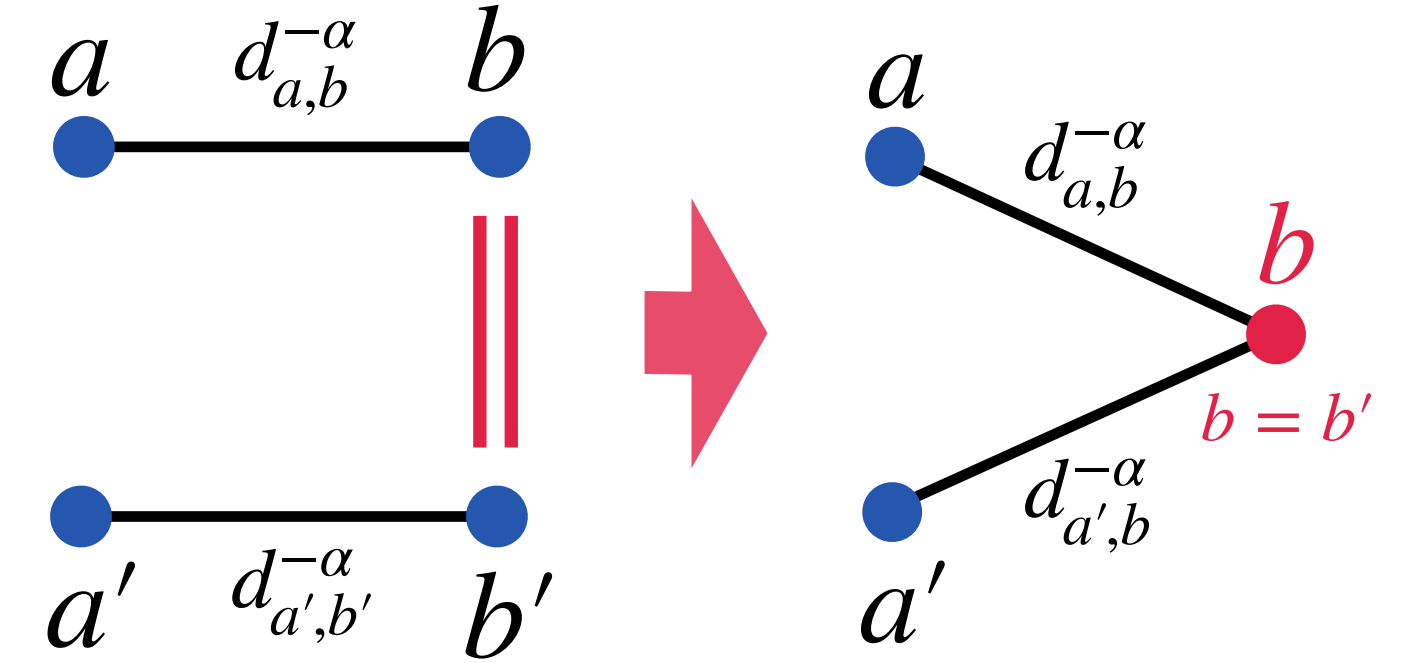
$$\tilde{O}_{X_{i(l_{p-1}+1)},\dots,X_{i(l_p)}}^{(i(l_{p-1}+1),\dots,i(l_p))} \left(o_{X_{n+1}}^{(i(l_{p-1}+1),n+1)} + \dots + o_{X_{n+1}}^{(i(l_p),n+1)} \right) = \tilde{O}_{X_{i(l_{p-1}+1)},\dots,X_{i(l_p)},X_{n+1}}^{(i(l_{p-1}+1),\dots,i(l_p),n+1)}$$

エネルギーカレント相関の上限：長距離横磁場Isingモデル

$$\langle \mathcal{I}_n \mathcal{I}_0 \rangle_{\text{eq.}} = \sum_{\substack{k \geq n > l \\ k' \geq 0 > l'}} \sum_{\substack{\{a,b\} = \{k,l\} \\ \{a',b'\} = \{k',l'\}}} \epsilon^{ab} \epsilon^{a'b'} \frac{J^2 h^2}{4} \frac{\langle S_a^x S_b^y S_{a'}^x S_{b'}^y \rangle_{\text{eq.}}}{d_{a,b}^\alpha d_{a',b'}^\alpha}$$

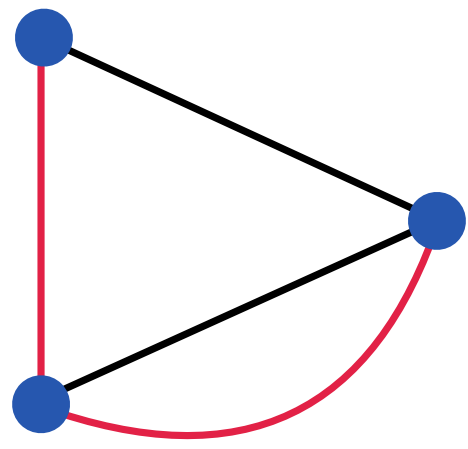
$$\langle S_i^y S_j^y \mathcal{O} \rangle_{\text{eq.}} = 0, (i \neq j)$$

$$= \sum_{\substack{k \geq n > l \\ k' \geq 0 > l'}} \sum_{\substack{\{a,b\} = \{k,l\} \\ \{a',b'\} = \{k',l'\}}} \epsilon^{ab} \epsilon^{a'b'} \frac{J^2 h^2}{4} \delta_{b,b'} \frac{\langle S_a^x S_{a'}^x (S_b^y)^2 \rangle_{\text{eq.}}}{d_{a,b}^\alpha d_{a',b}^\alpha}$$

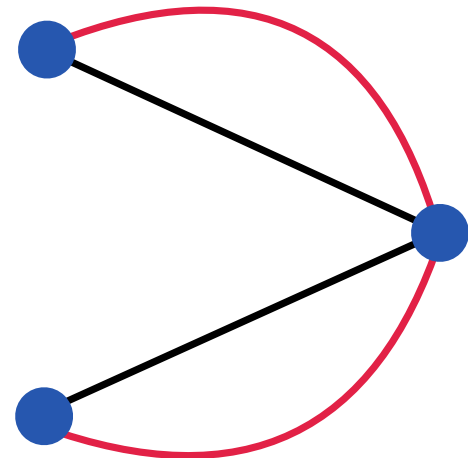


$$\langle S_a^x S_{a'}^x (S_b^y)^2 \rangle_{\text{eq.}} = \langle S_a^x S_{a'}^x (S_b^y)^2 \rangle_c + \langle S_a^x S_{a'}^x \rangle_c \langle (S_b^y)^2 \rangle_c$$

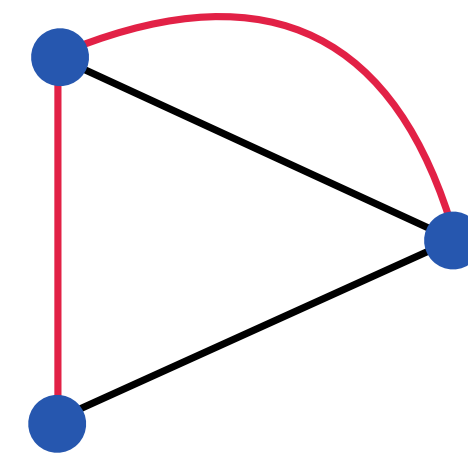
$$\leq d_{a,a'}^{-\alpha} d_{a',b}^{-\alpha}$$



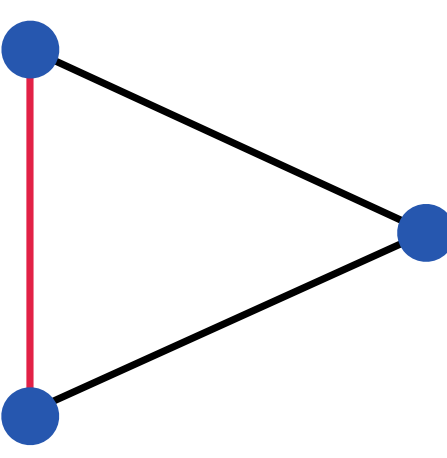
$$\leq d_{a,b}^{-\alpha} d_{b,a'}^{-\alpha}$$



$$\leq d_{a',a}^{-\alpha} d_{a,b}^{-\alpha}$$



$$\leq d_{a,a'}^{-\alpha}$$

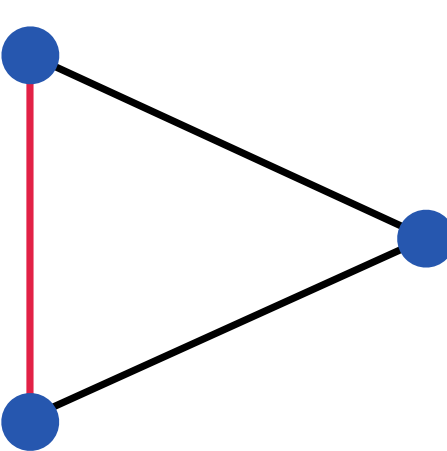
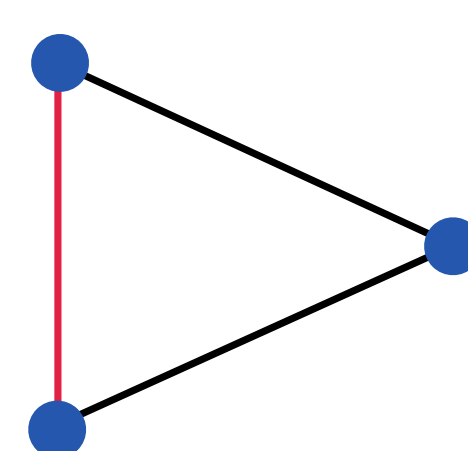
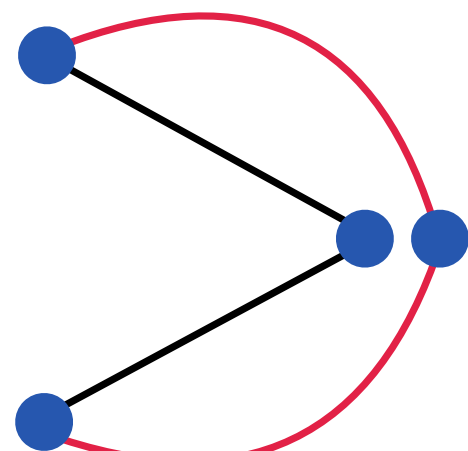
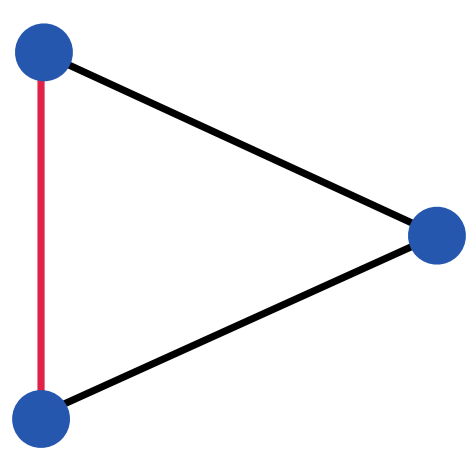


$$(1) \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ i \quad k \quad j \end{array} \leq \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ i \quad j \end{array}$$

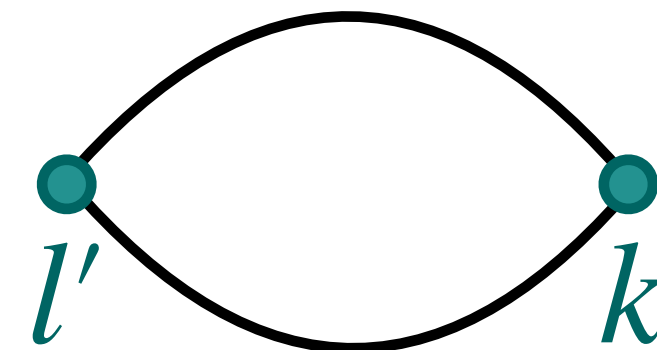
$$(2) \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \quad \bullet \\ i \quad \quad j \end{array} \leq \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ i \quad j \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ i \quad j \end{array} \leq \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ i' \quad j \end{array}$$

$\leq$



$\leq$

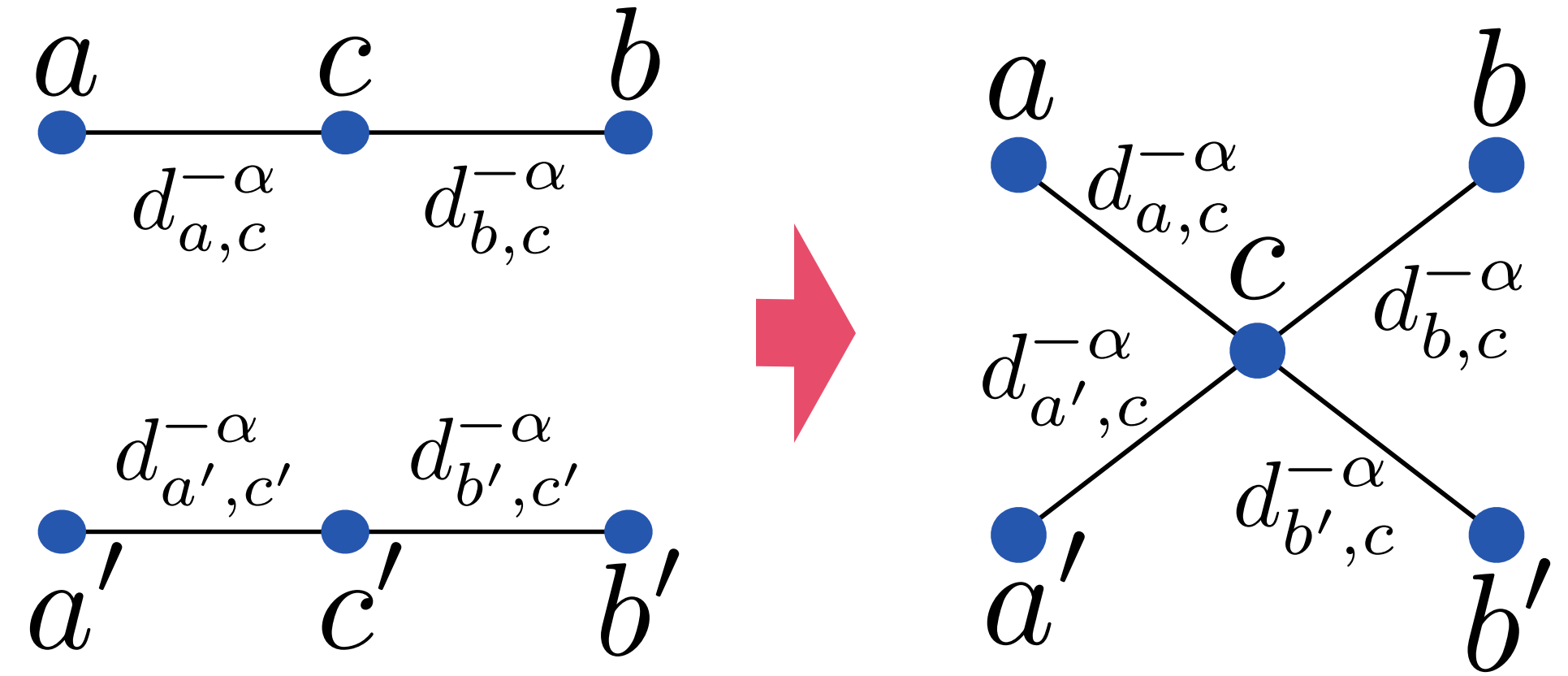


$$= \sum_{\substack{k \geq n \\ l' < 0}} d_{k,l'}^{-\alpha} < \text{const.} \cdot n^{2-2\alpha}$$

