

Lindbladian PT 相転移： 臨界例外点と散逸時間結晶の出現

東京大学大学院理学系研究科附属
知の物理学研究センター

中西 優馬

共同研究者



花井 亮
(東京科学大学)



笹本 智弘
(東京科学大学)

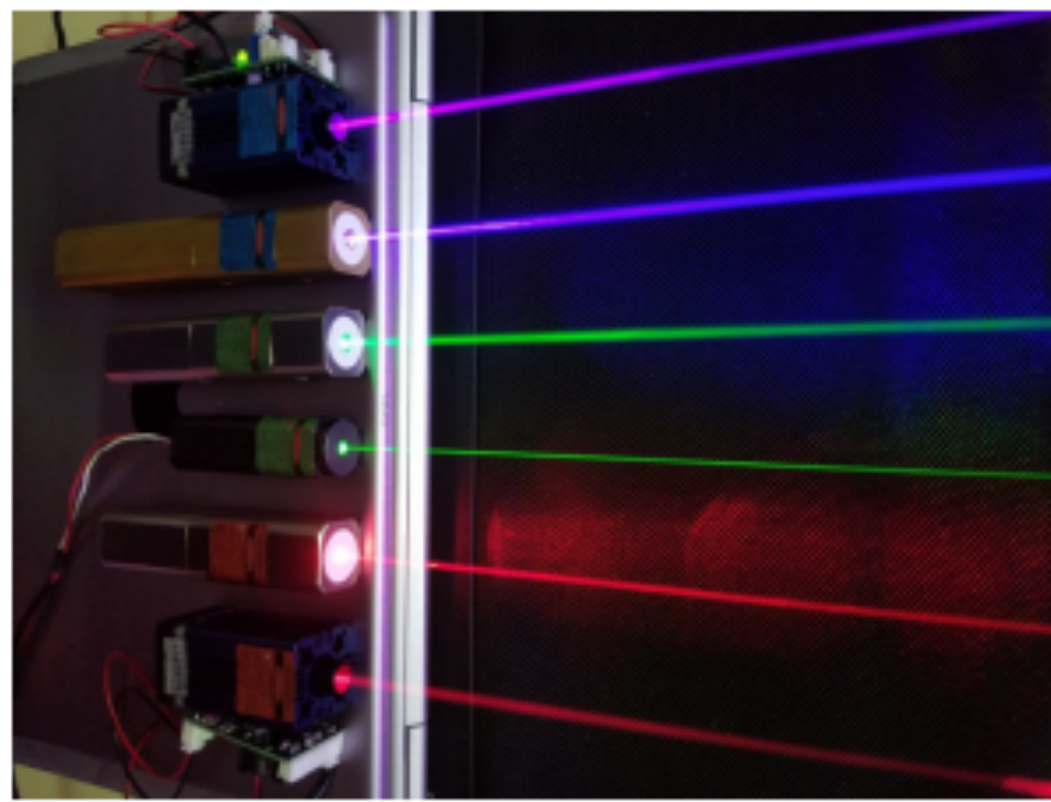
開放量子系の非平衡現象と対称性の破れ

2

開放量子系では、熱平衡系では現れない非平衡現象が生じる

レーザー

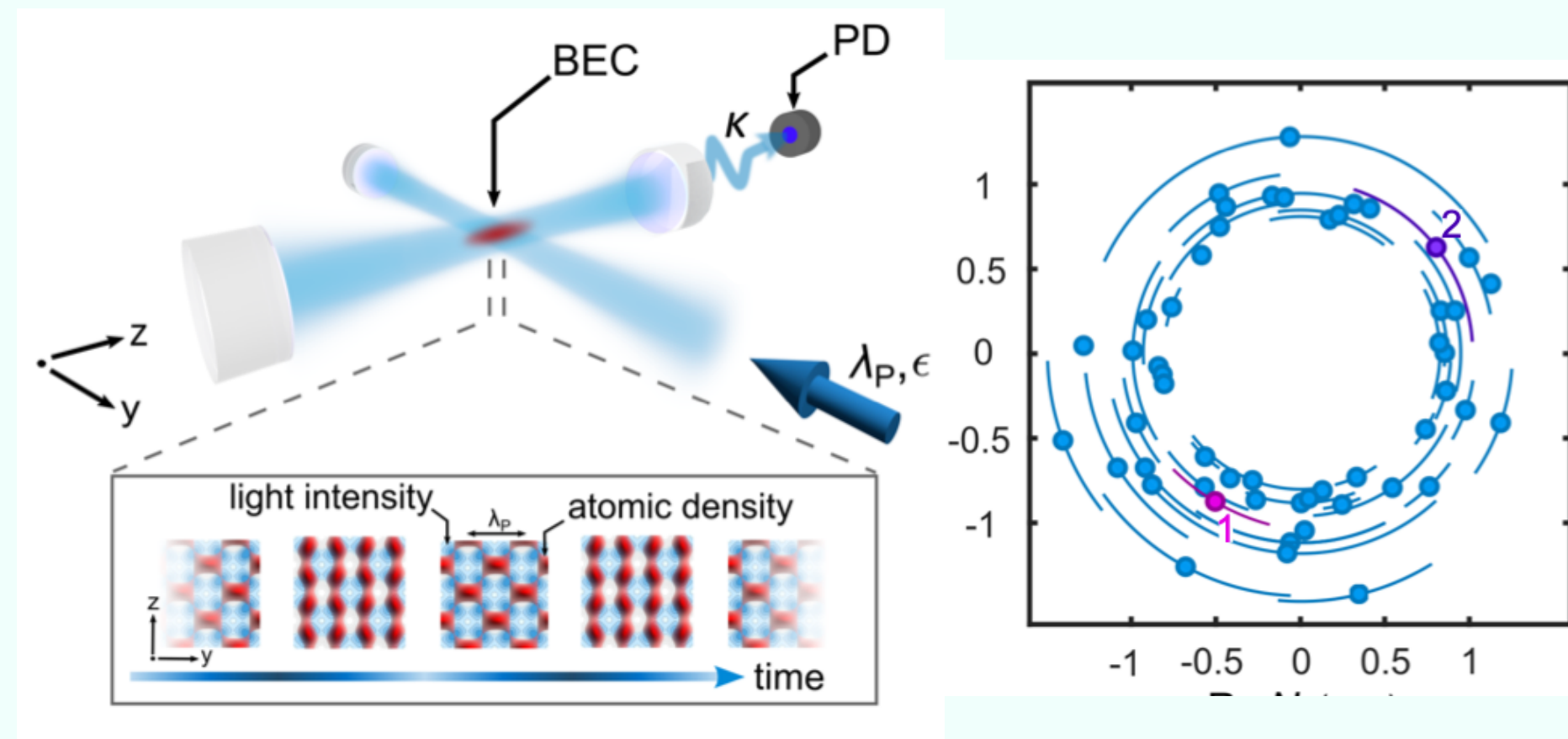
image from Wikipedia



U(1)対称性の破れ

散逸時間結晶

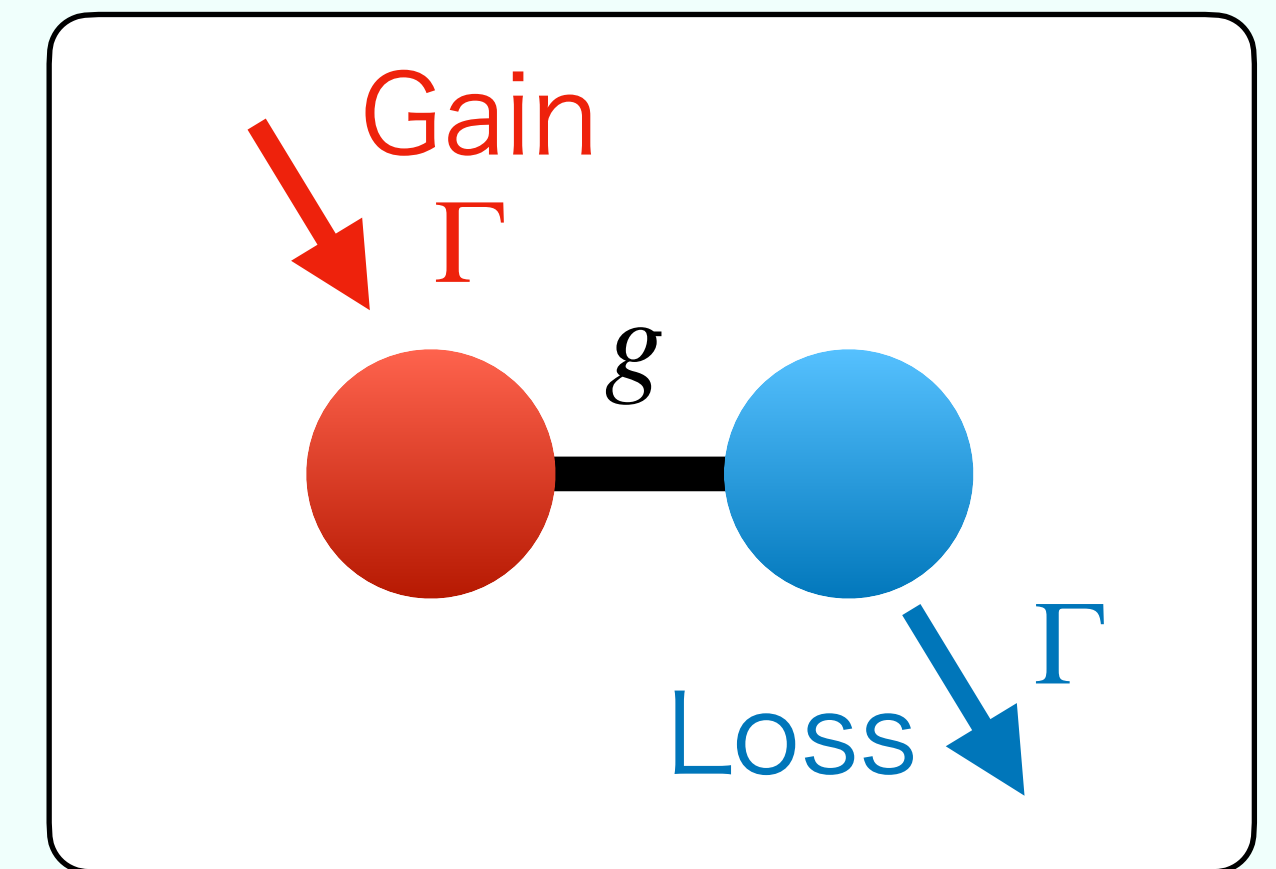
[P. Kongkhambut et al, Science (2022)]



連続時間並進対称性の破れ

パリティ・時間 (PT) 転移

[C. M. Bender, and S. Boettche, PRL (1998)]