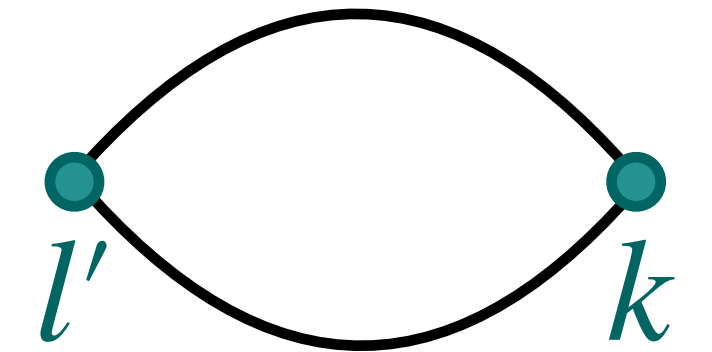
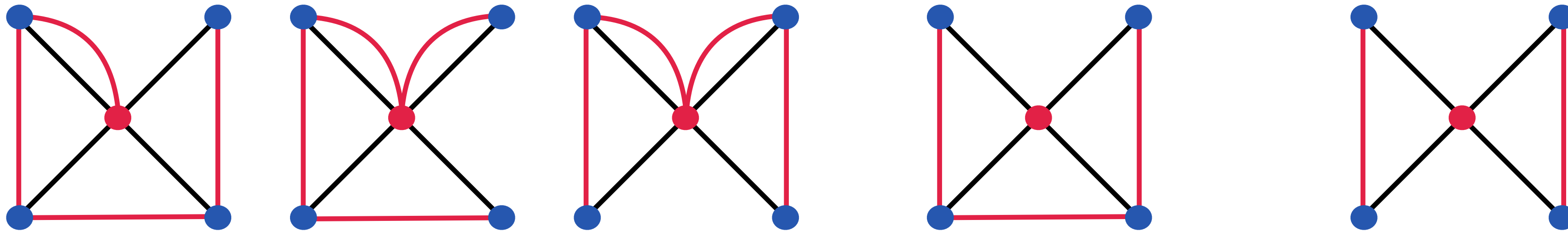
エネルギーカレント相関の上限：長距離XYモデル

$$\langle \mathcal{I}_n \mathcal{I}_0 \rangle_{\text{eq.}} = \sum_{\substack{k \geq n > l \\ k' \geq 0 > l'}} \sum_{m, m'} \sum_{\substack{\{\sigma, \tau\} = \{x, y\} \\ \{\sigma', \tau'\} = \{x, y\}}} \sum_{\substack{\{a, b, c\} = \{k, l, m\} \\ \{a', b', c'\} = \{k', l', m'\}}} \epsilon^{\sigma\tau z} \epsilon^{\sigma'\tau' z} \epsilon^{abc} \epsilon^{a'b'c'} \frac{J_\sigma J_\tau J_{\sigma'} J_{\tau'}}{16} \frac{\langle S_a^\sigma S_b^\tau S_c^z S_{a'}^{\sigma'} S_{b'}^{\tau'} S_{c'}^z \rangle_{\text{eq.}}}{d_{a,c}^\alpha d_{b,c}^\alpha d_{a',c'}^\alpha d_{b',c'}^\alpha}$$

$$= \sum \sum \sum \sum \dots \delta_{c,c'} \frac{\langle S_a^\sigma S_b^\tau S_{a'}^{\sigma'} S_{b'}^{\tau'} (S_c^z)^2 \rangle_{\text{eq.}}}{d_{a,c}^\alpha d_{b,c}^\alpha d_{a',c'}^\alpha d_{b',c'}^\alpha}$$



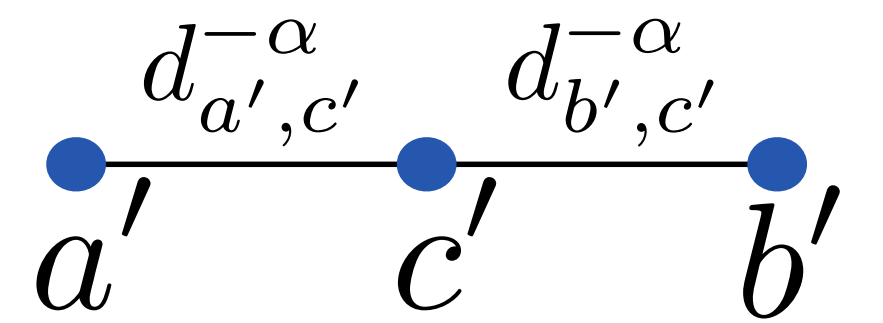
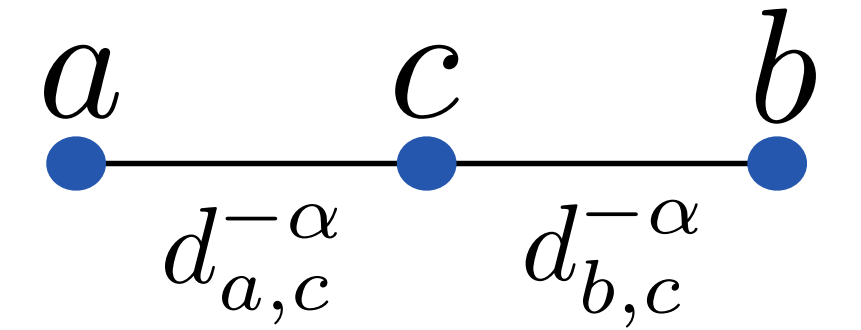
$$\langle S_a^\sigma S_b^\tau S_{a'}^{\sigma'} S_{b'}^{\tau'} (S_c^z)^2 \rangle_{\text{eq.}} = \langle SSSS (S^z)^2 \rangle_c + \sum \langle SSSS \rangle_c \langle (S^z)^2 \rangle_c + \sum \langle SS \rangle_c \langle SS \rangle_c \langle (S^z)^2 \rangle_c$$



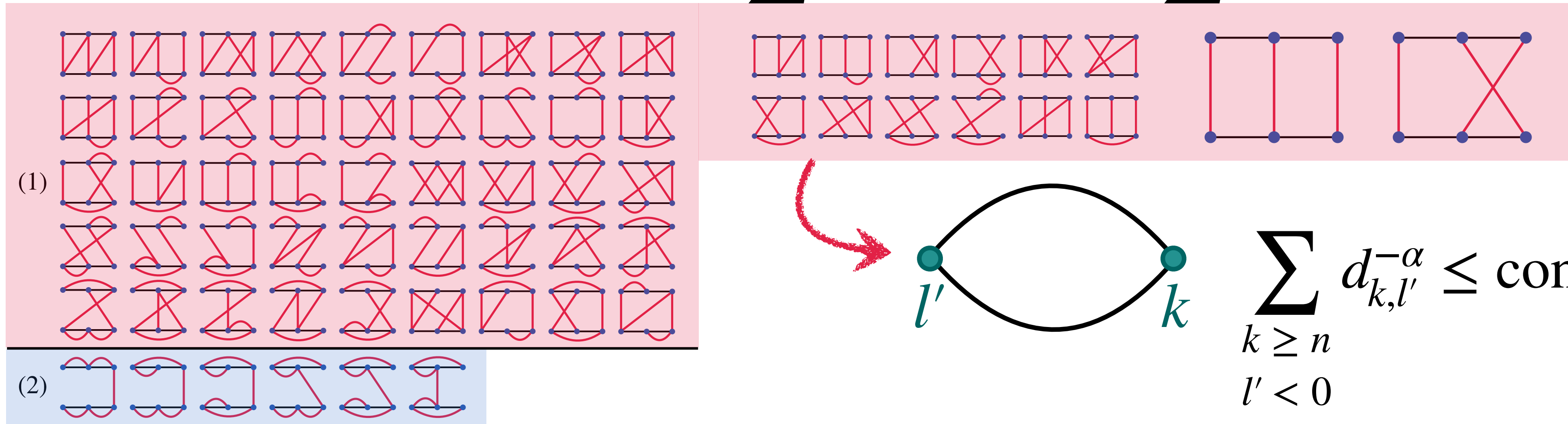
$$\sum_{\substack{k \geq n \\ l' < 0}} d_{k,l'}^{-\alpha} < \text{const.} \cdot n^{2-2\alpha}$$

エネルギーカレント相関の上限：長距離XYZモデル

$$\langle \mathcal{I}_n \mathcal{I}_0 \rangle_{\text{eq.}} = \sum_{\substack{k \geq n > l \\ k' \geq 0 > l'}} \sum_{m, m'} \sum_{\substack{\{\sigma, \tau, v\} = \{x, y, z\} \\ \{\sigma', \tau', v'\} = \{x, y, z\}}} \sum_{\substack{\{a, b, c\} = \{k, l, m\} \\ \{a', b', c'\} = \{k', l', m'\}}} \epsilon^{\sigma\tau v} \epsilon^{\sigma'\tau'v'} \epsilon^{abc} \epsilon^{a'b'c'} \frac{J_\sigma J_\tau J_{\sigma'} J_{\tau'}}{16} \frac{\langle S_a^\sigma S_b^\tau S_c^v S_{a'}^{\sigma'} S_{b'}^{\tau'} S_{c'}^{v'} \rangle_{\text{eq.}}}{d_{a,c}^\alpha d_{b,c}^\alpha d_{a',c'}^\alpha d_{b',c'}^\alpha}$$



$$\langle S_a^\sigma S_b^\tau S_c^v S_{a'}^{\sigma'} S_{b'}^{\tau'} S_{c'}^{v'} \rangle_{\text{eq.}} = \langle SSSSSS \rangle_c + \sum \langle SS \rangle_c \langle SSSS \rangle_c + \sum \langle SS \rangle_c \langle SS \rangle_c \langle SS \rangle_c$$



$$\sum_{\substack{k \geq n \\ l' < 0}} d_{k,l'}^{-\alpha} \leq \text{const.} \cdot \boxed{n^{2-2\alpha}}$$

DOMINANT !!

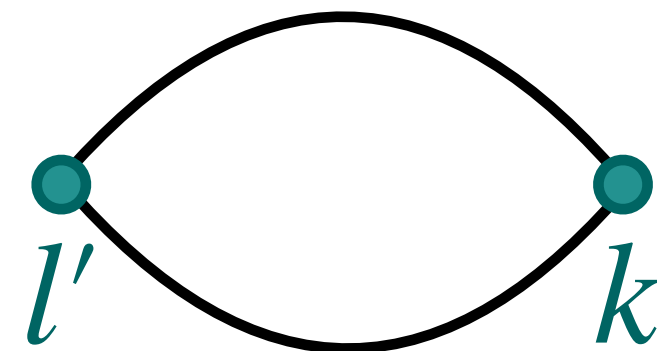
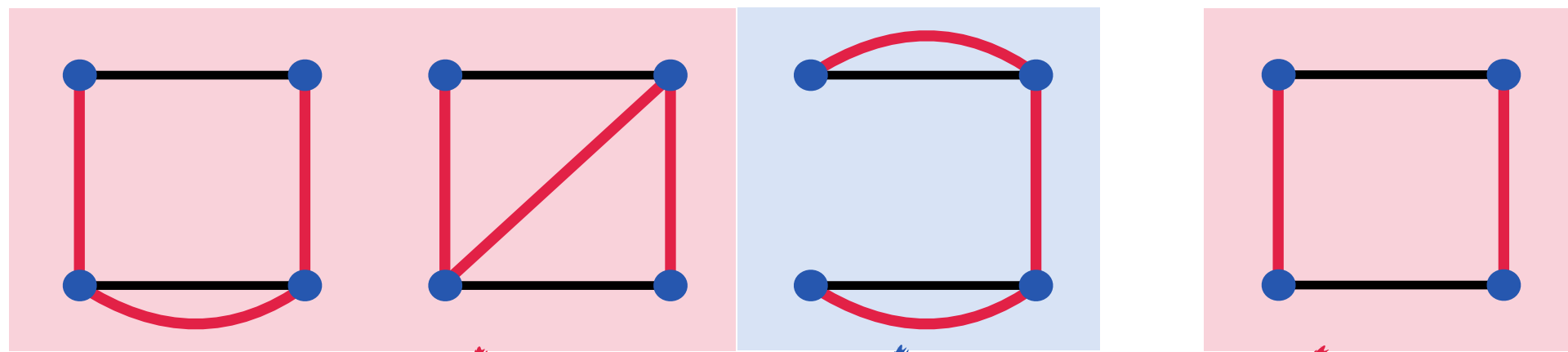
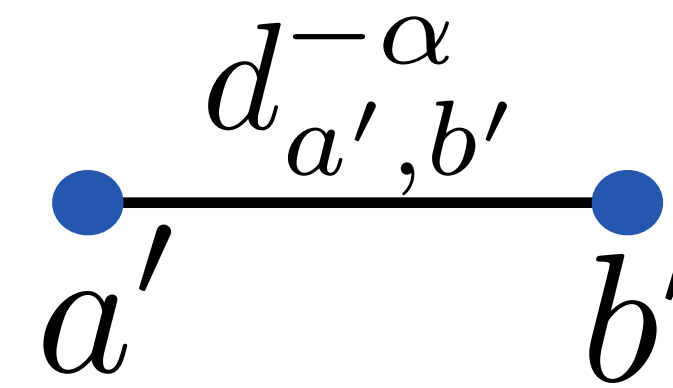
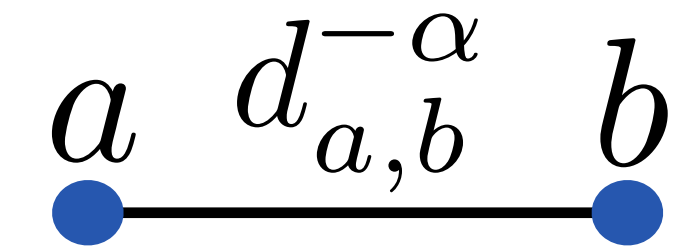
for $\alpha < 2$

$$\leq \text{const.} \cdot n^{-\alpha}$$

スピнкаレント相関の上限：長距離XX・XXZモデル

$$\langle \mathcal{J}_n^s \mathcal{J}_0^s \rangle_{\text{eq.}} = \sum_{\substack{k \geq n > l \\ k' \geq 0 > l'}} \sum_{\substack{\{a,b\} = \{k,l\} \\ \{a',b'\} = \{k',l'\}}} \epsilon^{ab} \epsilon^{a'b'} \frac{J^2}{4} \frac{\langle S_a^x S_b^y S_{a'}^x S_{b'}^y \rangle_{\text{eq.}}}{d_{a,b}^\alpha d_{a',b'}^\alpha}$$

$$\langle S_a^x S_b^y S_{a'}^x S_{b'}^y \rangle_{\text{eq.}} = \langle SSSS \rangle_c + \langle S^x S^x \rangle_c \langle S^y S^y \rangle_c$$



$$\sum_{\substack{k \geq n \\ l' < 0}} d_{k,l'}^{-\alpha} \leq \text{const.} \cdot \boxed{n^{2-2\alpha}}$$

DOMINANT !!

for $\alpha < 2$



$$\leq \text{const.} \cdot n^{-\alpha}$$

エネルギースピントラント相関の上限：長距離XX・XXZモデル

$$\langle \mathcal{I}_n^\epsilon \mathcal{I}_0^s \rangle_{\text{eq.}} = \sum_{\substack{k \geq n > l \\ k' \geq 0 > l'}} \sum_m \sum_{\substack{\{a,b,c\} = \{k,l,m\} \\ \{a',b'\} = \{k',l'\}}} \epsilon^{abc} \epsilon^{a'b'} \frac{J^3}{8} \frac{\langle S_a^x S_b^y S_c^z S_{a'}^x S_{b'}^y \rangle_{\text{eq}}}{d_{a,c}^\alpha d_{b,c}^\alpha d_{a',b'}^\alpha}$$

$$= 0 \text{ (横磁場なしの場合)}$$

✓ 横磁場ありの場合

$$\langle S_a^x S_b^y S_c^z S_{a'}^x S_{b'}^y \rangle_{\text{eq}} = \langle SSSSS \rangle_c + \langle SSSS \rangle_c \langle S^z \rangle + \sum \langle S^\sigma S^\sigma \rangle_c \langle S^\tau S^\tau S^z \rangle_c + \langle S^x S^x \rangle_c \langle S^y S^y \rangle_c \langle S^z \rangle$$

$$\sum_{\substack{k \geq n \\ l' < 0}} d_{k,l'}^{-\alpha} \leq \text{const.} \cdot n^{2-2\alpha}$$

DOMINANT !!
for $\alpha < 2$

$$\leq \text{const.} \cdot n^{-\alpha}$$

長距離相互作用系におけるゆらぐ流体力学の導出

HN & K.Saito, arXiv:2502.10139

K.Saito et al., Phys. Rev. Lett. 2021

① 粗視化

ミクロな相空間：

$$\Gamma := (S_1^x, S_1^y, S_1^z, \dots, S_N^x, S_N^y, S_N^z)$$

ミクロな保存量：

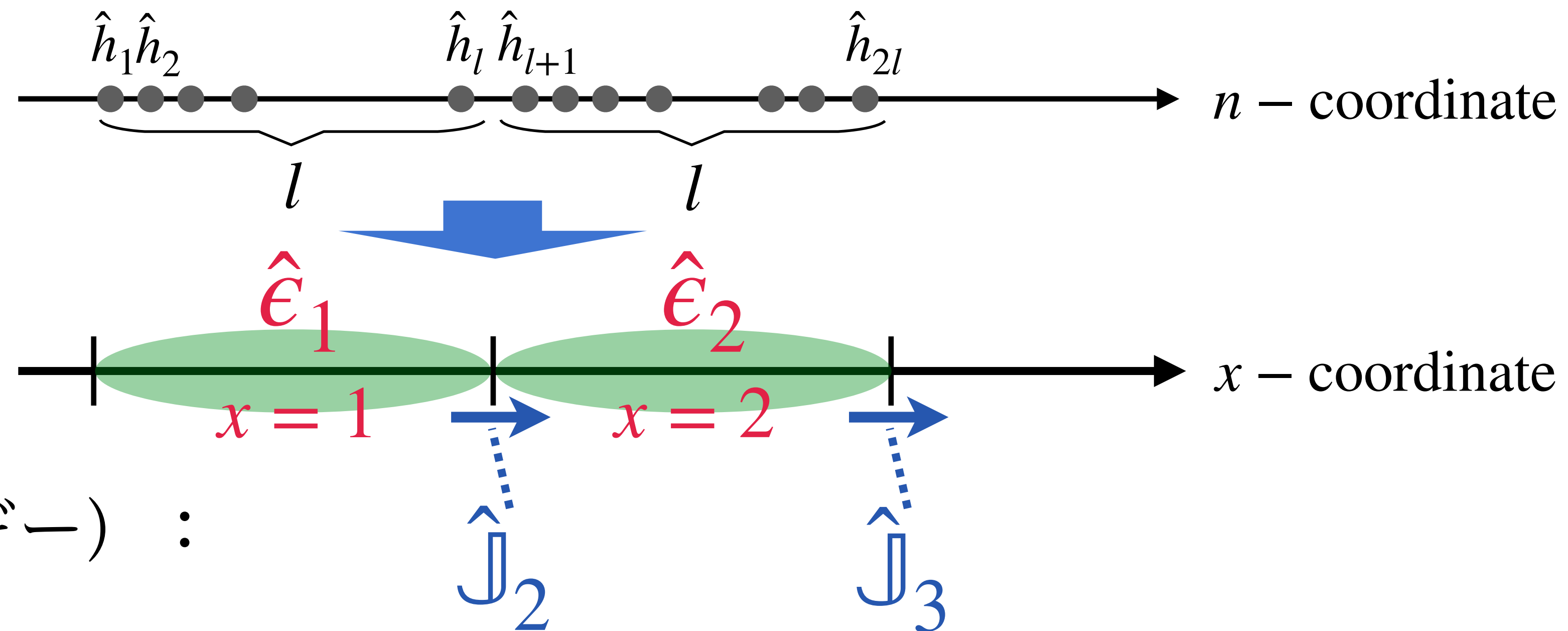
$\hat{h}_n$ エネルギーのみ

連続の式： $\partial_t \hat{h}_n = -\partial_n \hat{J}_n$

粗視化された保存量（エネルギー）：

$$\hat{\epsilon}_x := \frac{1}{l} \sum_{n=(x-1)l+1}^{xl} \hat{h}_n$$

連続の式： $\partial_t \hat{\epsilon}_x = -\partial_x \hat{\mathbb{J}}_x$, $\hat{\mathbb{J}}_x = \hat{J}_{(x-1)l+1}$



長距離相互作用系におけるゆらぐ流体力学の導出

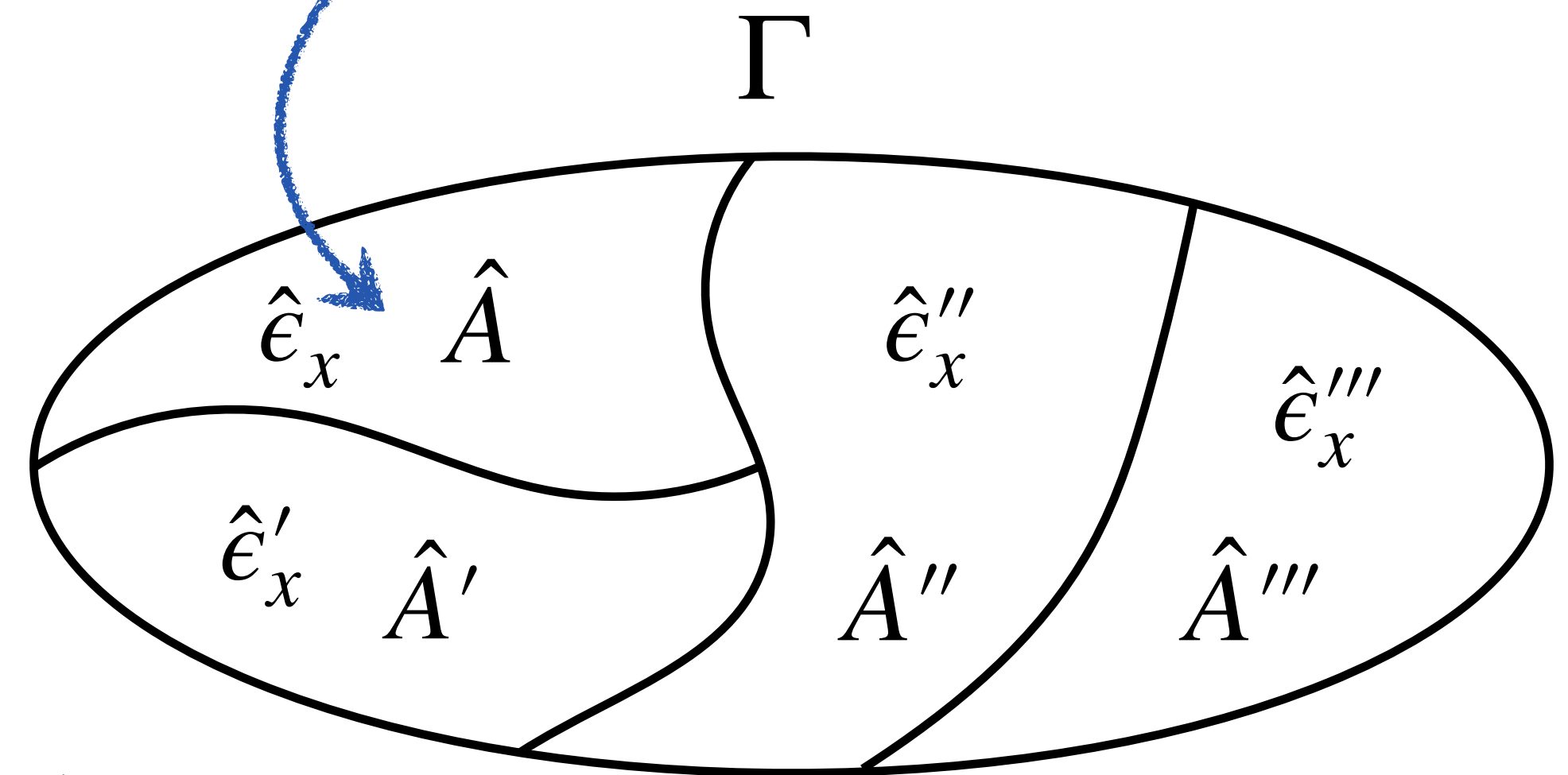
② 射影 Zwanzig, Phys. Rev. 1961

$$(\mathcal{P}\hat{A})[\Gamma] := \Omega^{-1}(\Gamma) \int d\Gamma' \hat{A}(\Gamma') \prod_x \delta(\hat{e}_x(\Gamma') - \hat{e}_x(\Gamma)),$$

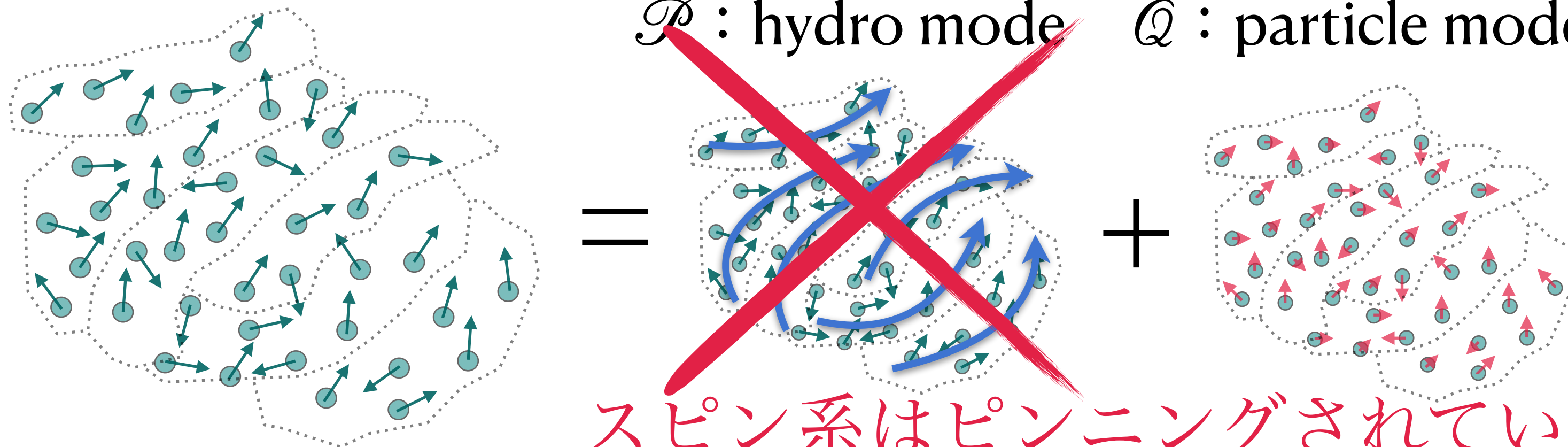
if $\hat{e}_x(\Gamma) = \hat{e}_x(\Gamma')$,
then $(\mathcal{P}\hat{A})(\Gamma) = (\mathcal{P}\hat{A})(\Gamma')$

$$\Omega(\Gamma) = \int d\Gamma' \prod_x \delta(\hat{e}_x(\Gamma') - \hat{e}_x(\Gamma))$$

By projection operator $\mathcal{P}$, any function $\hat{A}$ is redefined in terms of coarse-grained quantities.