PT対称性の破れ

PT対称性 & PT転移

3

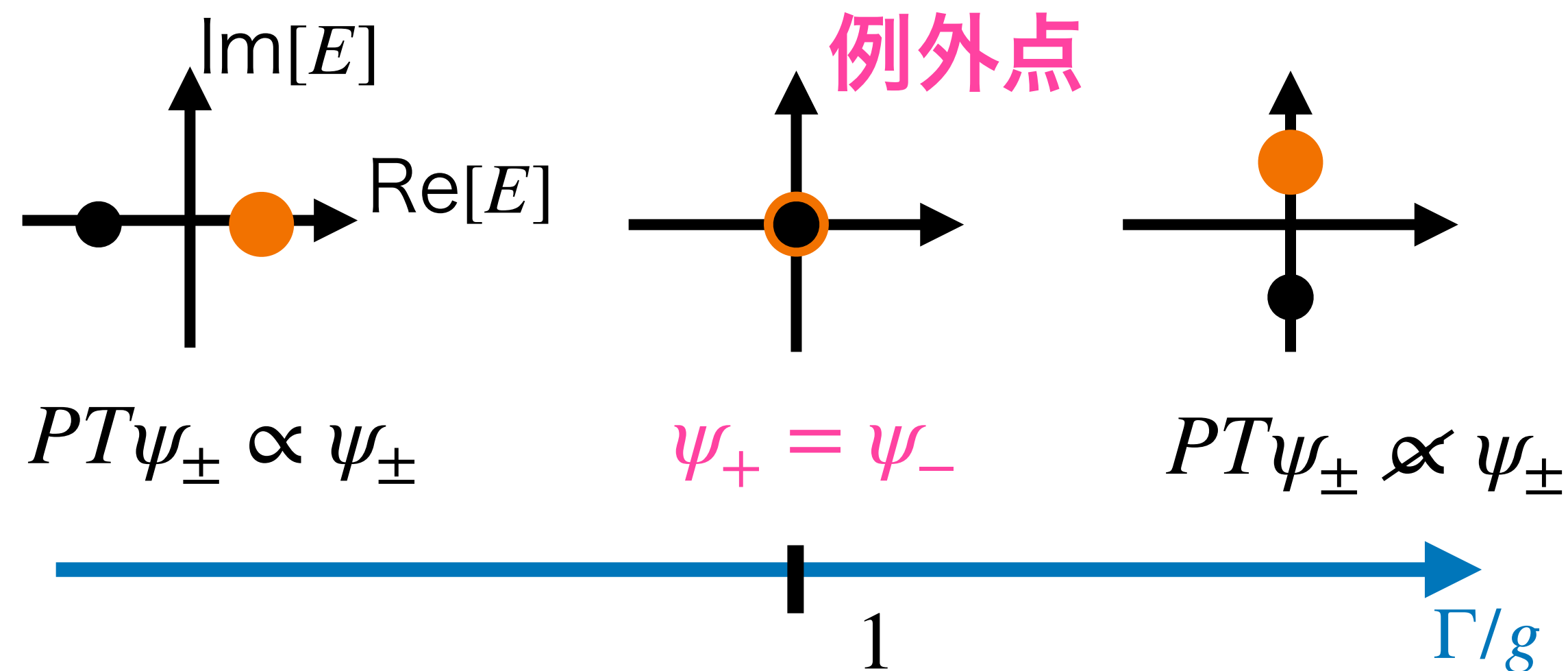
PT対称性

$$[H, PT] = 0 \quad (i\partial_t\psi = H\psi)$$

H : 非エルミートハミルトニアン

P : パリティ演算子 T : 時間反転演算子

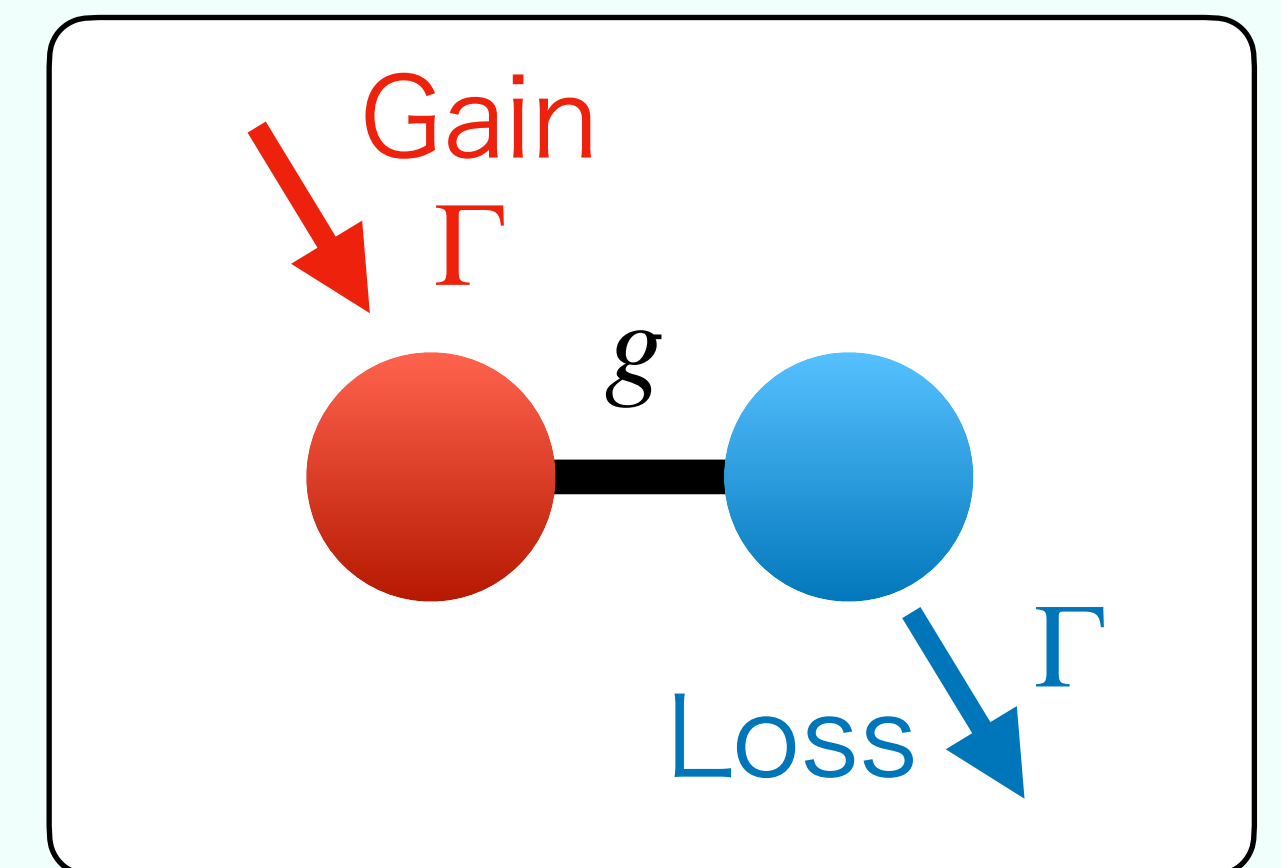
PT転移：ゲインとロスが釣り合った系



$$H = \begin{pmatrix} i\Gamma & g \\ g & -i\Gamma \end{pmatrix}$$

パリティ・時間 (PT) 転移

[C. M. Bender, and S. Boettche, PRL (1998)]



スペクトル転移であり、相転移ではない！

PT対称性の破れ

Open question

PT対称性の破れを伴う開放量子系の定常状態の相転移は存在するか？

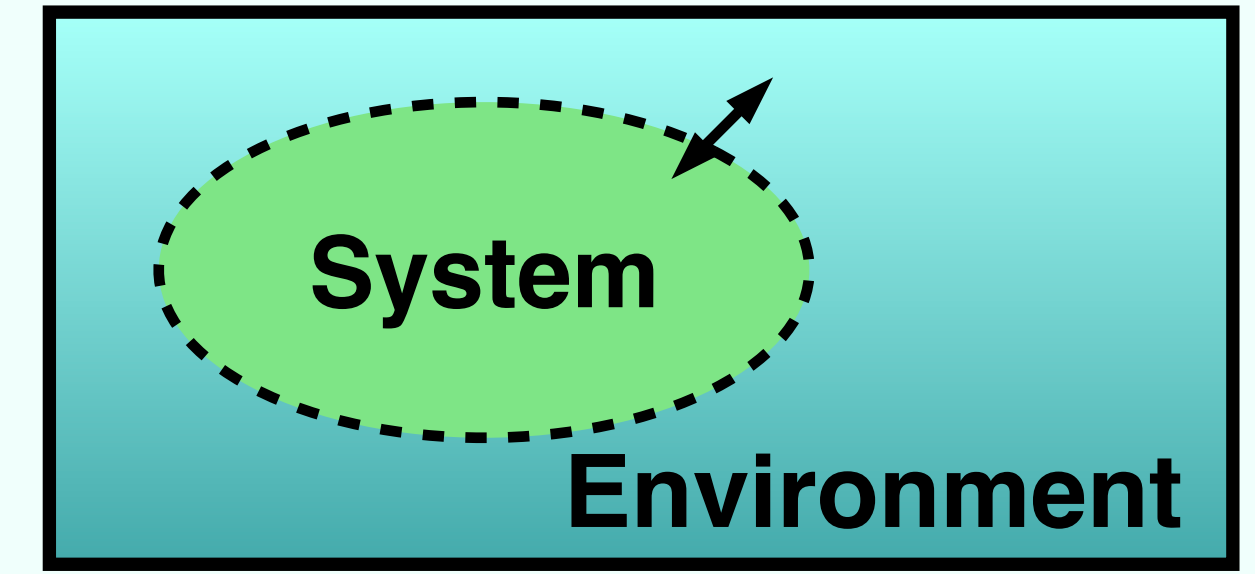
開放量子系における定常状態の相転移

4

GKSL (Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad) 方程式

$$\dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}[H, \{L_{\mu}\}]\rho = -i[H, \rho] + \sum_{\mu} 2L_{\mu}\rho L_{\mu}^{\dagger} - \{L_{\mu}^{\dagger}L_{\mu}, \rho\}$$

Linbladian 超演算子 コヒーレント項 インコヒーレント(散逸)項



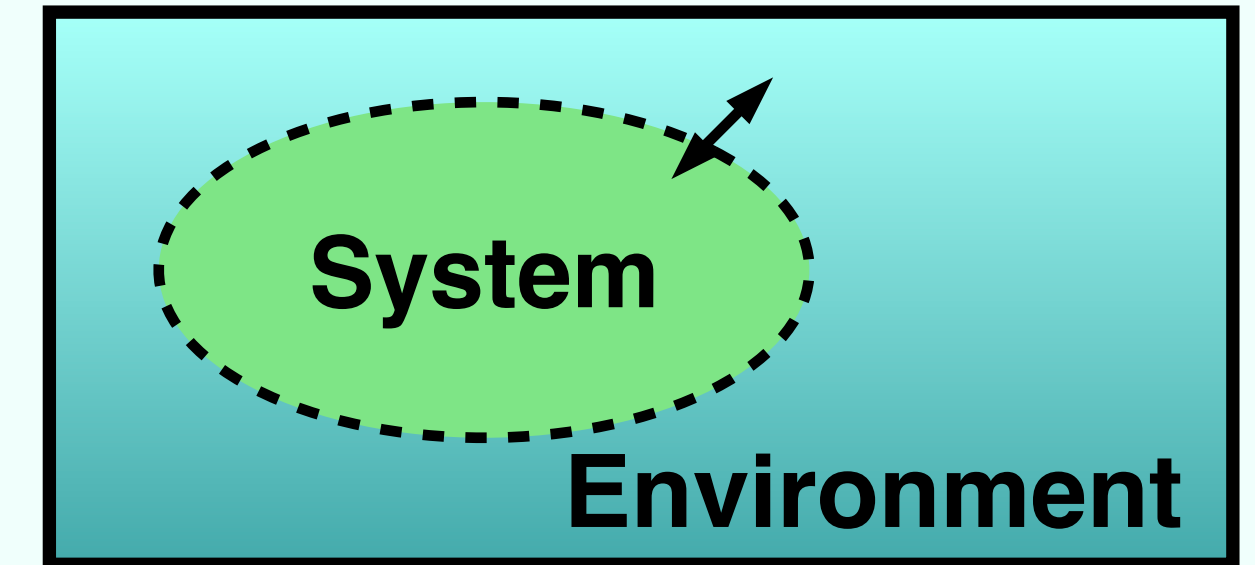
開放量子系における定常状態の相転移

5

GKSL (Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad) 方程式

$$\dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}[H, \{L_\mu\}]\rho = \underbrace{-i[H, \rho]}_{\text{Linbladian 超演算子}} + \underbrace{\sum 2L_\mu \rho L_\mu^\dagger - \{L_\mu^\dagger L_\mu, \rho\}}_{\text{インコヒーレント(散逸)項}}$$