$\mathcal{P}$: hydro mode $\mathcal{Q}$: particle mode



スピン系はピンニングされているので、
流体モード $\mathcal{P}$ は存在しない！

長距離相互作用系におけるゆらぐ流体力学の導出

③ 粗視化分布関数についての **Fokker-Planck eq.** の導出

- 粗視化した保存量の分布関数

$$f(\epsilon, t) := \int d\Gamma \hat{\rho}(\Gamma, t) \prod_x \delta(\hat{\epsilon}_x(\Gamma) - \epsilon_x), \quad \partial_t \hat{\rho}(\Gamma, t) = \{H, \hat{\rho}(\Gamma, t)\}$$

- Markov近似→Fokker-Planck eq.の導出

$$\partial_t f(\epsilon, t) = \sum_{x, x'} \frac{\delta}{\delta \epsilon_x} \Omega(\epsilon) \left(\partial_x \partial_{x'} K(x, x') \frac{\delta}{\delta \epsilon_x} \left(\frac{f(\epsilon, t)}{\Omega(\epsilon)} \right) \right),$$

$$K(x, x') = \int_0^\infty ds \int d\Gamma \Omega^{-1}(\epsilon) \prod_z \delta(\hat{\epsilon}_z(\Gamma) - \epsilon_z) \left[\hat{\mathbb{J}}_x(\Gamma) e^{s\mathcal{Q}\mathbb{L}} \hat{\mathbb{J}}_{x'}(\Gamma) \right]$$

$$\sim \int_0^\infty ds \langle \mathbb{J}_x e^{s\mathbb{L}} \mathbb{J}_{x'} \rangle_{\text{local Gibbs}} \sim \int_0^\infty ds \langle \mathbb{J}_x(0) \mathbb{J}_{x'}(s) \rangle_{\text{eq}}$$

長距離相互作用系におけるゆらぐ流体力学の導出

④ ゆらぐ流体方程式の導出

Corresponding Langevin eq.

$$\begin{aligned}\partial_t \epsilon_x(t) &= -\partial_x \left[\sum_{x'} K(x, x') \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\delta \bar{S}}{\delta \epsilon_{x'}} + \xi_x(t) \right] & \langle\langle \xi_x(t) \xi_{x'}(t') \rangle\rangle &= 2K(x, x') \delta(t - t'), \\ & & \bar{S} &= \ln \Omega(\epsilon) \\ &= -\partial_x \left[\sum_{x'} K(x, x') \frac{\partial}{\partial x'} \beta_{x'} + \xi_x(t) \right] & \Lambda(x, x') &= \left(\frac{\partial \epsilon_{x'}}{\partial \beta_x} \right)^{-1} \Bigg|_{\text{eq}} = \left(\langle \delta \epsilon_x \delta \epsilon_{x'} \rangle_{\text{eq}} \right)^{-1} \\ &= -\partial_x \left[\sum_{x', x''} K(x, x') \frac{\partial}{\partial x'} \Lambda(x', x'') \epsilon_{x''} + \xi_x(t) \right] & &\sim (c_V k_B T^2)^{-1} \delta_{x, x'} \\ &= -\partial_x \left[\sum_{x'} D(x, x') \epsilon_{x'}(t) + \xi_x(t) \right] & D(x, x') &= \sum_{x''} K(x, x'') \Lambda(x'', x') \\ & & &= K(x, x') / (c_V k_B T^2)\end{aligned}$$

長距離系におけるゆらぐ流体力学（エネルギー&スピン）

$$\begin{cases} \partial_t \epsilon_n(t) &= \nabla_n \left(\sum_m D_{n-m}^{\epsilon\epsilon} \nabla_m \epsilon_m + \cancel{D_{n-m}^{\epsilon s} \nabla_m S_m^z} + \xi_n^\epsilon(t) \right) \\ \partial_t S_n^z(t) &= \nabla_n \left(\sum_m D_{n-m}^{ss} \nabla_m S_m^z + \cancel{D_{n-m}^{s\epsilon} \nabla_m \epsilon_m} + \xi_n^s(t) \right) \end{cases}$$

$$D_n^{ab} = \sum_c \Lambda^{ac} K_n^{cb} \quad (a, b = \epsilon, s) \quad \langle\langle \xi_x^a(t) \xi_{x'}^b(t') \rangle\rangle = 2K_{x-x'}^{aa} \delta_{ab} \delta(t-t')$$

$$\Lambda^{ab}(x, x') = \left(\frac{\partial u_{x'}^a}{\partial \lambda_x^b} \right)^{-1} \bigg|_{\text{eq}} = \left(\langle \delta u_x^a \delta u_{x'}^b \rangle_{\text{eq}} \right)^{-1} \propto \delta_{a,b} \delta_{x,x'}$$

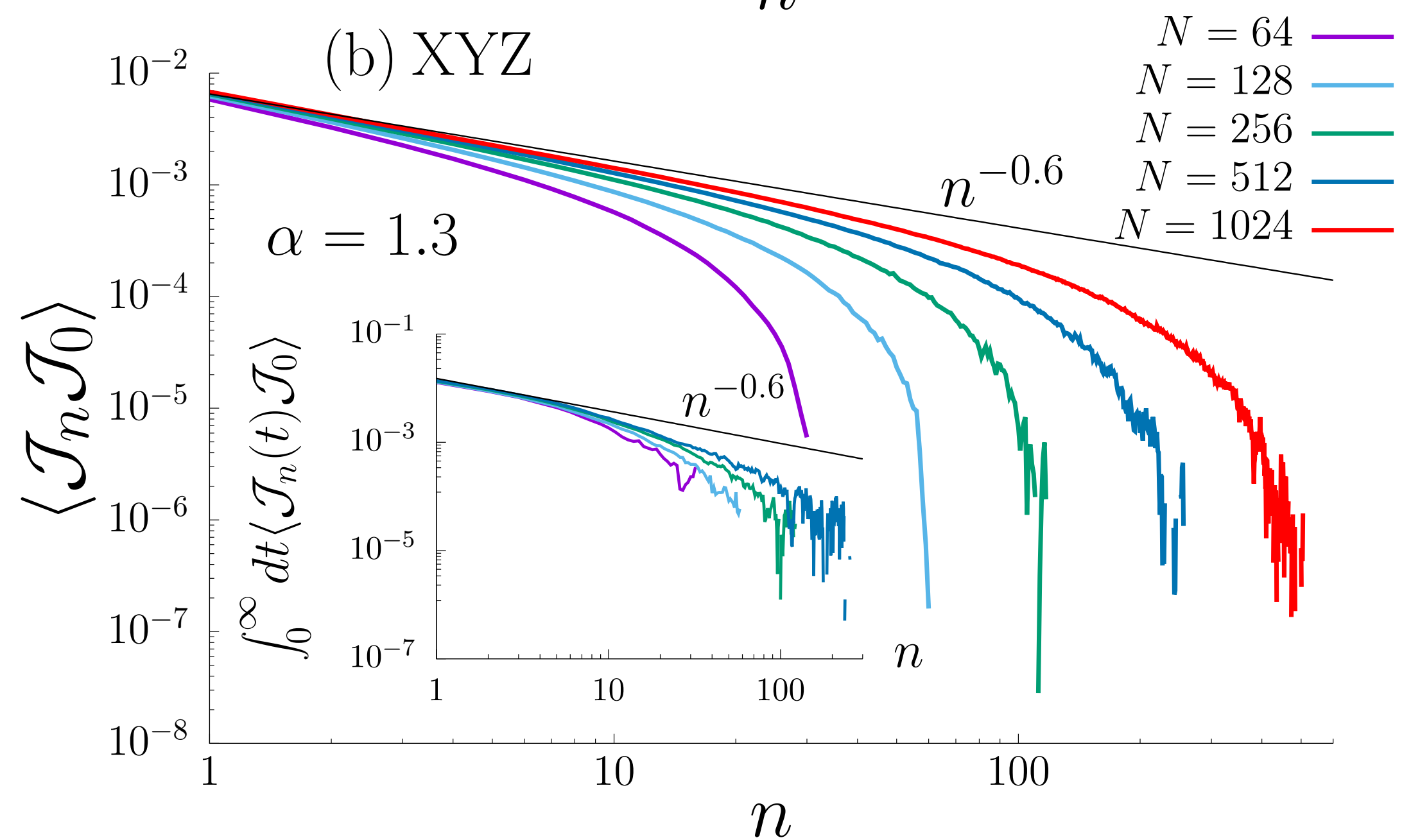
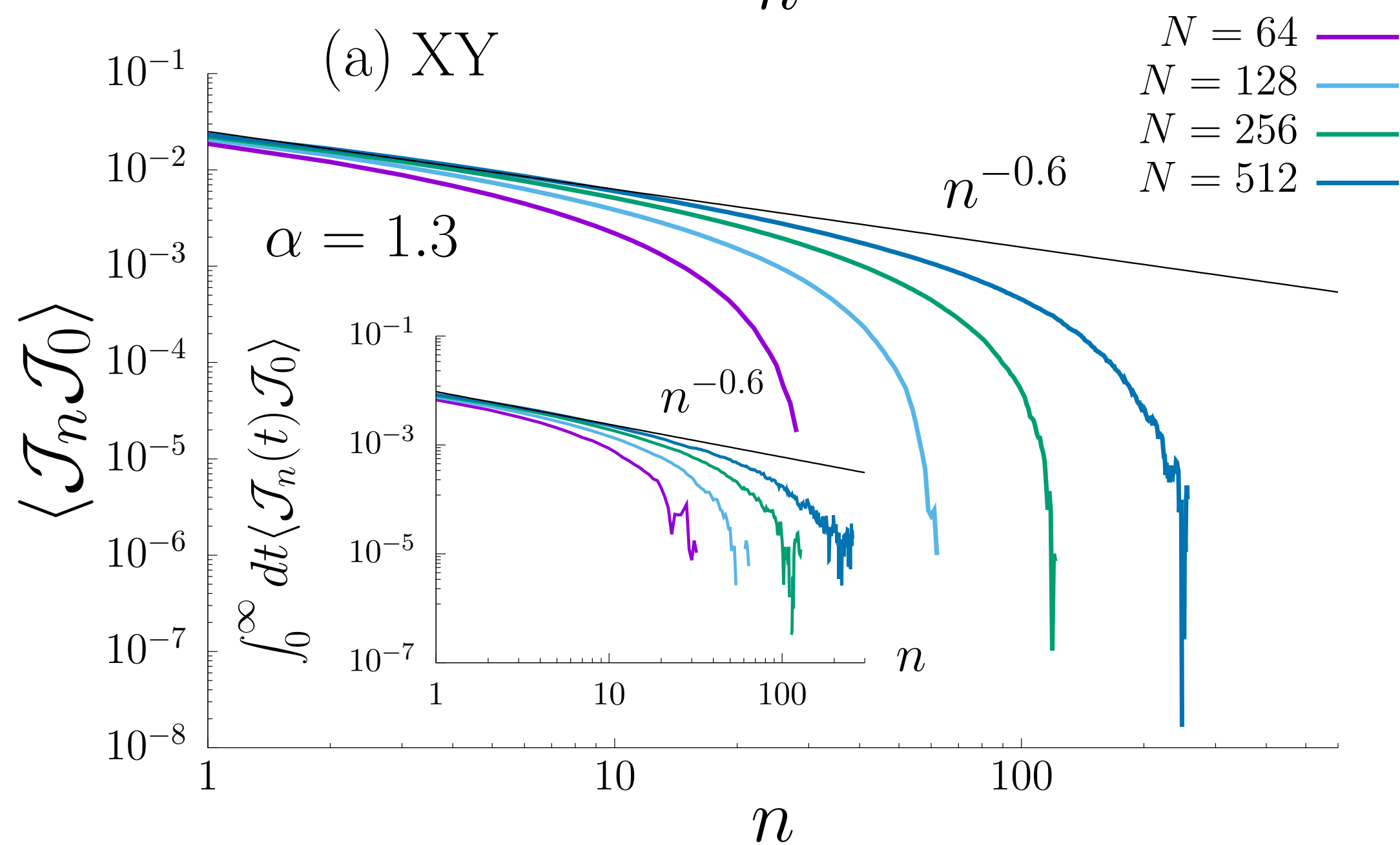
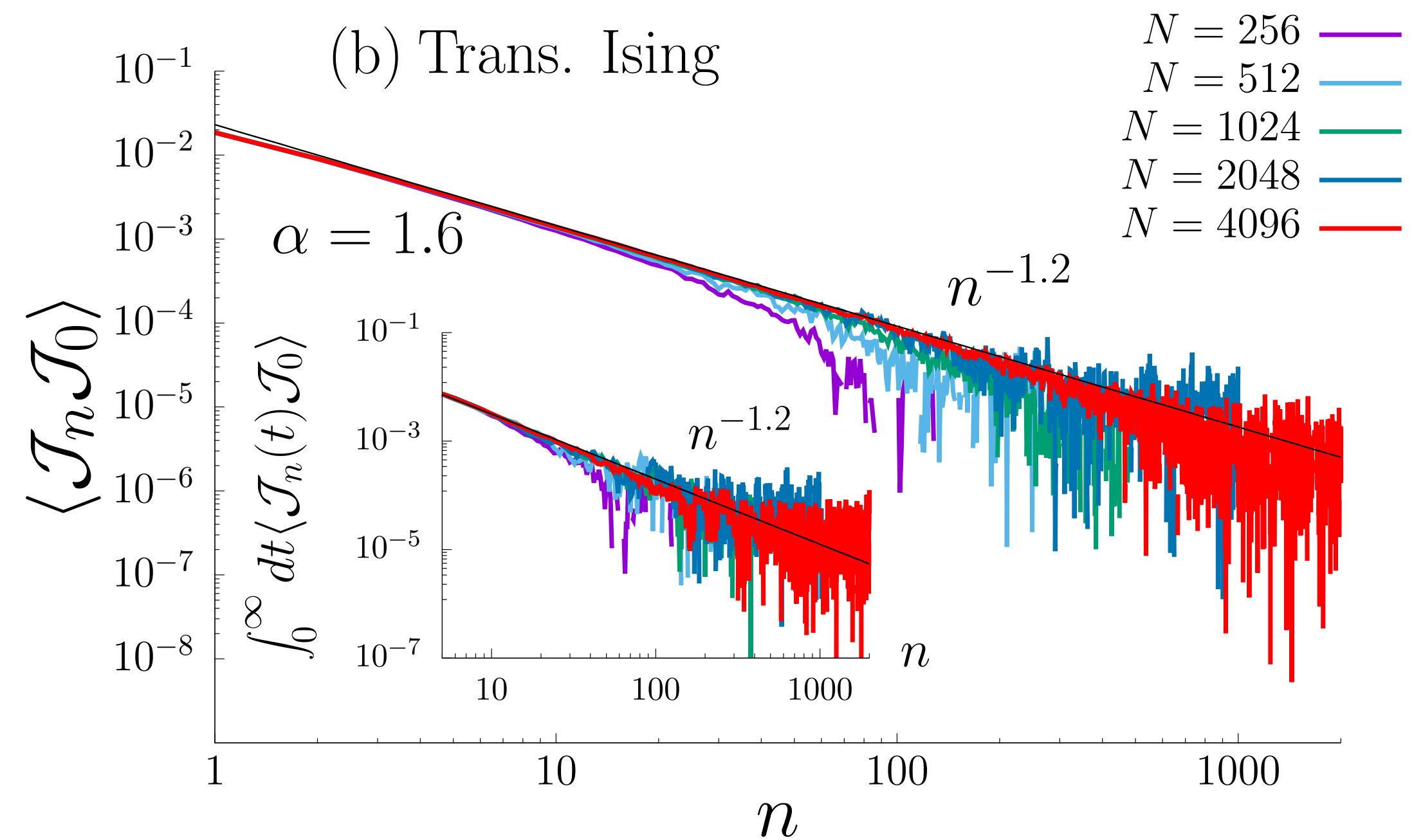
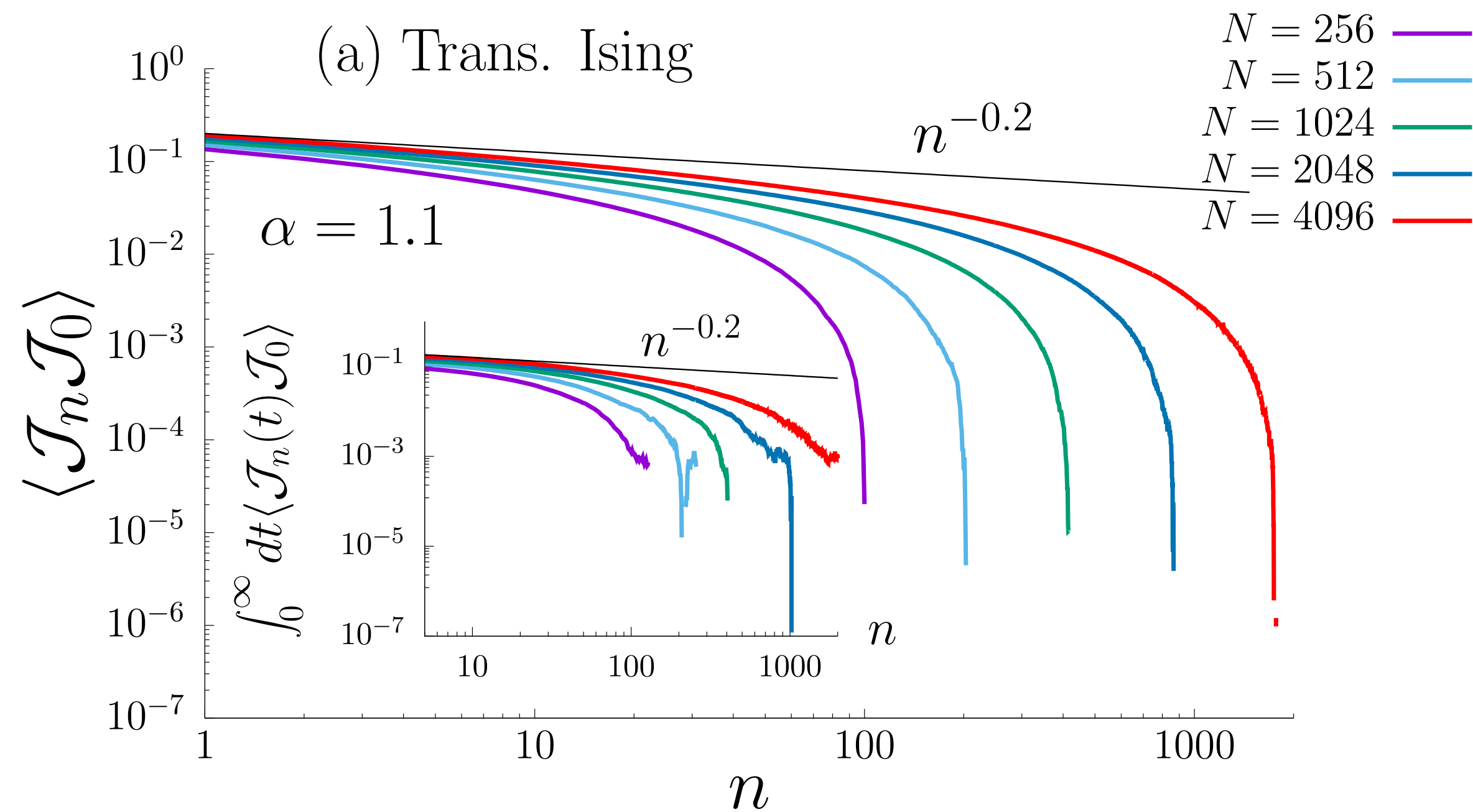
$$u_x^\epsilon = \epsilon_x, \quad u_x^s = S_x^z$$

$$K_n^{ab}(t) = \int_0^\infty dt \langle \mathcal{J}_n^a(t) \mathcal{J}_0^b \rangle$$

$$\text{横磁場なし} : \langle \mathcal{J}_n^\epsilon \mathcal{J}_0^s \rangle_{\text{eq}} = 0$$

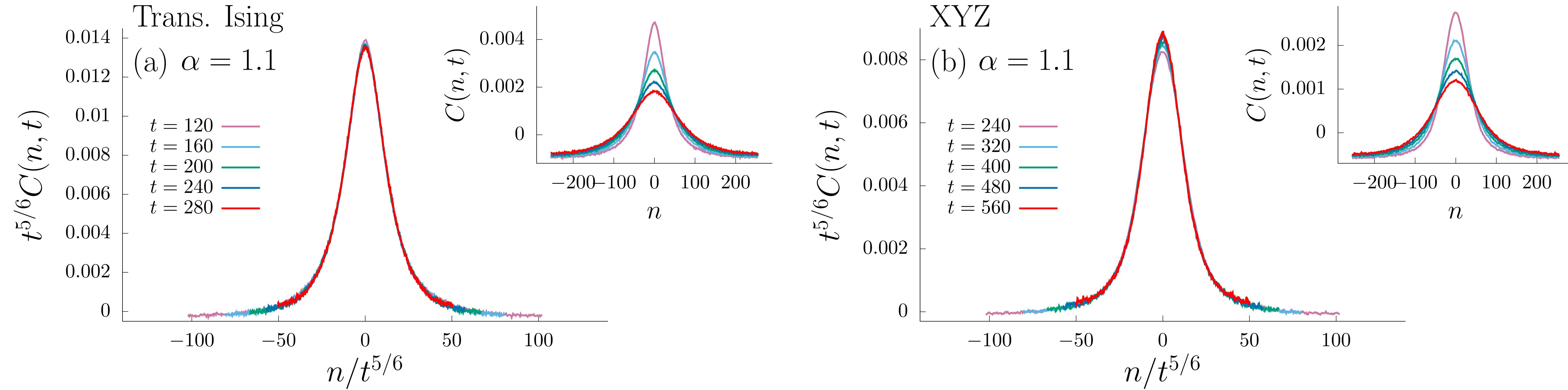
$$\text{より、} D_n^{ab} = \delta_{a,b} D_n^{aa}$$

カレント相関の上限の最適性：補足

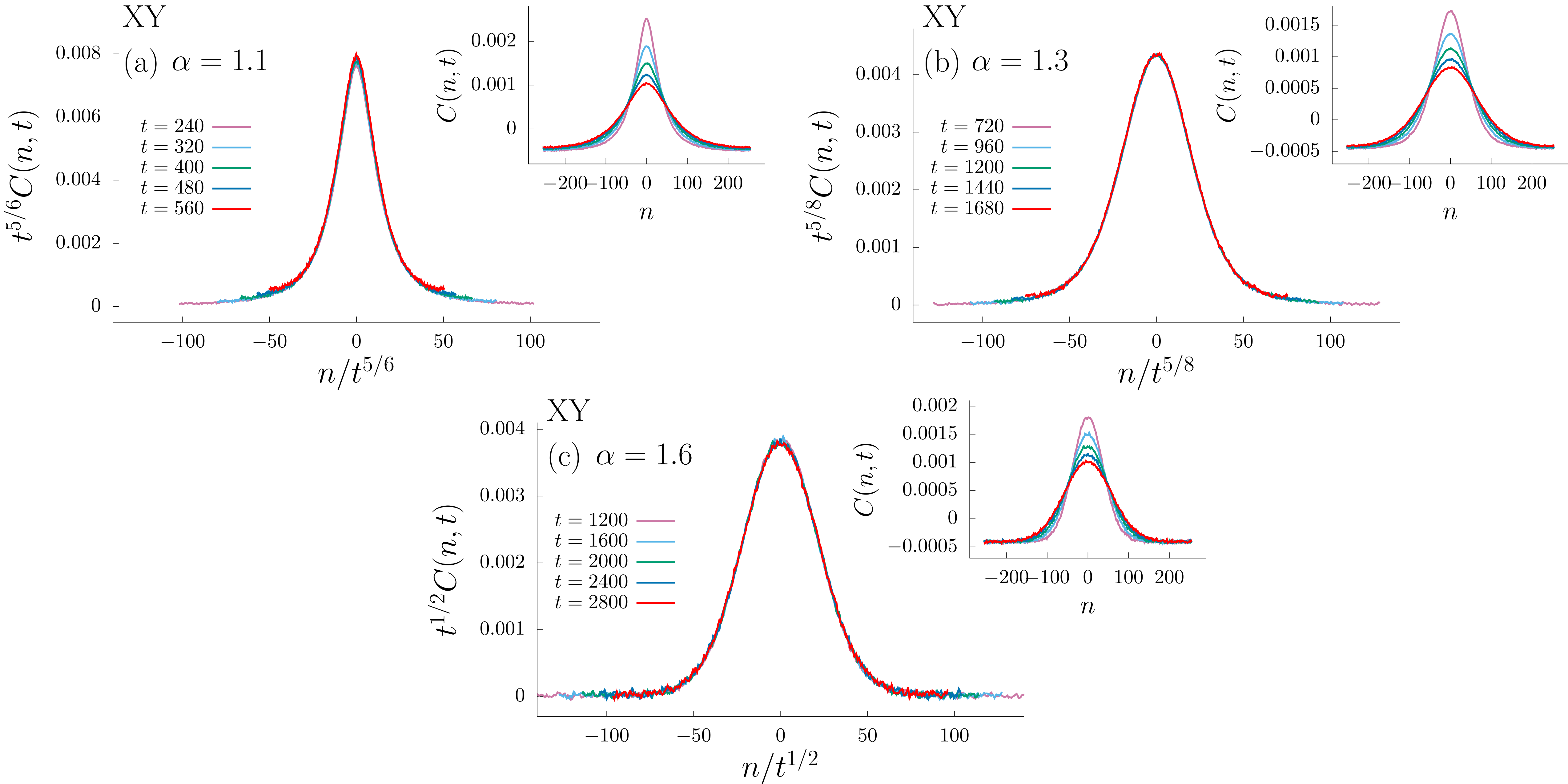


長距離スピン系におけるエネルギー拡散：補足 1

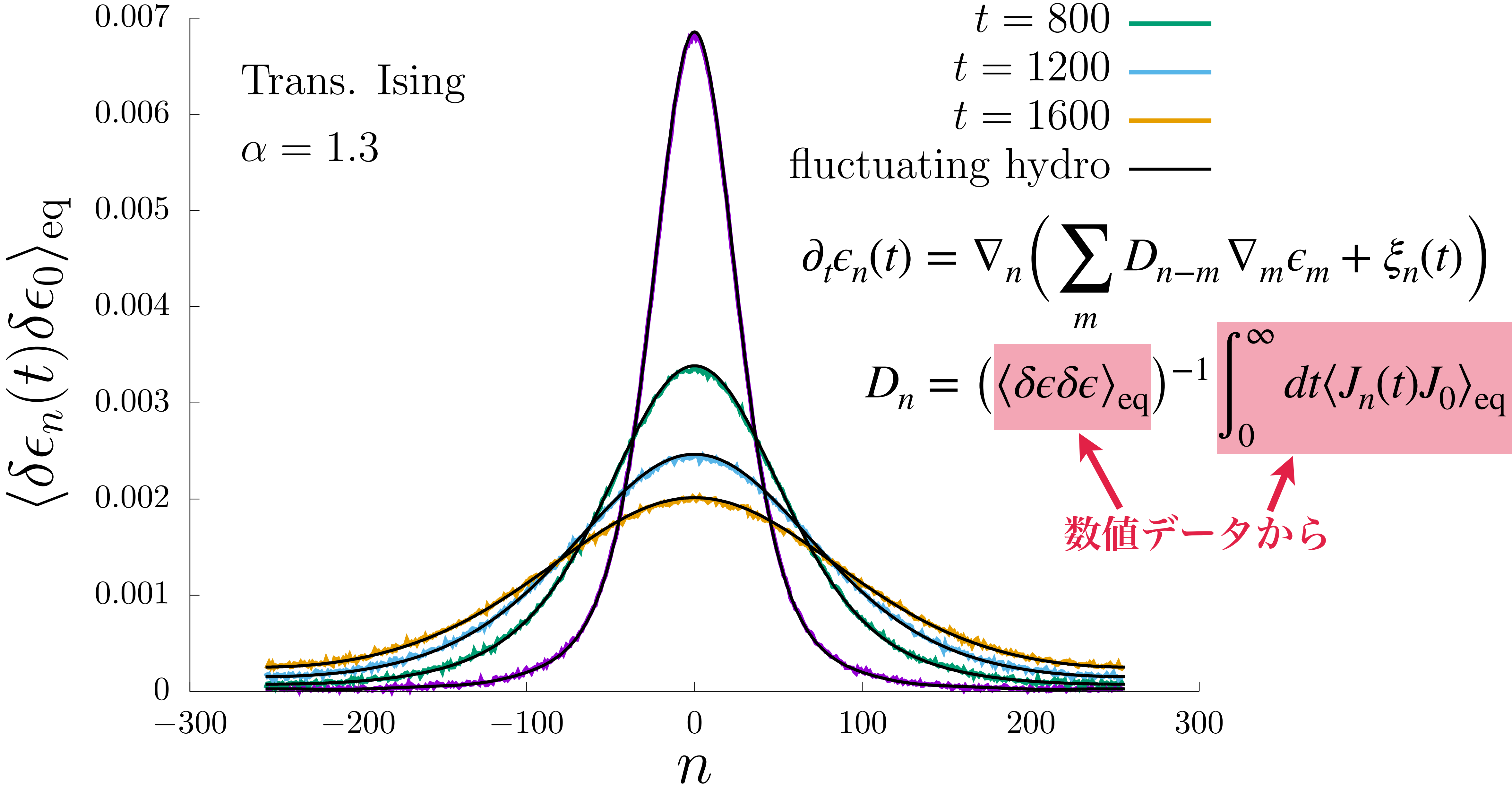
✓ エネルギーの時空相関： $C(n, t) := \langle \delta\epsilon_n(t) \delta\epsilon_0 \rangle_{\text{eq}}$



長距離スピン系におけるエネルギー拡散：補足 2



エネルギー時空相関：数値計算とゆらぐ流体力学的一致

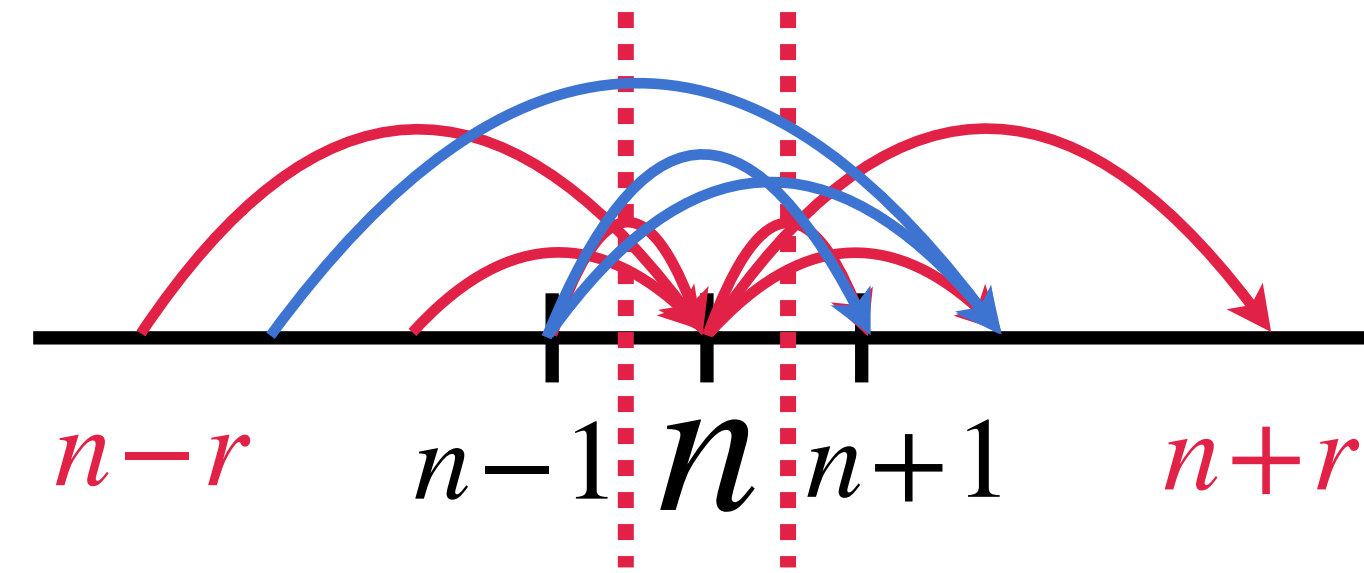


1次元長距離相互作用系の連続の式の導出

✓ 1次元長距離相互作用系における連続の式

$$\partial_t \epsilon_n = \{\epsilon_n, H\} = \sum_{m \neq n} \{\epsilon_n, \epsilon_m\} = \sum_{m \neq n} t_{n \leftarrow m} \quad t_{n \leftarrow m} := \{\epsilon_n, \epsilon_m\}$$