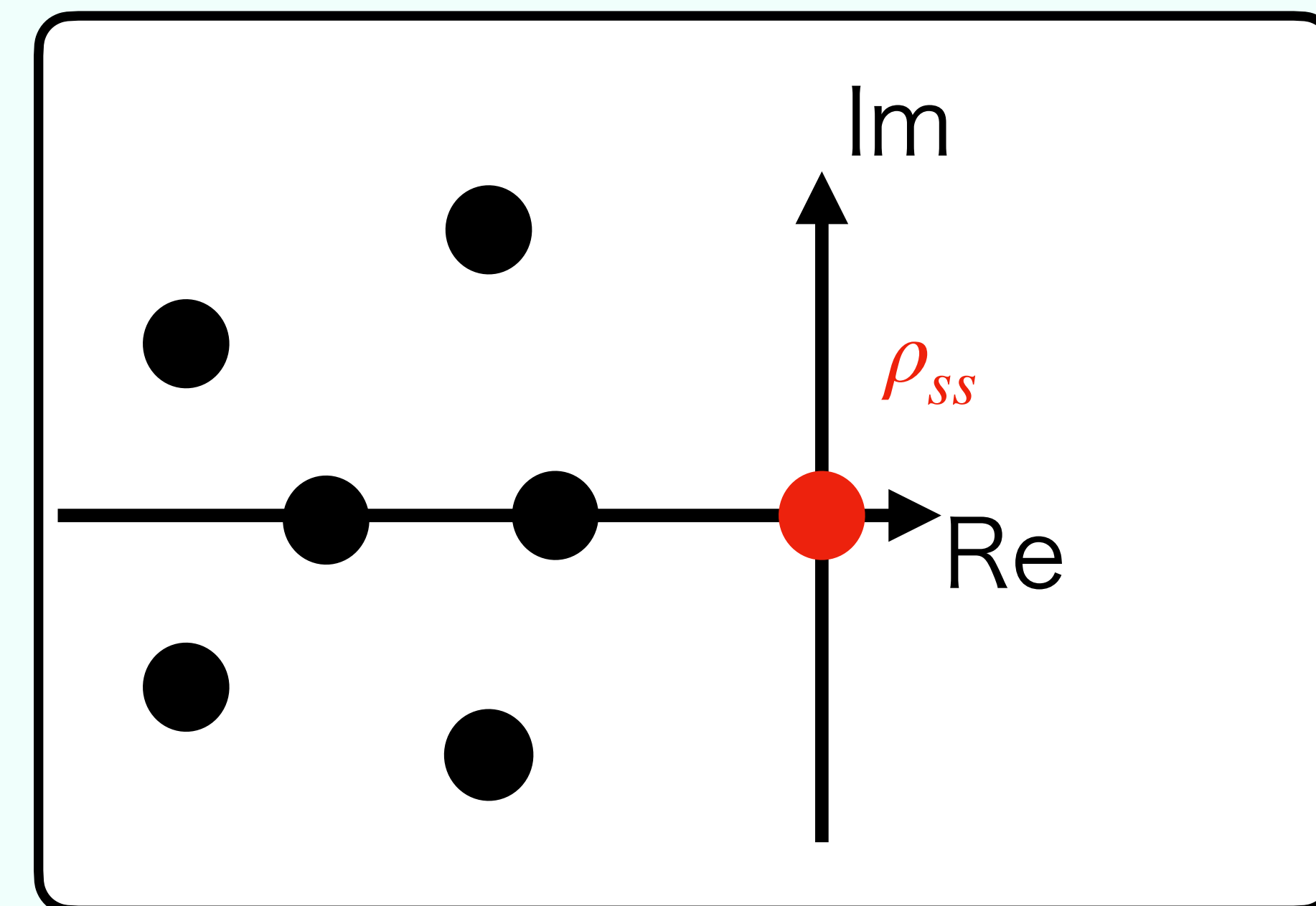
Linbladian 超演算子 コヒーレント項 インコヒーレント(散逸)項



- 定常状態 = 固有値 0 の固有モード $\hat{\mathcal{L}}\rho_{ss} = 0$ ※定常状態は単一であると仮定

- 固有値の実部は 0 以下 $\text{Re}[\text{Spec}[\hat{\mathcal{L}}]] \leq 0$

Lindbladian のスペクトル

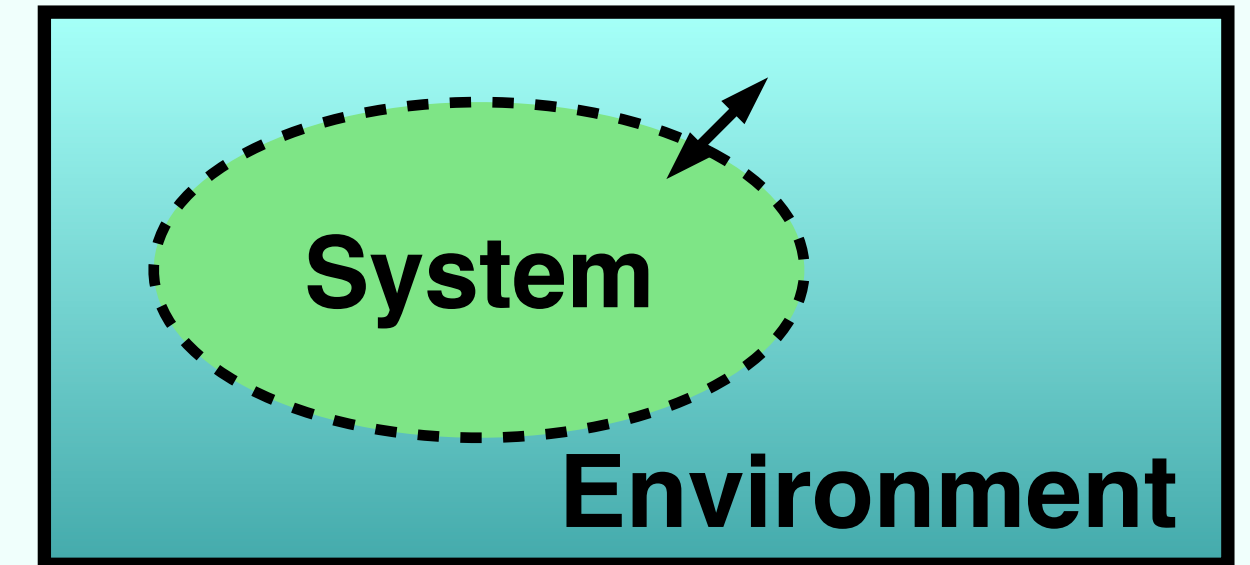


開放量子系における定常状態の相転移

6

GKSL (Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad) 方程式

$$\dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}[H, \{L_\mu\}]\rho = \underbrace{-i[H, \rho]}_{\text{Linbladian 超演算子}} + \underbrace{\sum 2L_\mu \rho L_\mu^\dagger}_{\text{コヒーレント項}} - \underbrace{\{L_\mu^\dagger L_\mu, \rho\}}_{\text{インコヒーレント(散逸)項}}$$



- 定常状態 = 固有値 0 の固有モード $\hat{\mathcal{L}}\rho_{ss} = 0$ ※定常状態は単一であると仮定

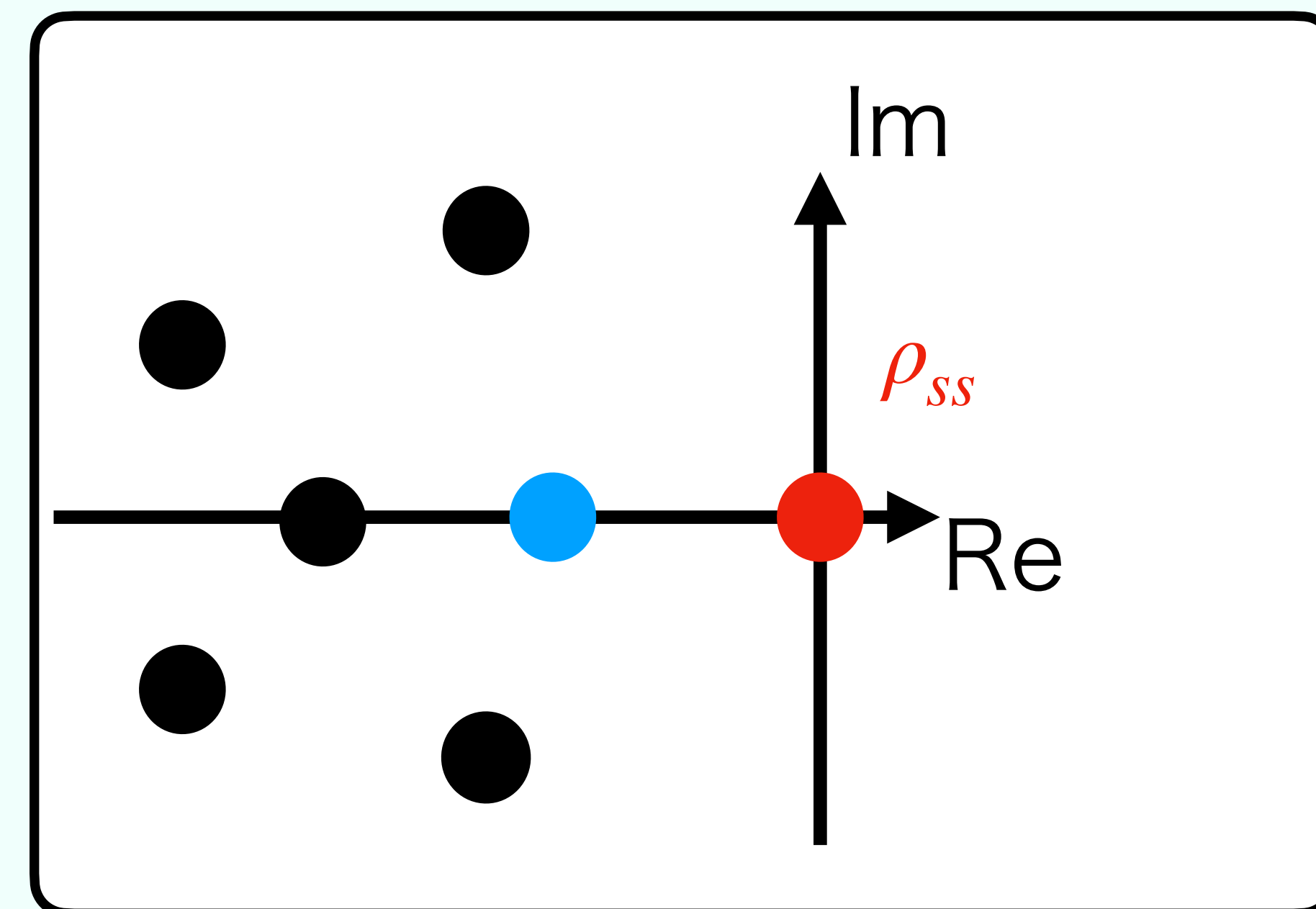
- 固有値の実部は 0 以下 $\text{Re}[\text{Spec}[\hat{\mathcal{L}}]] \leq 0$

- 対称性 = $\hat{\mathcal{L}}$ と(反)可換である超演算子の存在

e.g) Z_2 対称性 $[\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{I}}_2] = 0, \hat{\mathcal{I}}_2 \cdot = Z_2 \cdot Z_2^{-1}$