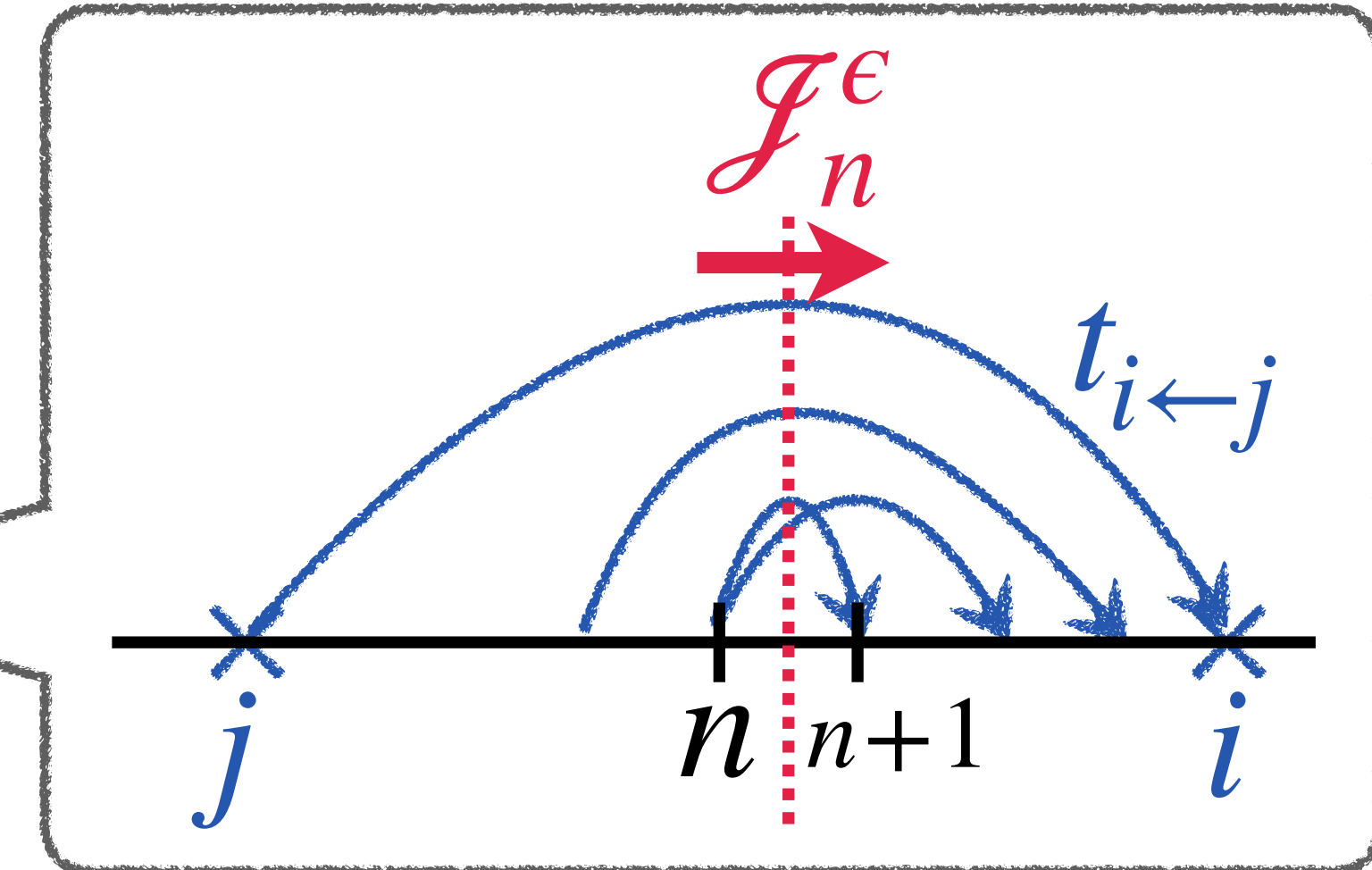
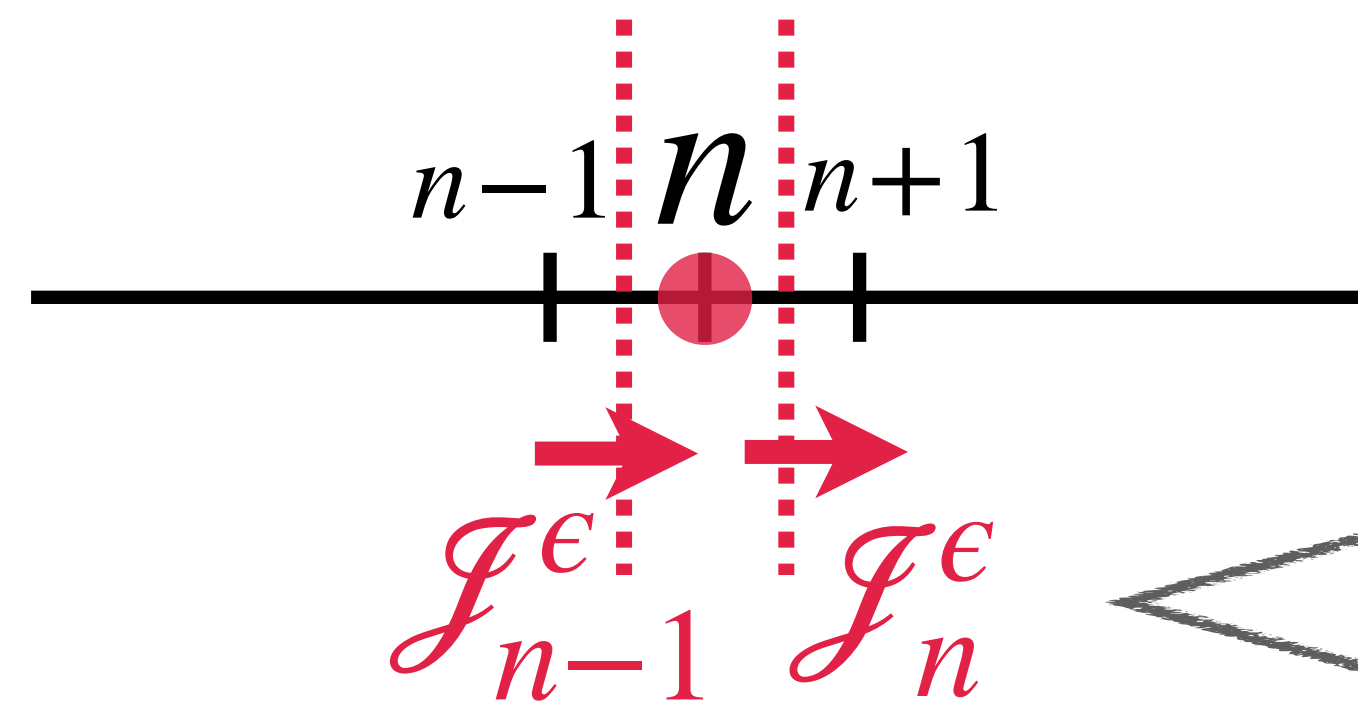
$$= \sum_{r=1}^{N/2} t_{n \leftarrow n+r} - \sum_{r=1}^{N/2} t_{n-r \leftarrow n}$$



$$= \sum_{j \leq n < i} t_{i \leftarrow j} - \sum_{j \leq n-1 < i} t_{i \leftarrow j}$$

$$= -(\mathcal{J}_n^\epsilon - \mathcal{J}_{n-1}^\epsilon)$$

$$\mathcal{J}_n^\epsilon := - \sum_{j \leq n < i} t_{i \leftarrow j}$$



D 次元長距離相互作用系の連続の式の導出

✓ $D (\geq 2)$ 次元長距離相互作用系における連続の式

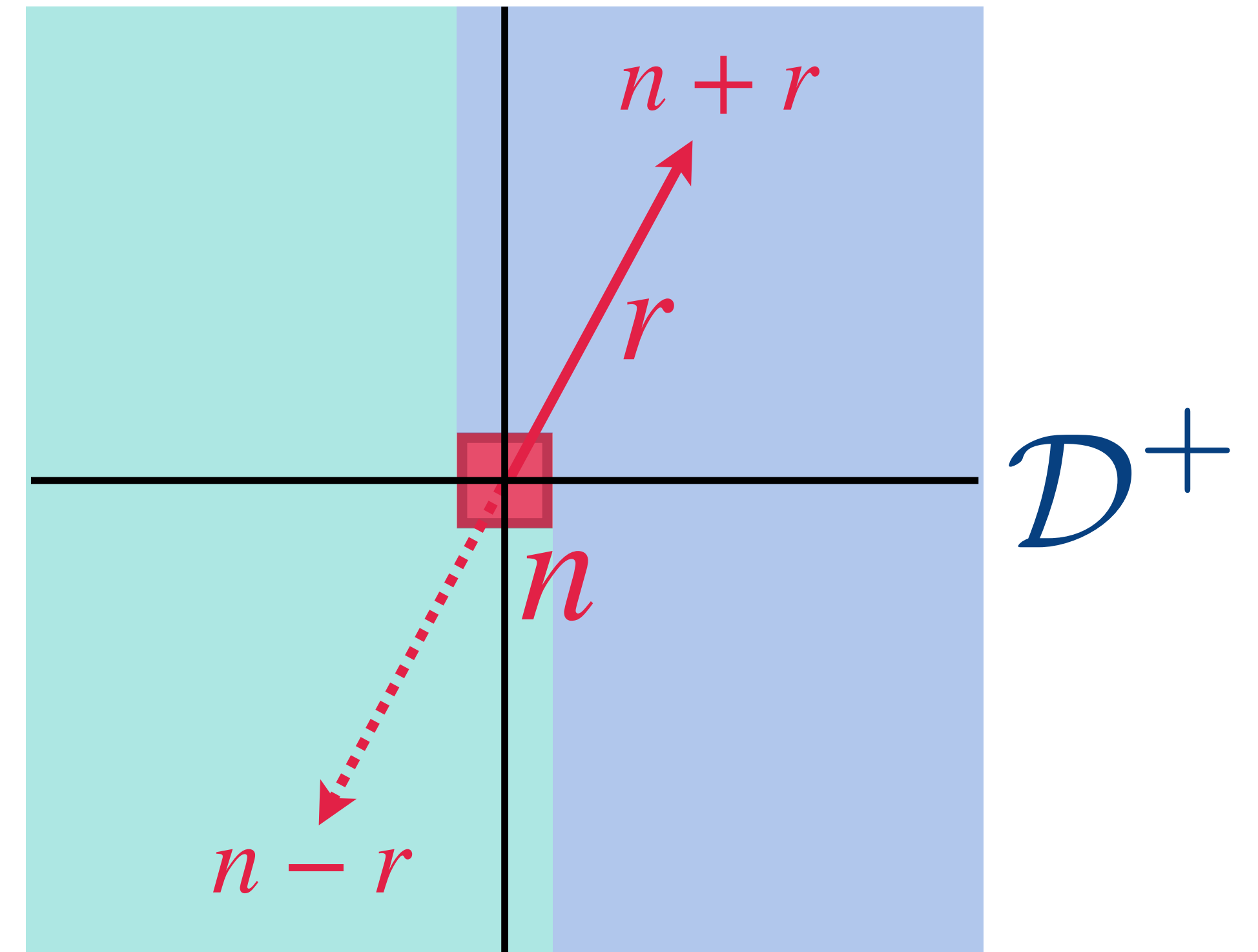
$$\partial_t \epsilon_n = \{\epsilon_n, H\} = \sum_{m \neq n} \{\epsilon_n, \epsilon_m\} = \sum_{m \neq n} t_{n \leftarrow m} \quad t_{n \leftarrow m} := \{\epsilon_n, \epsilon_m\}$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{D}^+} t_{n \leftarrow n+r} - \sum_{r \in \mathcal{D}^+} t_{n-r \leftarrow n}$$

$$= - \sum_{r \in \mathcal{D}^+} \nabla_r \mathcal{J}_{n:r}^\epsilon$$

$$\mathcal{J}_{n:r}^\epsilon := - t_{n \leftarrow n+r}$$

$$\nabla_r A_{n:r} := A_{n:r} - A_{n-r:r}$$



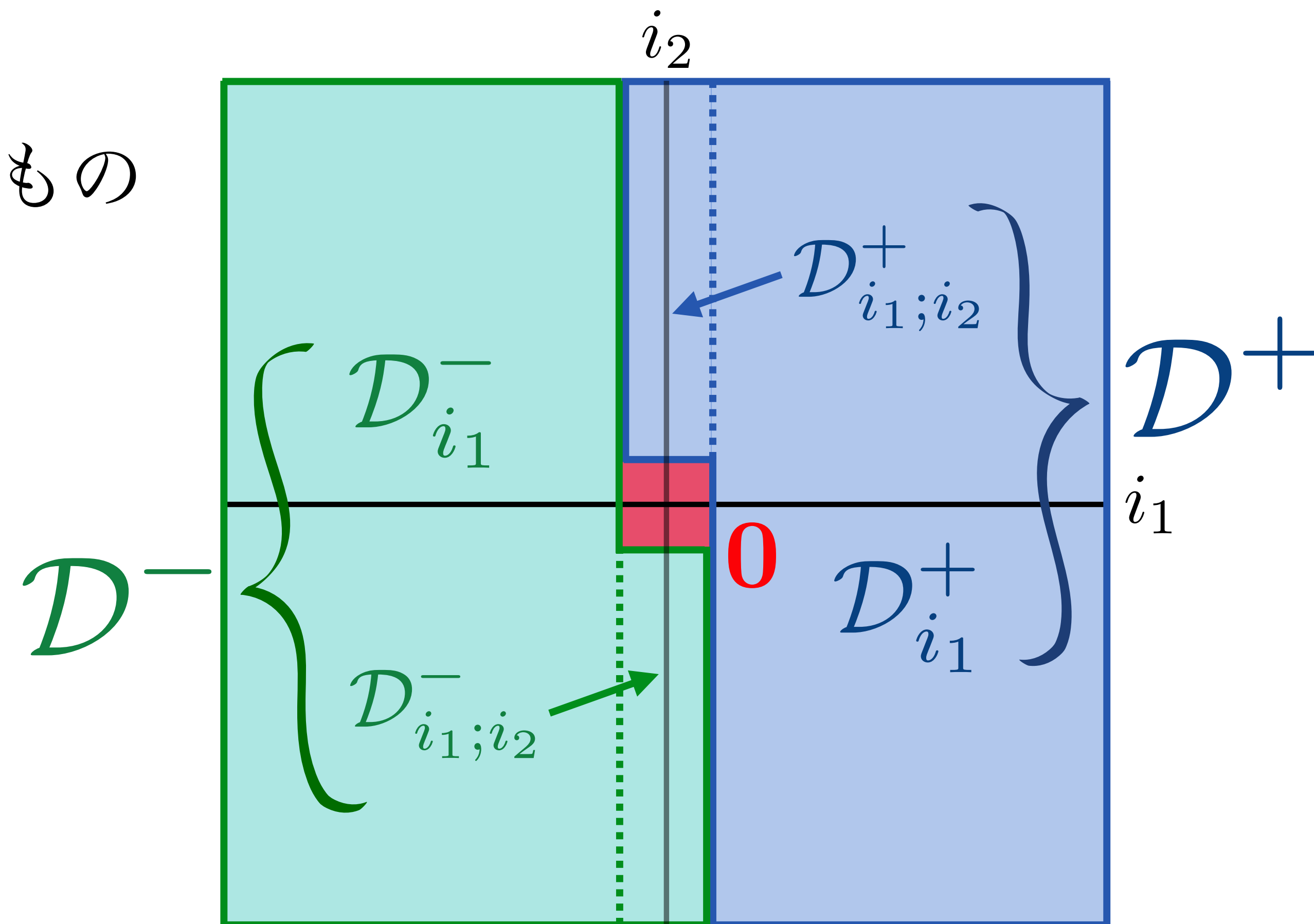
D 次元長距離系の連続の式の導出

✓ $D (\geq 2)$ 次元長距離相互作用系における連続の式

$$\partial_t \epsilon_n = - \sum_{r \in \mathcal{D}^+} \nabla_r \mathcal{J}_{n:r}^\epsilon \quad \mathcal{J}_{n:r}^\epsilon := -t_{n \leftarrow n+r} \quad t_{n \leftarrow m} := \{\epsilon_n, \epsilon_m\}$$
$$\nabla_r A_{n:r} := A_{n:r} - A_{n-r:r}$$