- 異なる対称セクターの固有モードの縮退によって、対称性の自発的破れが生じる

Lindbladianのスペクトル

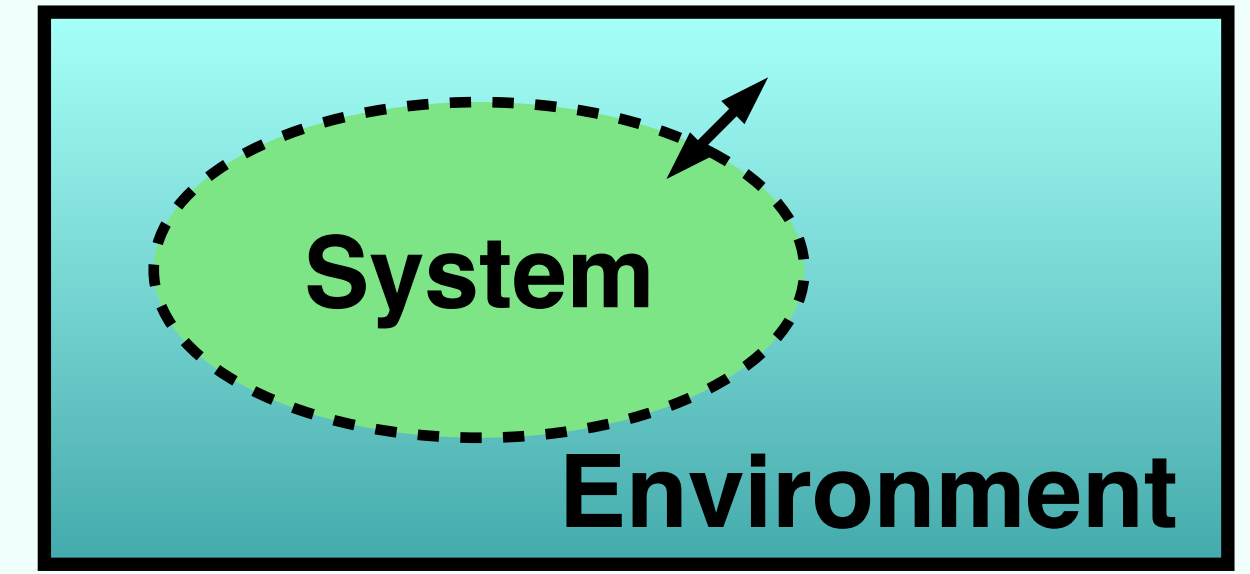


開放量子系における定常状態の相転移

7

GKSL (Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad) 方程式

$$\dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}[H, \{L_\mu\}]\rho = \underbrace{-i[H, \rho]}_{\text{Linbladian 超演算子}} + \underbrace{\sum 2L_\mu \rho L_\mu^\dagger}_{\text{コヒーレント項}} - \underbrace{\{L_\mu^\dagger L_\mu, \rho\}}_{\text{インコヒーレント(散逸)項}}$$



- 定常状態 = 固有値 0 の固有モード $\hat{\mathcal{L}}\rho_{ss} = 0$ ※定常状態は単一であると仮定

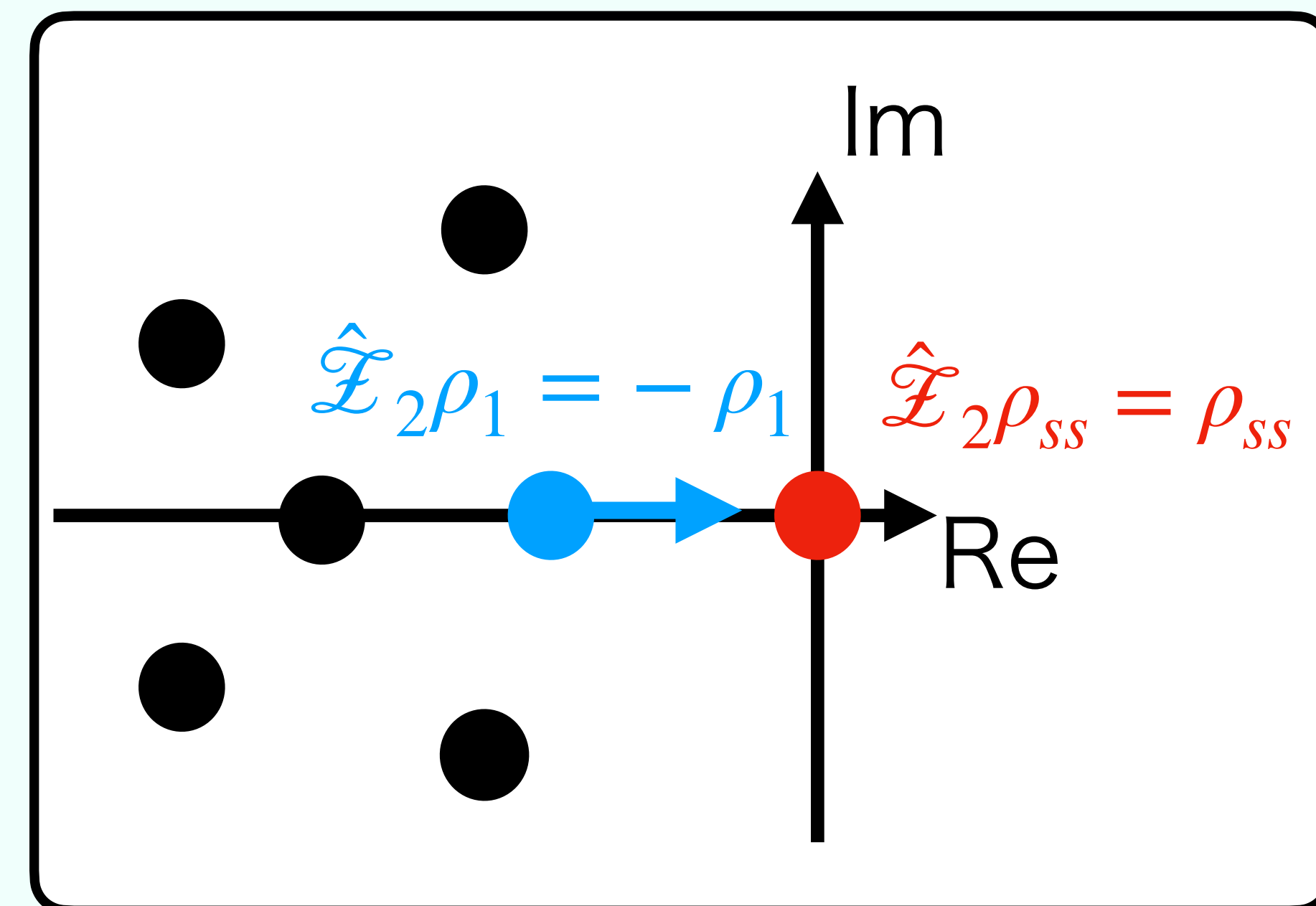
- 固有値の実部は 0 以下 $\text{Re}[\text{Spec}[\hat{\mathcal{L}}]] \leq 0$

- 対称性 = $\hat{\mathcal{L}}$ と(反)可換である超演算子の存在

e.g) Z_2 対称性 $[\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}_2] = 0, \hat{\mathcal{L}}_2 \cdot = Z_2 \cdot Z_2^{-1}$

- 異なる対称セクターの固有モードの縮退によって、対称性の自発的破れが生じる

Lindbladianのスペクトル



Lindbladian PT対称性をどのように定義する？

$$H \leftrightarrow i\hat{\mathcal{L}} \quad [i\hat{\mathcal{L}}, \cancel{\hat{\rho}\hat{\mathcal{T}}}] = 0 \Rightarrow \text{Spec}[\hat{\mathcal{L}}] \ni \pm a - ib \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$i\hbar\dot{\psi} = H\psi \quad \dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}\rho$ これは $\text{Re}[\text{Spec}[\hat{\mathcal{L}}]] \leq 0$ と矛盾

Lindbladian PT対称性をどのように定義する？

$$H \leftrightarrow i\hat{\mathcal{L}} \quad [i\hat{\mathcal{L}}, \cancel{\hat{\rho}\hat{\mathcal{T}}}] = 0 \Rightarrow \text{Spec}[\hat{\mathcal{L}}] \ni \pm a - ib \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$i\hbar\dot{\psi} = H\psi \quad \dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}\rho$ これは $\text{Re}[\text{Spec}[\hat{\mathcal{L}}]] \leq 0$ と矛盾

Lindbladian PT (L-PT)対称性

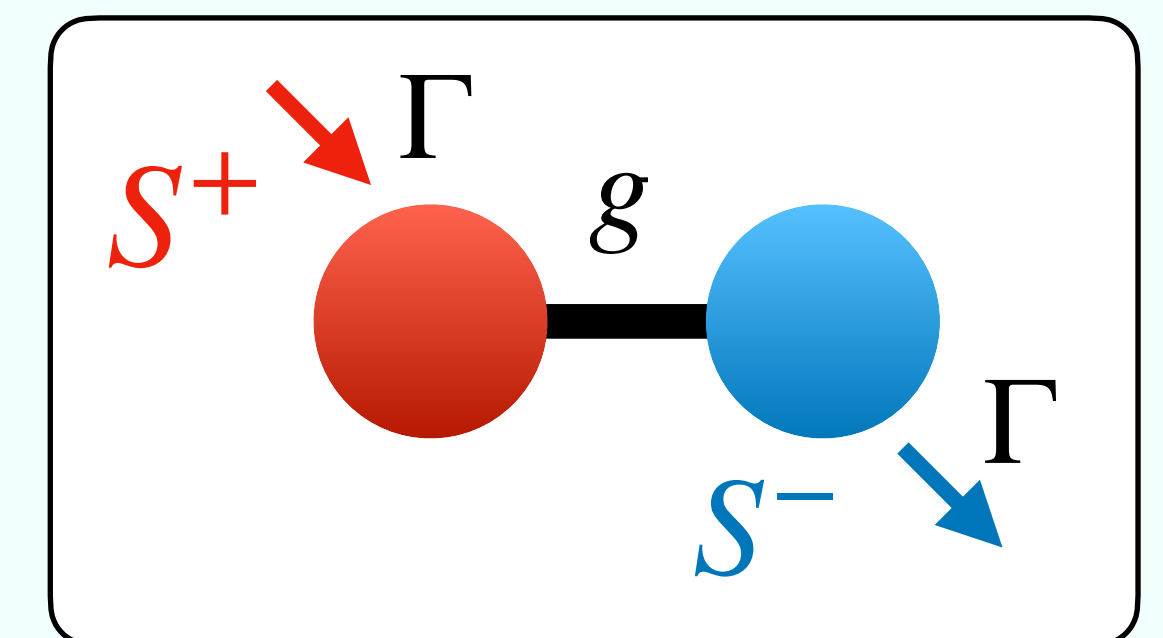
J. Huber et al., Scipost (2022)

$$\hat{\mathcal{L}}[PTH^\dagger(PT)^{-1}, \{PTL_\mu^\dagger(PT)^{-1}\}] = \hat{\mathcal{L}}[H, \{L_\mu\}]$$

H と L_μ に対して対称変換を行った時の不変性として定義

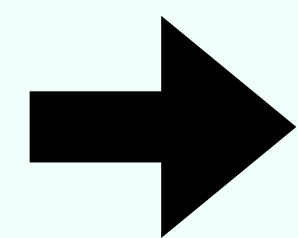
- 典型的なゲインとロスが釣り合った系はL-PT対称性を満たす
- モデル依存な解析でユニタリ対称性の自発的破れを伴わない相転移が生じることが報告されている

YN and TS, PRA (2023)



L-PT対称性を満たすクラスで生じる相転移の普遍的な性質は何か？

- 交換関係に書き直せないので、**通常**の対称性の議論ができない、、、



L-PT対称性を満たすクラスの平均場解析、および基本的性質の解明

Lindbladian PT (L-PT)対称性

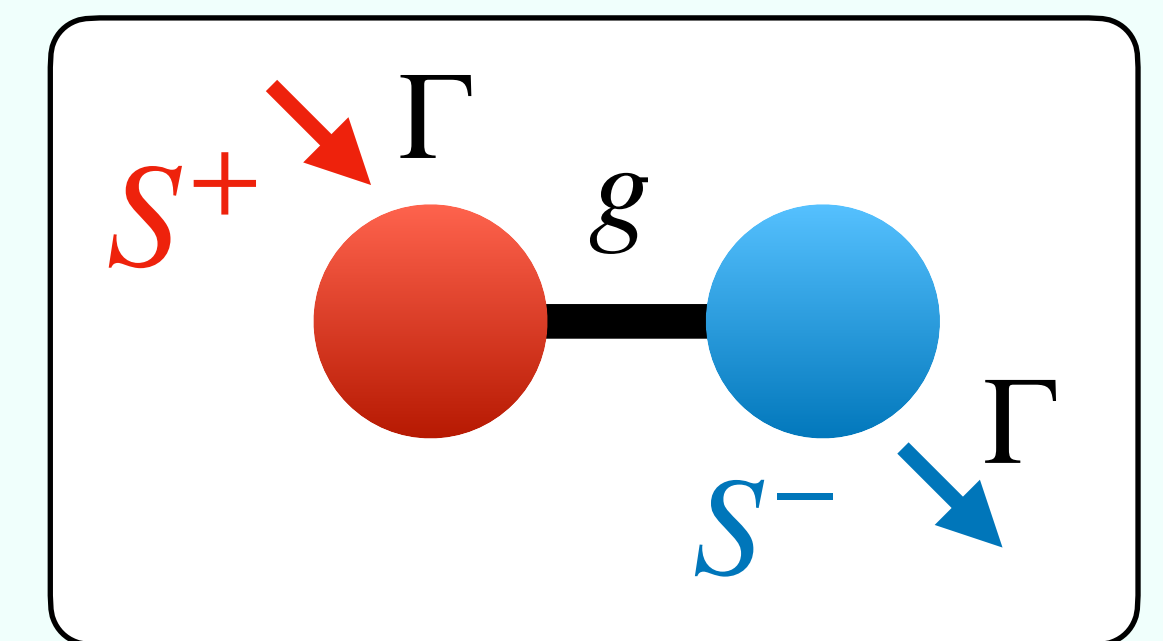
J. Huber et al., Scipost (2022)

$$\hat{\mathcal{L}}[PTH^\dagger(PT)^{-1}, \{PTL_\mu^\dagger(PT)^{-1}\}] = \hat{\mathcal{L}}[H, \{L_\mu\}]$$

H と L_μ に対して対称変換を行った時の不変性として定義

- 典型的なゲインとロスが釣り合った系はL-PT対称性を満たす
- モデル依存な解析でユニタリ対称性の自発的破れを伴わない相転移が生じることが報告されている

YN and TS, PRA (2023)



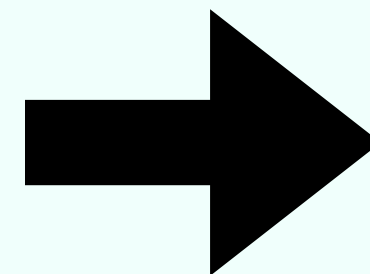
1. **Lindbladian PT対称性**を満たす、粒子数保存のあるボソンモデルの平均場方程式は、**非線形PT対称性**を満たす [YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]

$$\langle a^\dagger a a \rangle \simeq \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle^2 \quad \text{全粒子数} N \text{が十分大きい時に正当化される}$$

ミクロな時間発展方程式

$$\begin{aligned} \dot{\langle a_i \rangle} &= i \langle [a_i, H] \rangle \\ &+ \sum \langle [L_\mu^\dagger, a_i] L_\mu \rangle + \langle [L_\mu^\dagger [a_i, L_\mu] \rangle \end{aligned}$$

平均場近似

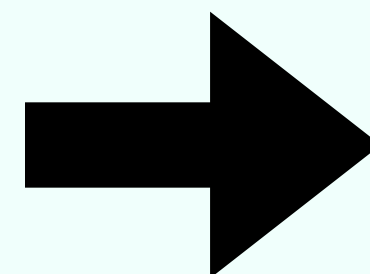


非線形平均場方程式

$$\begin{aligned} i \partial_t \mathbf{q} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}) & \mathbf{f} &:= (f_1, f_2, \dots, f_l)^T \\ \mathbf{q} &:= (\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \dots, \langle a_l \rangle)^T \end{aligned}$$

Lindbladian PT 対称性

$$\hat{\mathcal{L}}[PTH^\dagger(PT)^{-1}, \{PTL_\mu^\dagger(PT)^{-1}\}] = \hat{\mathcal{L}}[H, \{L_\mu\}]$$



非線形PT 対称性

$$\tilde{P} \tilde{T} \mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{f}(\tilde{P} \tilde{T} \mathbf{q}(t))$$

$$Pa_i P^{-1} = a_{\sigma(i)}, \quad T: i \rightarrow -i, \quad \sigma^2 = 1, \quad \sigma: \text{置換}$$

$$[\tilde{P} \mathbf{f}]_i = \mathbf{f}_{\sigma(i)}, \quad \tilde{T}: i \rightarrow -i, \quad t \rightarrow -t$$

ρ が解であるときでも、
 $PT\rho(PT)^{-1}$ が解であるとは限らない

$\mathbf{q}$ が解であるとき、 $\tilde{P} \tilde{T} \mathbf{q}$ も解である

2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ**、転移点は**臨界例外点**となる

└ 一様解は2つのサブ格子の運動方程式で記述できる

[YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]

非線形平均場方程式

$$\langle a_A \rangle = r_A \exp(i\theta_A), \langle a_B \rangle = r_B \exp(i\theta_B)$$

$$i\partial_t \mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = i \begin{pmatrix} G(r_A, r_B, \Delta\theta)/r_A \\ -G(r_A, r_B, \Delta\theta)/r_B \\ H(r_A, r_B, \Delta\theta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q} := (r_A, r_B, \Delta\theta)^T, \Delta\theta := \theta_A - \theta_B, r_A^2 + r_B^2 = \text{const.}$$

G (H): r_A, r_B の入れ替えに対して(反)対称

$$\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{f}(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}(t)), \tilde{P}\tilde{T}(r_A, r_B, \Delta\theta_{AB})^T = (r_B, r_A, \Delta\theta_{AB})^T$$

線形安定性解析

$$\partial_t \delta \mathbf{q} = J \delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q} := (\delta r_A, \delta \Delta\theta)^T$$

ある固定点 $\mathbf{q}_{ss}$ に対して

$$J = \begin{pmatrix} \gamma_1(\mathbf{q}) & \alpha(\mathbf{q}) \\ \beta(\mathbf{q}) & \gamma_2(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1(\mathbf{q}) := -\partial_{r_B} G/r_B + \partial_{r_A} G/r_A,$$

$$\gamma_2(\mathbf{q}) := \partial_{\Delta\theta} H$$

$$\gamma_1(\mathbf{q}_{ss}) = -\gamma_1(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss})$$

$$\gamma_2(\mathbf{q}_{ss}) = -\gamma_2(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss})$$

2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ、転移点は臨界例外点となる**

└ 一様解は2つのサブ格子の運動方程式で記述できる

[YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]

PT対称な固定点($\mathbf{q}_{ss} = \tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss}$)周りでの線形安定性解析

$$\gamma_{1,2}(\mathbf{q}_{ss}) = -\gamma_{1,2}(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss})$$

$$\therefore \gamma_{1,2}(\mathbf{q}_{ss}) = 0$$

$$J_{PT} = \begin{pmatrix} \gamma_1(\mathbf{q}_{ss}) & \alpha(\mathbf{q}_{ss}) \\ \beta(\mathbf{q}_{ss}) & \gamma_2(\mathbf{q}_{ss}) \end{pmatrix}$$

2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ**、転移点は**臨界例外点**となる

└ 一様解は2つのサブ格子の運動方程式で記述できる

[YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]

PT対称な固定点($\mathbf{q}_{ss} = \tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss}$)周りでの線形安定性解析

$$\gamma_{1,2}(\mathbf{q}_{ss}) = -\gamma_{1,2}(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss})$$

$$\therefore \gamma_{1,2}(\mathbf{q}_{ss}) = 0$$

$$J_{PT} = \begin{pmatrix} \overline{\gamma_1(\mathbf{q}_{ss})} & \alpha(\mathbf{q}_{ss}) \\ \beta(\mathbf{q}_{ss}) & \overline{\gamma_2(\mathbf{q}_{ss})} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 0 \\ \\ = 0 \end{matrix}$$

集団励起モード・スペクトル $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\delta q_{\pm} = (\pm\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})^T, \quad \lambda = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

• $\alpha\beta > 0 \rightarrow$ 不安定固定点

• $\alpha\beta < 0 \rightarrow$ 永久周期振動

• $\alpha\beta = 0 \rightarrow \delta q_+ = \delta q_-$

臨界例外点

M. Fruchart et al., **Non-reciprocal phase transitions**, Nature **592** (2021).

2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ**、転移点は**臨界例外点**となる

└ 一様解は2つのサブ格子の運動方程式で記述できる

[YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]

PT対称な固定点($\mathbf{q}_{ss} = \tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss}$)周りでの線形安定性解析

$$\gamma_{1,2}(\mathbf{q}_{ss}) = -\gamma_{1,2}(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss})$$

$$\therefore \gamma_{1,2}(\mathbf{q}_{ss}) = 0$$

$$J_{PT} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(\mathbf{q}_{ss})}{\beta(\mathbf{q}_{ss})} & \alpha(\mathbf{q}_{ss}) \\ \beta(\mathbf{q}_{ss}) & \frac{\gamma_2(\mathbf{q}_{ss})}{\alpha(\mathbf{q}_{ss})} \end{pmatrix} = 0$$

集団励起モード・スペクトル $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\delta q_{\pm} = (\pm\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})^T, \quad \lambda = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

- **非平衡特有**の転移点
- 臨界例外点近傍で**非自明な現象**が現れる

- エントロピー生成の発散 T. Suchanek, et al., Phys. Rev. E 108, 064610 (2023).

- 巨視的揺らぎ R. Hanai and P. B. Littlewood, PRR (2020).