✓ $\mathcal{D}^+$ の具体的な構成

= 原点を除いた全格子を等分割したもの



D 次元長距離系のGreen-Kubo公式の導出

✓ $D (\geq 2)$ 次元長距離相互作用系におけるGreen-Kubo公式

平均二乗変位 $S(t)$

$$S(t) = \left\langle \sum_{i=1}^D n_i^2(t) \right\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^D n_i^2 P(n, t) = \frac{1}{k_B T^2 c_V} \sigma(t) \sim 2\mathcal{D}t \quad \mathcal{D} : \text{拡散係数}$$

$$P(n, t) = \mathcal{N}^{-1} \langle \delta\epsilon_n(t) \delta\epsilon_0(0) \rangle, \quad \mathcal{N} := \sum_n \langle \delta\epsilon_n \delta\epsilon_0 \rangle$$

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^D \sum_n n_i^2 \langle \delta\epsilon_n(t) \delta\epsilon_0(0) \rangle$$

連続の式

$$\partial_t \epsilon_n = - \sum_{r \in \mathcal{D}^+} \nabla_r \mathcal{J}_{n:r}^\epsilon \quad \text{を用いる}$$

D 次元長距離系のGreen-Kubo公式の導出

✓ $D (\geq 2)$ 次元長距離相互作用系におけるGreen-Kubo公式

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sum_{i=1}^D \sum_n n_i^2 \langle \delta\epsilon_n(t) \delta\epsilon_0(0) \rangle = \sum_{i=1}^D \sum_n n_i^2 \langle - \left(\int_0^t ds \sum_{r \in \mathcal{D}^+} \nabla_r \mathcal{J}_{n:r}(s) \right) \delta\epsilon_0(0) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^D \sum_n \sum_{r \in \mathcal{D}^+} (2r_i n_i + r_i^2) \int_0^t ds \langle \mathcal{J}_{n:r}(s) \delta\epsilon_0(0) \rangle = \sum_{i=1}^D \sum_n \sum_{r \in \mathcal{D}^+} (2r_i n_i + r_i^2) \int_0^t ds \langle \mathcal{J}_{n:r}(0) \delta\epsilon_0(-s) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^D \sum_n \sum_{r \in \mathcal{D}^+} (2r_i n_i + r_i^2) \int_0^t ds \langle \mathcal{J}_{n:r}(0) \left(- \sum_{r' \in \mathcal{D}^+} \int_0^s ds' \nabla_{r'} \mathcal{J}_{0:r'}(-s') \right) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^D \sum_n \sum_{r, r' \in \mathcal{D}^+} (2r_i n_i + r_i^2) \int_0^t ds \langle - (\mathcal{J}_{n:r}(0) - \mathcal{J}_{n-r':r}(0)) \int_0^s ds' \mathcal{J}_{0:r'}(-s') \rangle \\ &= \sum_{i=1}^D \sum_n \sum_{r, r' \in \mathcal{D}^+} 2r_i r'_i \int_0^t ds \int_0^s ds' \langle \mathcal{J}_{n:r}(0) \mathcal{J}_{0:r'}(-s') \rangle = \sum_{i=1}^D \sum_n \sum_{r, r' \in \mathcal{D}^+} 2r_i r'_i \int_0^t ds \int_0^s ds' \langle \mathcal{J}_{n:r}(s') \mathcal{J}_{0:r'}(0) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^D \frac{1}{N^D} \langle \left(\int_0^t ds \sum_n \sum_{r \in \mathcal{D}_i^+} r_i \mathcal{J}_{n:r}(s) \right) \left(\int_0^t ds' \sum_{n'} \sum_{r' \in \mathcal{D}^+} r'_i \mathcal{J}_{n':r'}(s') \right) \rangle\end{aligned}$$

D 次元長距離系のGreen-Kubo公式の導出

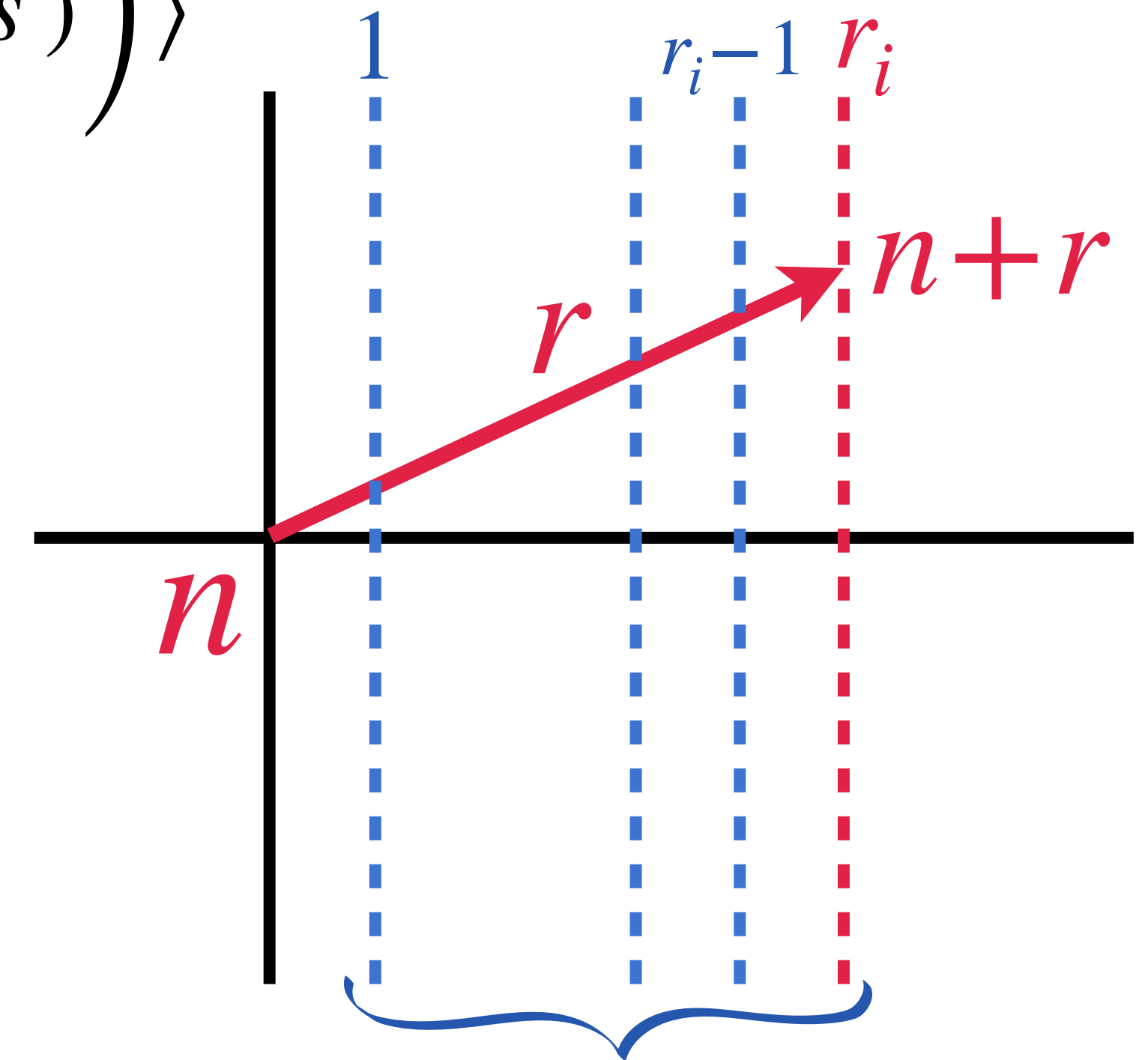
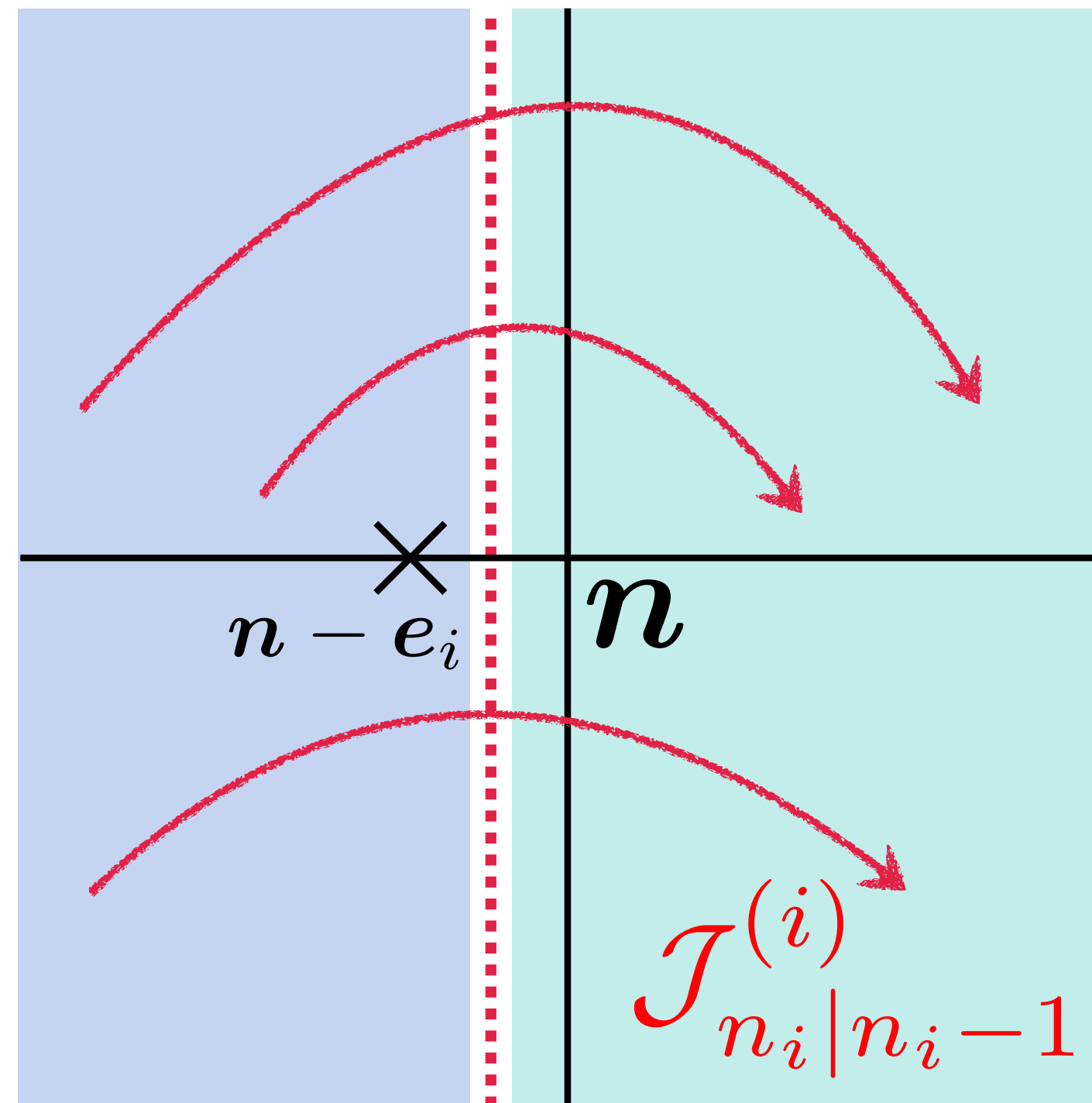
✓ $D (\geq 2)$ 次元長距離相互作用系におけるGreen-Kubo公式

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sum_{i=1}^D \frac{1}{N^D} \left\langle \left(\int_0^t ds \sum_n \sum_{r \in \mathcal{D}_i^+} r_i \mathcal{J}_{n:r}(s) \right) \left(\int_0^t ds' \sum_{n'} \sum_{r' \in \mathcal{D}^+} r'_i \mathcal{J}_{n':r'}(s') \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^D \frac{1}{N^D} \left\langle \left(\int_0^t ds \sum_{n_i} \mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{(i)}(s) \right) \left(\int_0^t ds' \sum_{n'_i} \mathcal{J}_{n'_i|n'_i-1}^{(i)}(s') \right) \right\rangle\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{(i)} = \sum_{\substack{k:k_i \geq n_i \\ \ell:l_i < n_i}} t_{k \leftarrow \ell}$$

$$\mathcal{D} = \frac{N^{1-D}}{c_V k_B T^2} \int_0^\infty dt$$

$$\sum_{i=1}^D \sum_{n_i=1}^N \langle \mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{(i)}(t) \mathcal{J}_{0|-1}^{(i)} \rangle$$



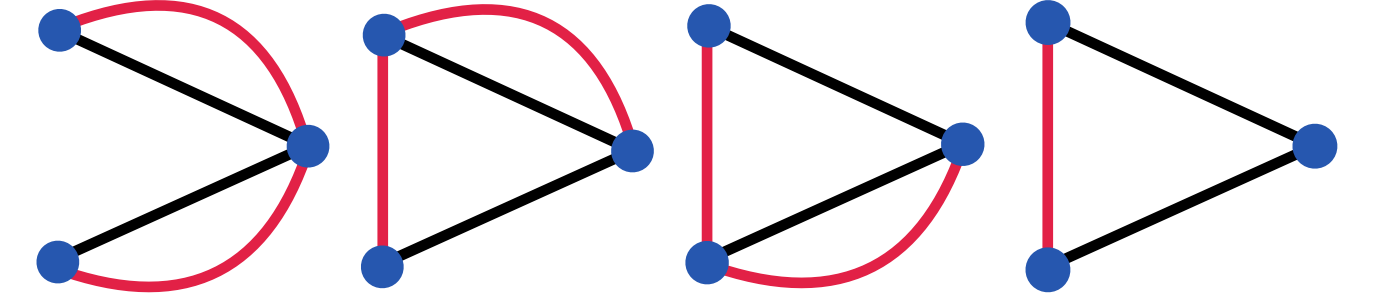
$\mathcal{J}_{n:r} = t_{n \leftarrow n+r}$ を r_i 回