- $\alpha\beta > 0 \rightarrow$ 不安定固定点

- $\alpha\beta < 0 \rightarrow$ 永久周期振動

- $\alpha\beta = 0 \rightarrow \delta q_+ = \delta q_-$

臨界例外点

M. Fruchart et al., **Non-reciprocal phase transitions**, Nature 592 (2021).

2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ**、転移点は**臨界例外点**となる

└ 一様解は2つのサブ格子の運動方程式で記述できる

[YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]

PT対称な固定点($\mathbf{q}_{ss} = \tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss}$)周りでの線形安定性解析

$$\gamma_{1,2}(\mathbf{q}_{ss}) = -\gamma_{1,2}(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss})$$

$$\therefore \gamma_{1,2}(\mathbf{q}_{ss}) = 0$$

$$J_{PT} = \begin{pmatrix} \overbrace{\gamma_1(\mathbf{q}_{ss})}^{=0} & \alpha(\mathbf{q}_{ss}) \\ \beta(\mathbf{q}_{ss}) & \underbrace{\gamma_2(\mathbf{q}_{ss})}_{=0} \end{pmatrix}$$

集団励起モード・スペクトル $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

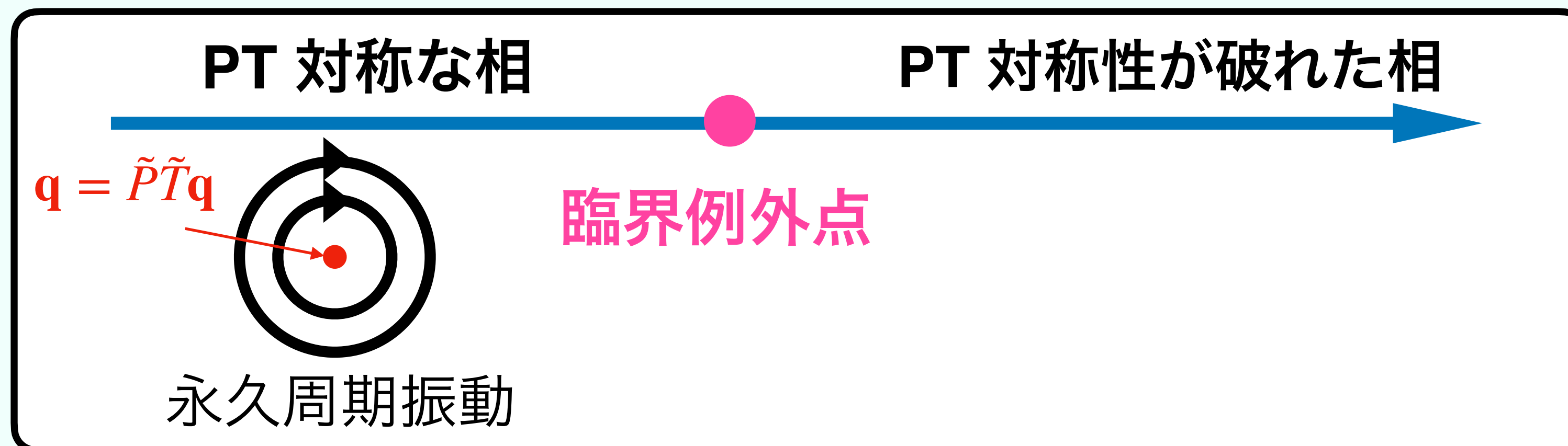
$$\delta q_{\pm} = (\pm\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})^T, \quad \lambda = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

• $\alpha\beta > 0 \rightarrow$ 不安定固定点

• $\alpha\beta < 0 \rightarrow$ 永久周期振動

• $\alpha\beta = 0 \rightarrow \delta q_+ = \delta q_-$

臨界例外点



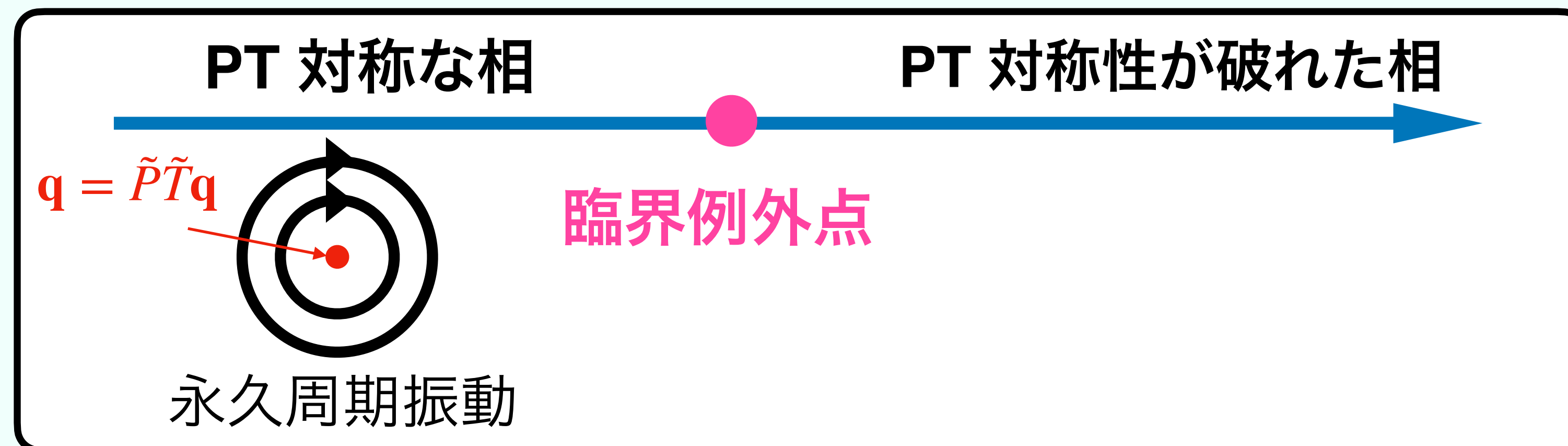
M. Fruchart et al., **Non-reciprocal phase transitions**, Nature **592** (2021).

2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ**、転移点は**臨界例外点**となる

└ 一様解は2つのサブ格子の運動方程式で記述できる

[YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]

PT対称性の破れた固定点($q_{ss} \neq \tilde{P}\tilde{T}q_{ss}$)周りでの線形安定性解析



2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ**、転移点は**臨界例外点**となる

└ 一様解は2つのサブ格子の運動方程式で記述できる

[YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]

PT対称性の破れた固定点($\mathbf{q}_{ss} \neq \tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss}$)周りでの線形安定性解析

集団励起モード・スペクトル

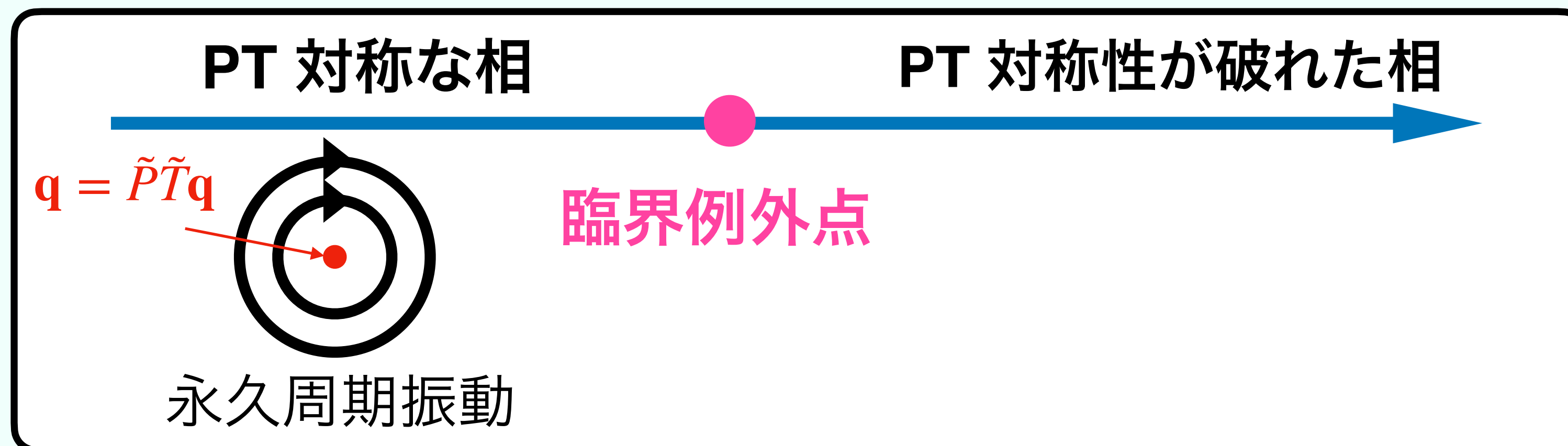
$$J_{PT,b} = \begin{pmatrix} \gamma_1(\mathbf{q}) & \alpha(\mathbf{q}) \\ \beta(\mathbf{q}) & \gamma_2(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

$$\lambda(\mathbf{q}) = R(\mathbf{q}) \pm \sqrt{R(\mathbf{q})^2 + Q(\mathbf{q})}$$

$$R = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$$

$$Q = (\alpha\beta - \gamma_1\gamma_2)/4$$

$$R(\mathbf{q}_{ss}) = -R(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss}) \quad Q(\mathbf{q}_{ss}) = Q(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss})$$



・ $Q > 0 \rightarrow$ 両方とも不安定固定点

・ $Q < 0 \rightarrow$ 安定・不安定固定点のペア

2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ**、転移点は**臨界例外点**となる

└ 一様解は2つのサブ格子の運動方程式で記述できる

[YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]

PT対称性の破れた固定点($\mathbf{q}_{ss} \neq \tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss}$)周りでの線形安定性解析

集団励起モード・スペクトル

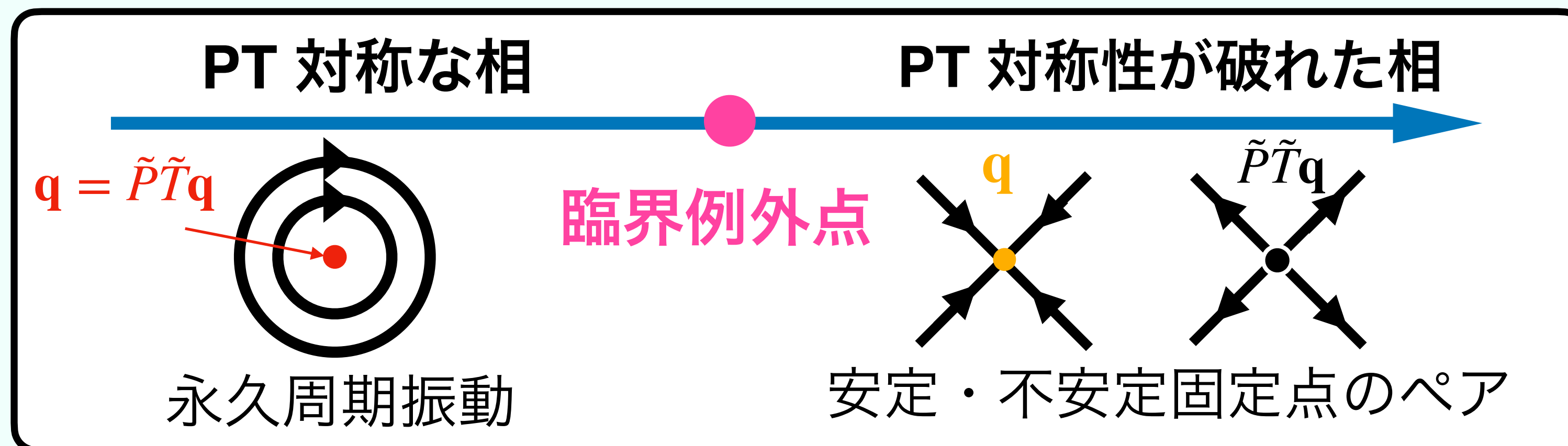
$$J_{PT,b} = \begin{pmatrix} \gamma_1(\mathbf{q}) & \alpha(\mathbf{q}) \\ \beta(\mathbf{q}) & \gamma_2(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

$$\lambda(\mathbf{q}) = R(\mathbf{q}) \pm \sqrt{R(\mathbf{q})^2 + Q(\mathbf{q})}$$

$$R = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$$

$$Q = (\alpha\beta - \gamma_1\gamma_2)/4$$

$$R(\mathbf{q}_{ss}) = -R(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss}) \quad Q(\mathbf{q}_{ss}) = Q(\tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q}_{ss})$$



・ $Q > 0 \rightarrow$ 両方とも不安定固定点

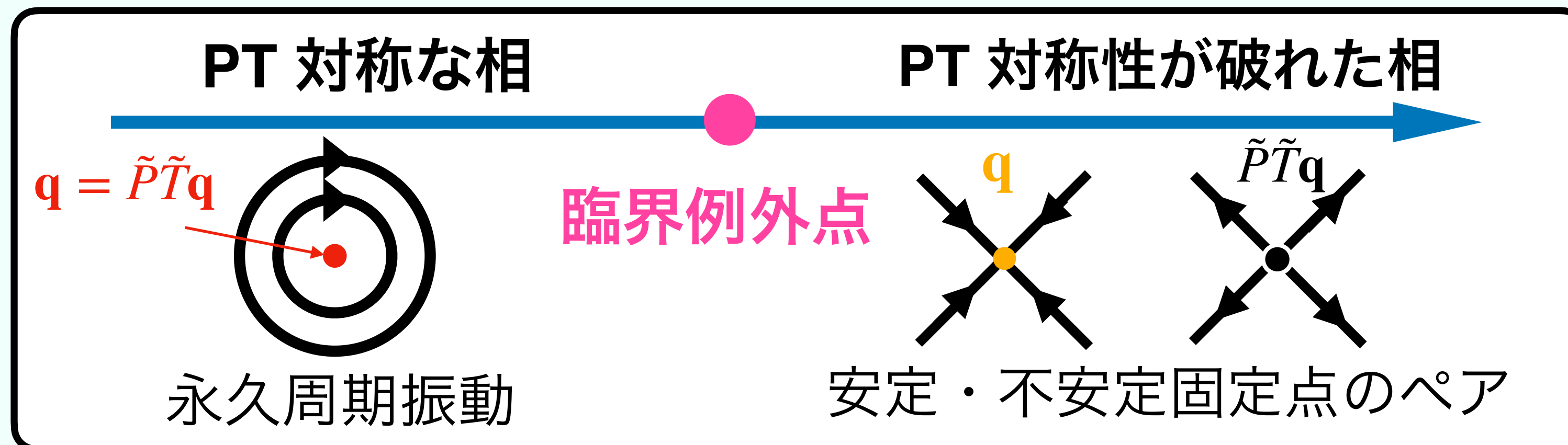
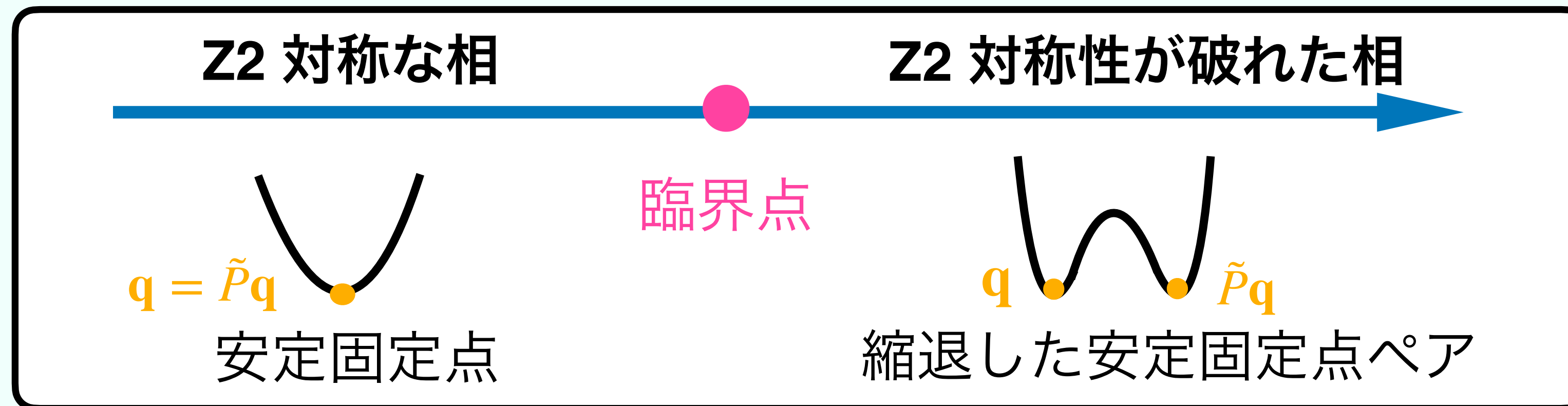
・ $Q < 0 \rightarrow$ 安定・不安定固定点のペア

研究成果 2 (ユニタリ対称性の破れとの比較) 20

2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ**、転移点は**臨界例外点**となる

└ 一様解は2つのサブ格子の運動方程式で記述できる

[YN, R. Hanai and T. Sasamoto, arXiv:2406.09018]



ユニタリ対称性の破れを伴う
従来の相転移とは質的に異なる
非平衡相転移である！

例: 駆動 Dicke 模型 (先行研究)

21

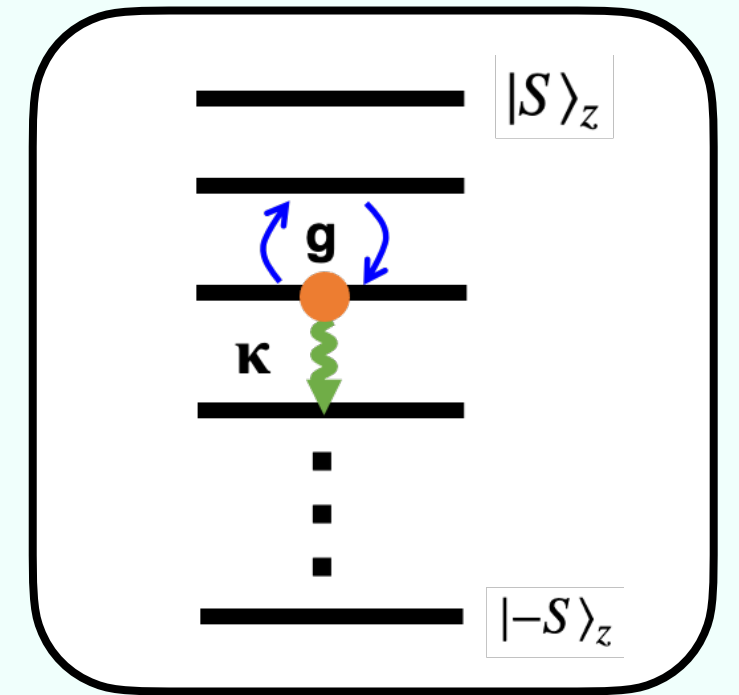
集団スピンモデル→我々のフレームワークが適用できる重要なクラス

駆動 Dicke 模型 [D. F. Walls, et al., 1978]

$$H = 2gS_x = g(a_A^\dagger a_B + a_A a_B^\dagger), \quad L = \sqrt{\kappa/S} S_- = \sqrt{\kappa/S} a_A a_B^\dagger$$

シュウィンガーボソン変換

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^{2S} \sigma_\alpha^i$$



例: 駆動 Dicke 模型 (先行研究)

22

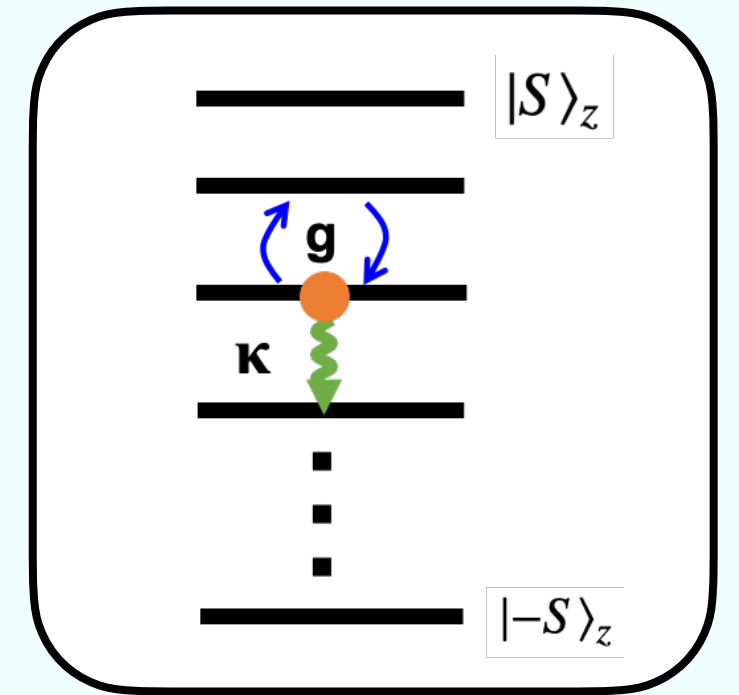
集団スピンモデル→我々のフレームワークが適用できる重要なクラス

駆動 Dicke 模型 [D. F. Walls, et al., 1978]