(= i 方向の境界をまたいだ枚数)
だけ数えている

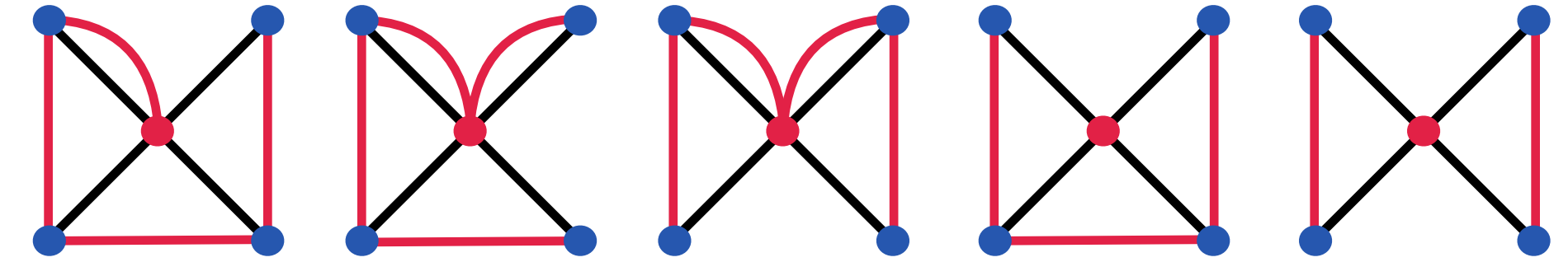
トータルカレント相関の上限： D 次元横磁場Ising・XY

$$C_N^{(D)}(0) = N^{1-D} \sum_{i=1}^D \sum_{n_i=1}^N \langle \mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{(i)} \mathcal{J}_{0|-1}^{(i)} \rangle_{\text{eq}}$$

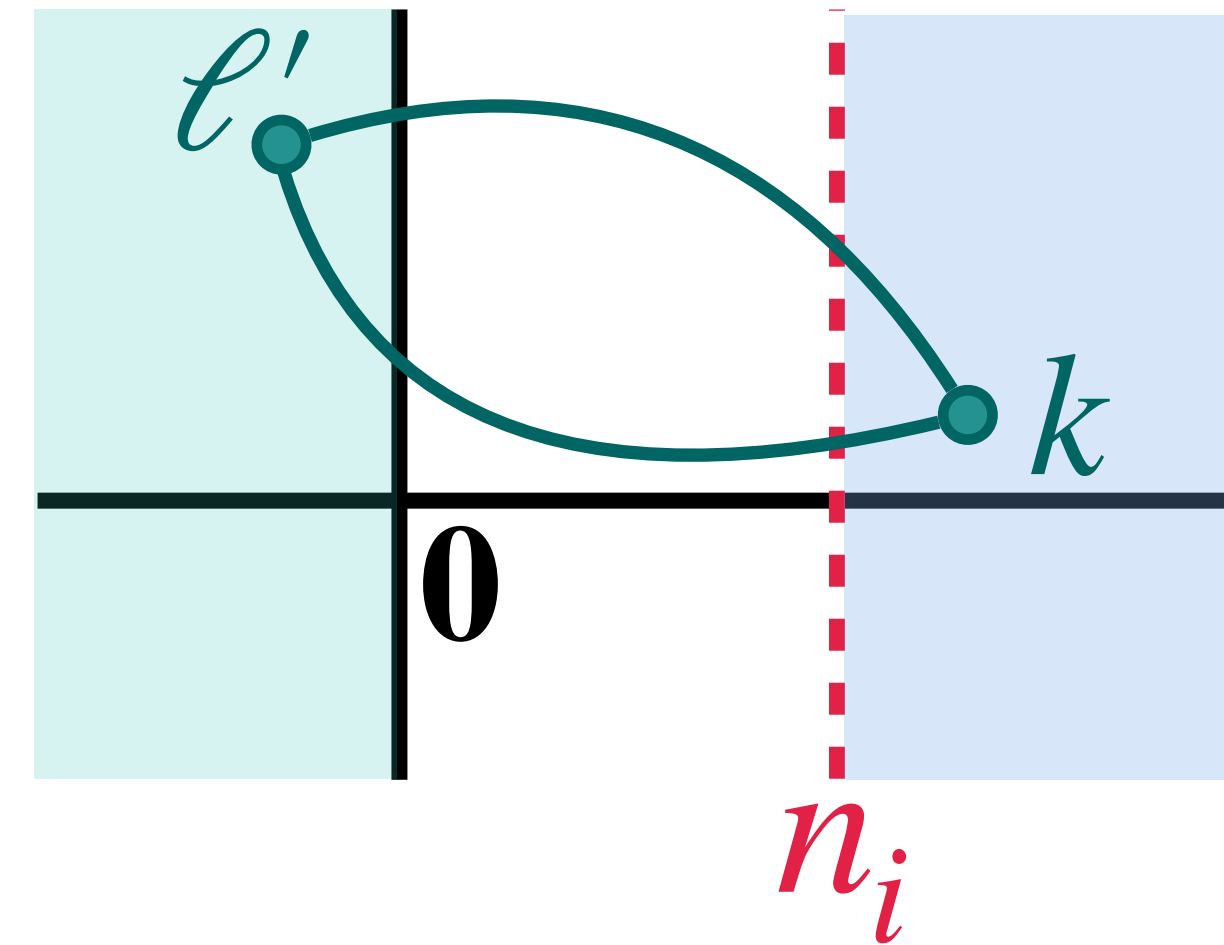
横磁場Ising



XY



$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{(i)} \mathcal{J}_{0|-1}^{(i)} \rangle &\leq \mathcal{O}(1) \sum_{\substack{k:k_i \geq n_i \\ \ell': \ell'_i < 0}} \frac{1}{d_{k,\ell'}^{2\alpha}} \\ &\leq \mathcal{O}(1) N^{D-1} n_i^{D+1-2\alpha} \end{aligned}$$



$$C_N^{(D)}(0) \leq \mathcal{O}(1) N^{D+2-2\alpha} + \text{const.} < \infty \quad (\alpha > D/2 + 1)$$

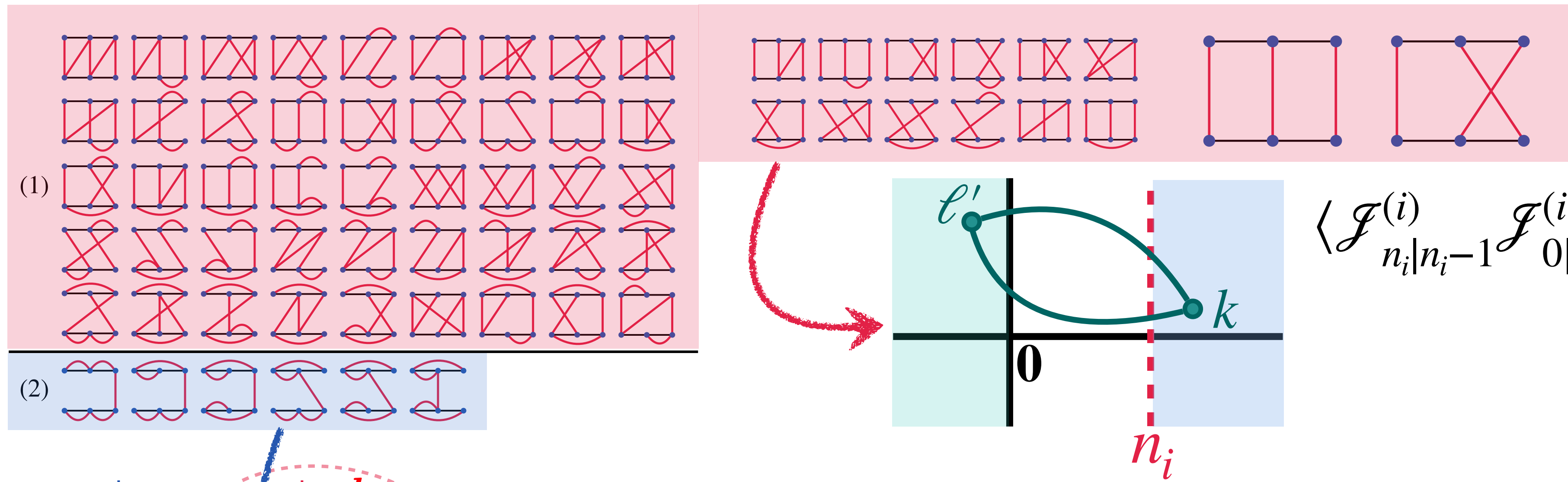
トータルカレント相関の上限： D 次元長距離 Trans. Ising · XY

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{k:k_i \geq n_i \\ \ell': \ell'_i < 0}} \frac{1}{d_{k,\ell'}^{2\alpha}} &\leq \int_{\substack{x_i \geq n_i \\ y_i < 0}} dx_i dy_i \prod_{k \neq i} \int_{-N/2}^{N/2} dx_k dy_k \left\{ (x_i - y_i)^2 + \sum_{j \neq i} (x_j - y_j)^2 \right\}^{-2\alpha/2} \\
 &\leq \Gamma_{D-1} \int_{-N/2}^{N/2} d^{D-1} u \int_{\substack{x_i \geq n_i \\ y_i < 0}} dx_i dy_i \int_0^\infty d\xi \xi^{D-2} \{ (x_i - y_i)^2 + \xi^2 \}^{-2\alpha/2} \\
 &\leq \frac{\Gamma_{D-1} B(\frac{D-1}{2}, \alpha - \frac{D-1}{2})}{2} N^{D-1} \int_0^{N/2} dx dy (n_i + x + y)^{D-1-2\alpha} \\
 &\leq \frac{\Gamma_{D-1} B(\frac{D-1}{2}, \alpha - \frac{D-1}{2})}{2(D-2\alpha)(D+1-2\alpha)} N^{D-1} n_i^{D+1-2\alpha}
 \end{aligned}$$

トータルカレント相関の上限： D 次元長距離XYZ

$$C_N^{(D)}(0) = N^{1-D} \sum_{i=1}^D \sum_{n_i=1}^N \langle \mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{(i)} \mathcal{J}_{0|-1}^{(i)} \rangle_{\text{eq}}$$

$$\langle S_a^\sigma S_b^\tau S_c^\nu S_{a'}^{\sigma'} S_{b'}^{\tau'} S_{c'}^{\nu'} \rangle_{\text{eq.}} = \langle SSSSSS \rangle_c + \sum \langle SS \rangle_c \langle SSSS \rangle_c + \sum \langle SS \rangle_c \langle SS \rangle_c \langle SS \rangle_c$$

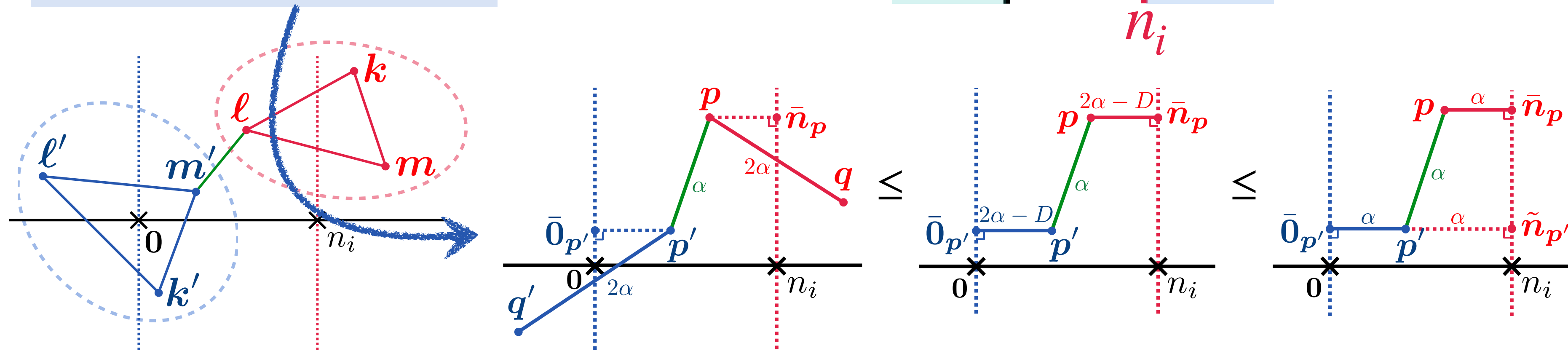


$$\langle \mathcal{J}_{n_i|n_i-1}^{(i)} \mathcal{J}_{0|-1}^{(i)} \rangle \leq \mathcal{O}(1) \sum_{\substack{k:k_i \geq n_i \\ \ell': \ell'_i < 0}} \frac{1}{d_{k,\ell'}^{2\alpha}}$$

$$\leq \mathcal{O}(1) N^{D-1} n_i^{D+1-2\alpha}$$

DOMINANT !!

for $D \geq 2$



量子系について

✓ 定理1は量子系でも同様に成立

✓ 非可積分なFermion系

：定理2,3も成立。同じ普遍性があると期待される（1次元では $\alpha_c = 3/2$ ）。

しかし、時間発展についての検証は難しい

✓ 非可積分なBoson系

：局所的な物理量がunbound→定理1が直接適用できない

✓ 可積分系（ $\alpha \rightarrow \infty$ 、スピン1/2）

：無限個の保存量がある→ゆらぐ流体のformalismが非自明（Ballisticな

GHD）、時間積分の収束性・定理2の最適性も不明

解決・未解決リスト

$$H = \sum_{i,j} \left[\sum_{\sigma=x,y,z} \frac{J_{\sigma} S_i^{\sigma} S_j^{\sigma}}{d_{i,j}^{\alpha}} + \sum_{\sigma \neq \tau} \frac{J_{\sigma\tau} S_i^{\sigma} S_j^{\tau}}{d_{i,j}^{\alpha}} \right] + \sum_i \sum_{\sigma} h_{\sigma} S_i^{\sigma}$$

✓エネルギー拡散

ゼロでない係数

1. 横磁場Ising

$$J_x, h_z$$

2. XY・XYZ

$$J_x, J_y, J_z$$

3. 横磁場XY

$$J_x, J_y, h_z$$

✓スピン拡散

1. 横磁場XX

$$J_x = J_y, h_z$$

2. XX・XXZ

$$J_x = J_y, J_z$$

✓未解決リスト

1. 横磁場XY

$$J_x, J_y, h_x$$

2. 横磁場XYZ

$$J_x, J_y, J_z, h_x$$

3. Dzyaloshinskii-Moriya相互作用

$$J_{\sigma\tau}$$

全て $\alpha_c = 3/2$ @ 1次元, $\alpha > D$ では必ず通常拡散 @ $D (\geq 2)$ 次元