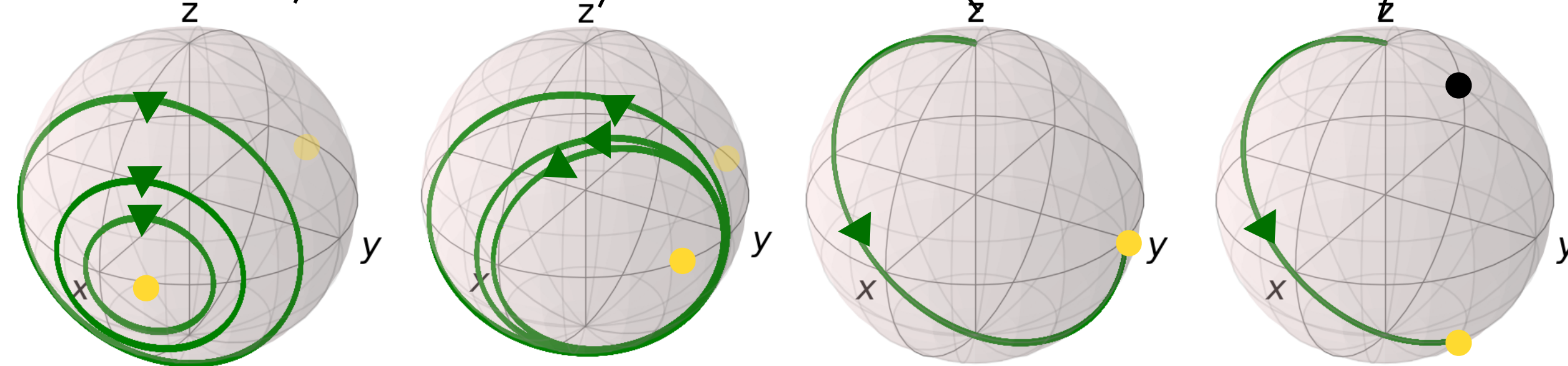
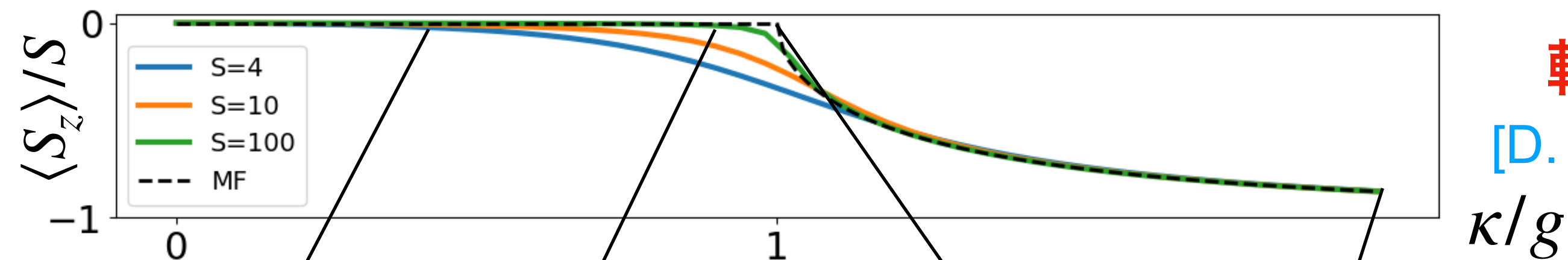
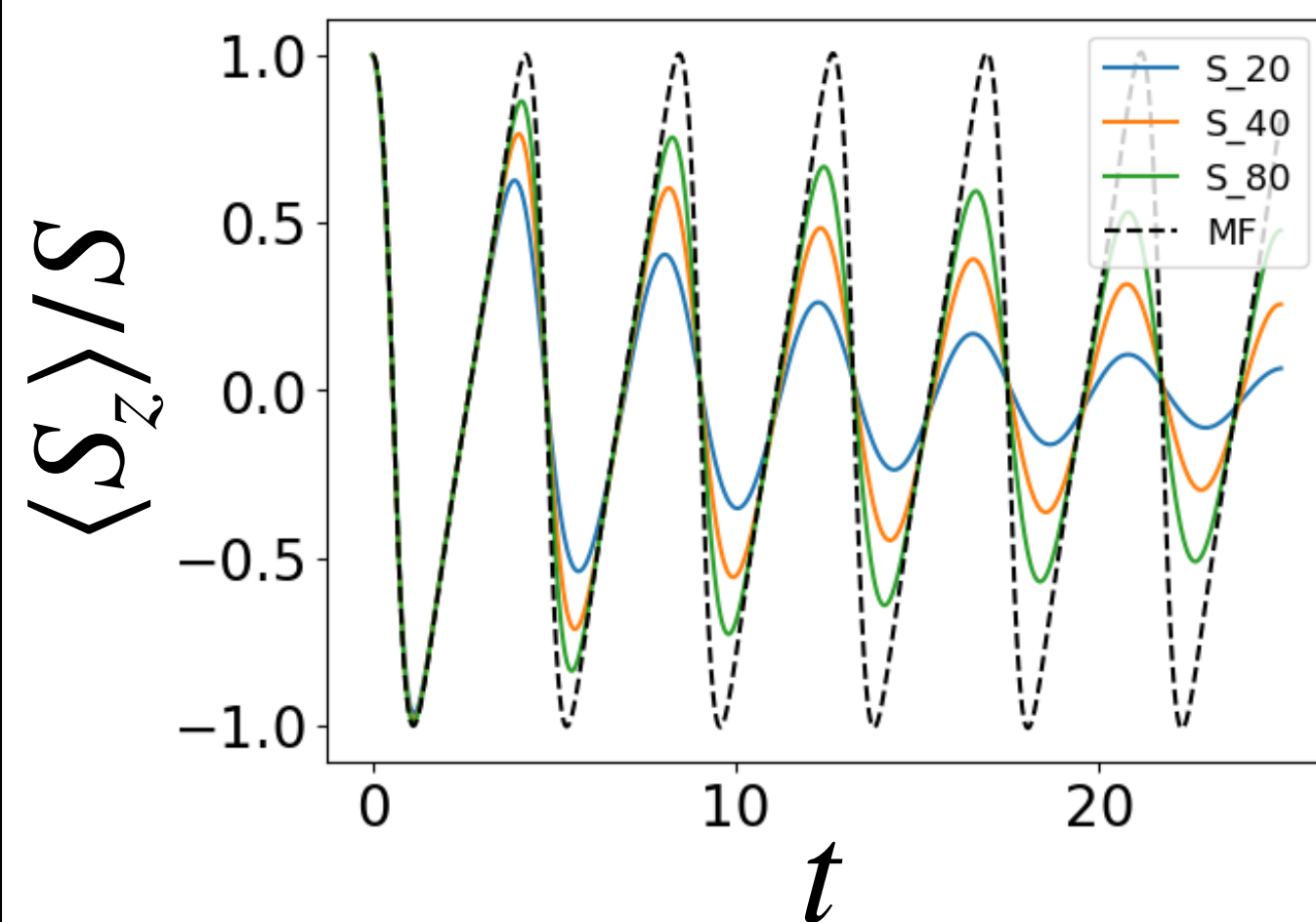
$$H = 2gS_x = g(a_A^\dagger a_B + a_A a_B^\dagger), \quad L = \sqrt{\kappa/S} S_- = \sqrt{\kappa/S} a_A a_B^\dagger$$

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^{2S} \sigma_\alpha^i$$

シュウィンガーボソン変換



$S \rightarrow \infty$ で緩和時間が発散し、永久振動が生じる！



散逸時間結晶

$S \rightarrow \infty$ で2次相転移が生じる！

[D. F. Walls, et al., 1978]

κ/g

● 安定固定点

● 不安定固定点

例: 駆動 Dicke 模型 (PT対称性の視点から) 23

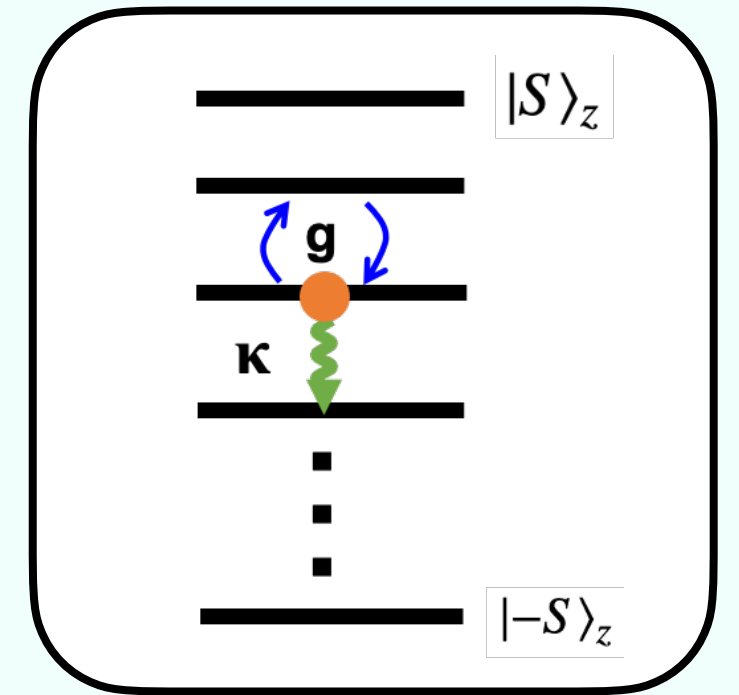
集団スピンモデル→我々のフレームワークが適用できる重要なクラス

駆動 Dicke 模型 [D. F. Walls, et al., 1978]

$$H = 2gS_x = g(a_A^\dagger a_B + a_A a_B^\dagger), \quad L = \sqrt{\kappa/S} S_- = \sqrt{\kappa/S} a_A a_B^\dagger$$

シュウィンガーボソン変換

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^{2S} \sigma_\alpha^i$$



PT対称性

$$\tilde{P} : A \leftrightarrow B, \quad \tilde{T} : i \rightarrow -i$$

秩序変数

$$\mathbf{q} = \tilde{P}\tilde{T}\mathbf{q} \Leftrightarrow \langle S_z \rangle = 0$$

$$\mathbf{q} = (\langle a_A \rangle, \langle a_B \rangle)^T$$

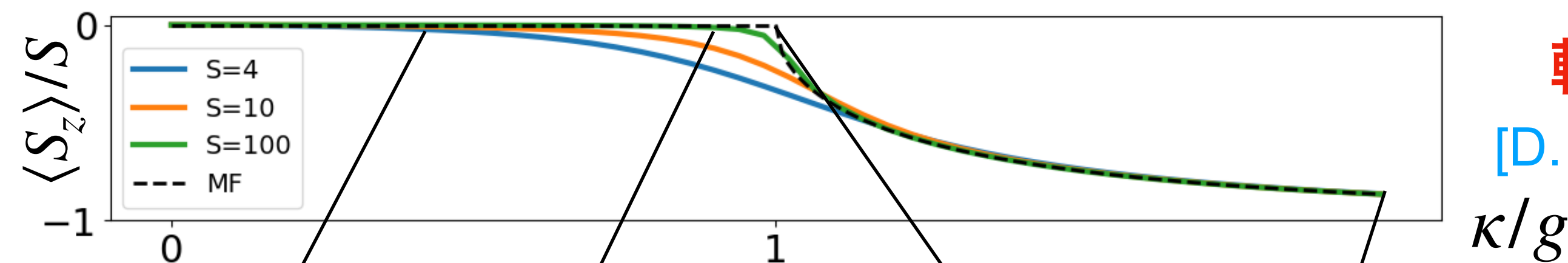
集団励起モード

$$\delta q_\pm = (\pm\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})^T$$

$$\alpha = -2(g^2 - \kappa^2)/g, \quad \beta = 2g$$

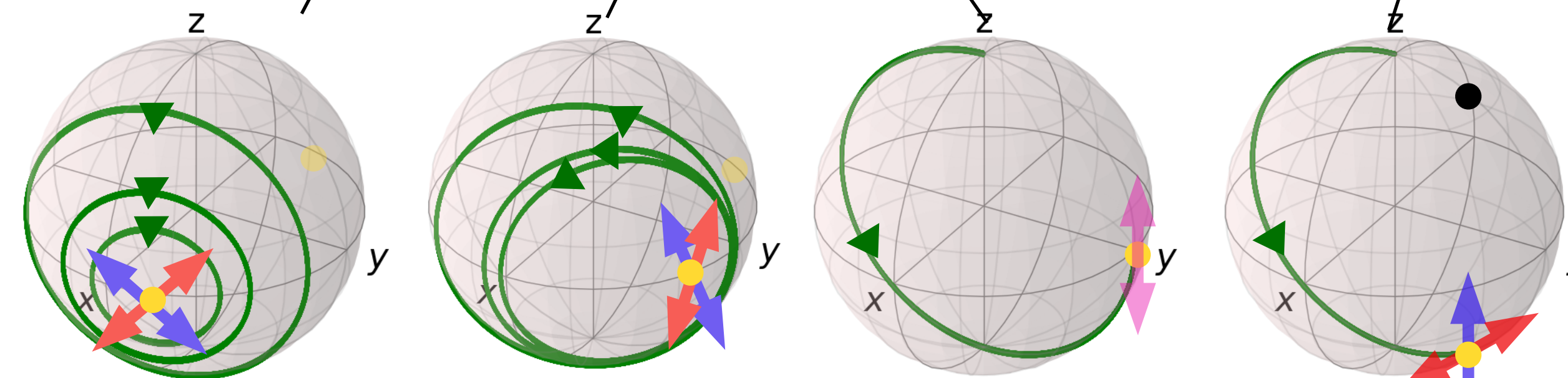
PT対称な相

PT対称性が破れた相



$S \rightarrow \infty$ で 2 次相
転移が生じる！

[D. F. Walls, et al., 1978]



散逸時間結晶

臨界例外点

PT対称性由来！

● 安定固定点

● 不安定固定点

1. **Lindbladian PT対称性**を満たす、粒子数保存のあるボソンモデルの平均場方程式は、**非線形PT対称性**を満たす
2. 2分割系であるとき、**PT対称な相では周期振動が生じ**、転移点は**臨界例外点**となる
3. 重要な例として**集団スピン系**があり、**PT対称性由来の散逸時間結晶**が存在する

将来の展望：平均場を超えた解析

- A. 空間勾配、ノイズを考慮した臨界現象の解析
- B. 臨界例外点周りでの量子現象：エンタングルメントとの関係
- C. スペクトル理論の構築