

高密度クォーク物質の、音速と凝縮

湊 修平

(Collaboration with 福島健二)

熱場の量子論 2025

SM, Fukushima, PRD 111 (2025) 9, 094006 (arXiv:2411.03781)

以下の内容をカバーします

- ・なぜ**高密度クォーク物質**の**音速**に興味があるのか
- ・核物質の状態方程式や，**クォーク・ハドロン相転移**に対する観測的制限
- ・なぜ(クォークの)**凝縮**に興味があるのか？
- ・凝縮の寄与を含んだ**弱結合計算**の現在までの進展と，今後すべきこと
 $\simeq$ pQCD

なぜ音速か

核物質の音速
に対する
観測的制限

クォークの凝縮は
なぜ重要か？

現在までの
弱結合計算の進展と
今後の方向性

「クォーク物質」をどのように特徴づけるか？

- EoS = **圧力**を**エネルギー密度**の関数として書いたもの
- 音速 = 状態方程式の**傾き**

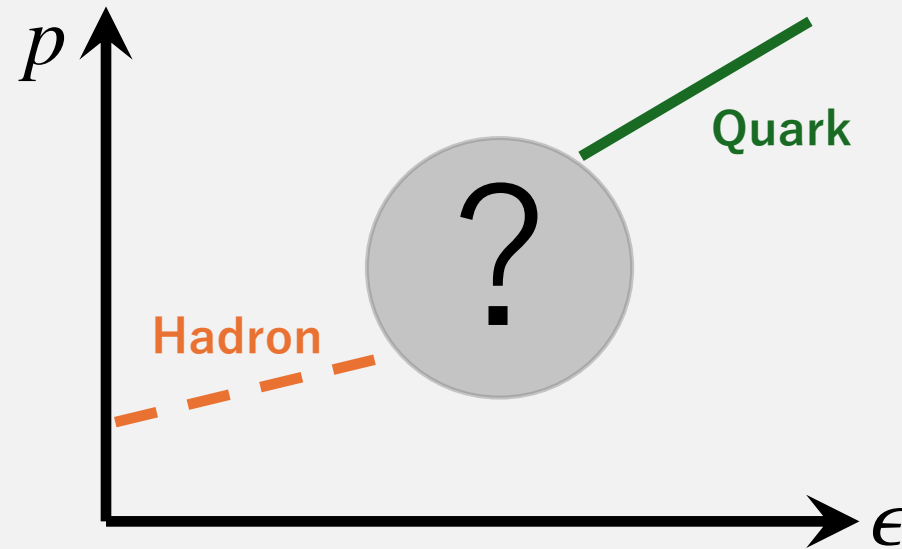
高密度クォーク物質

• EoS

$$p \simeq \frac{\epsilon}{3}$$

• 音速

$$c_s^2 \simeq \frac{1}{3}$$



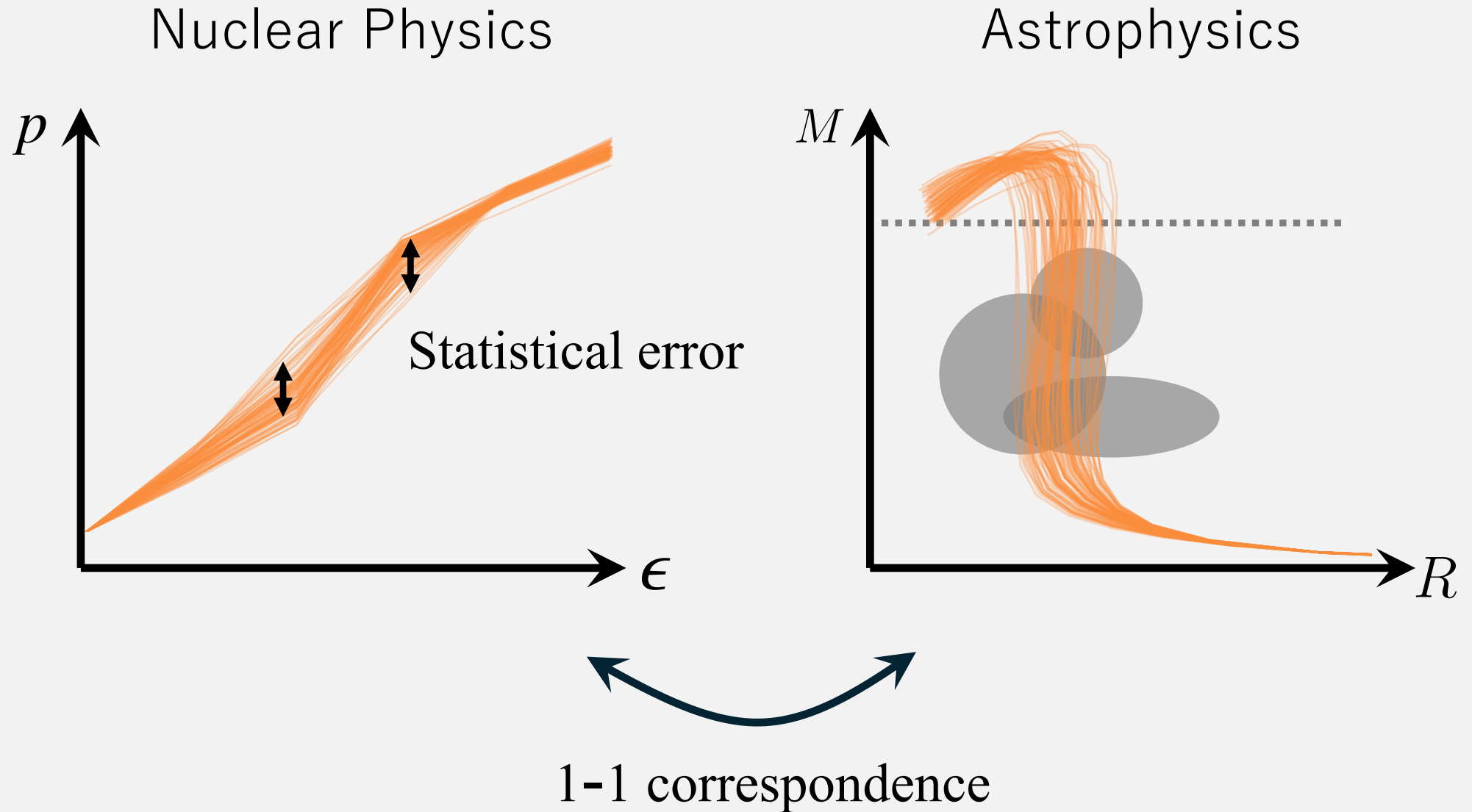
つまり、音速やEoSは、それ自身クォーク物質の良い指標になる

なぜ音速か

核物質の音速
に対する
観測的制限

クォークの凝縮は
なぜ重要か？

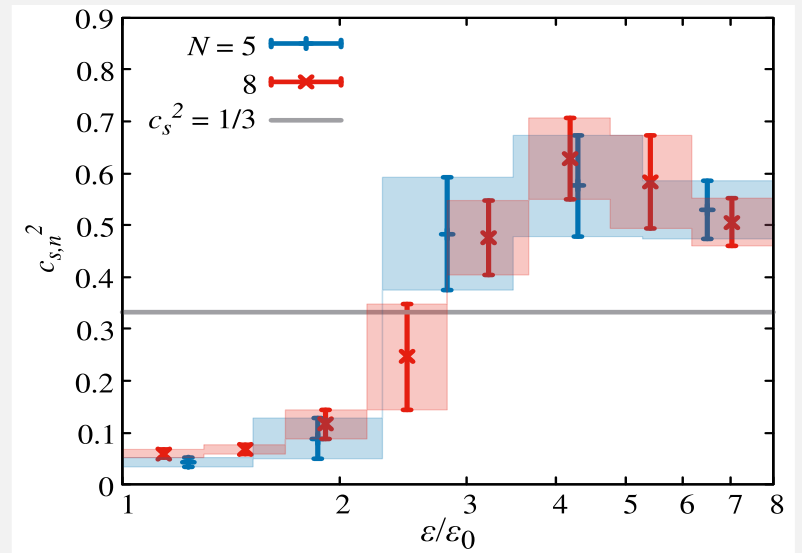
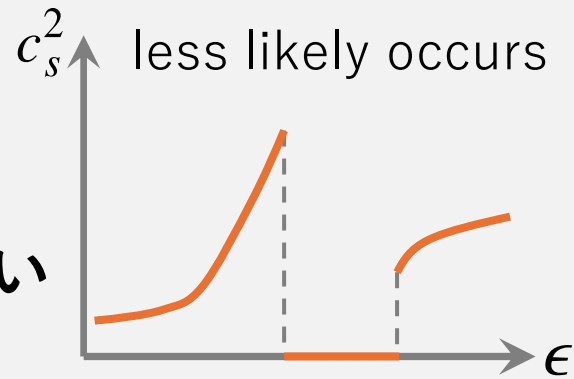
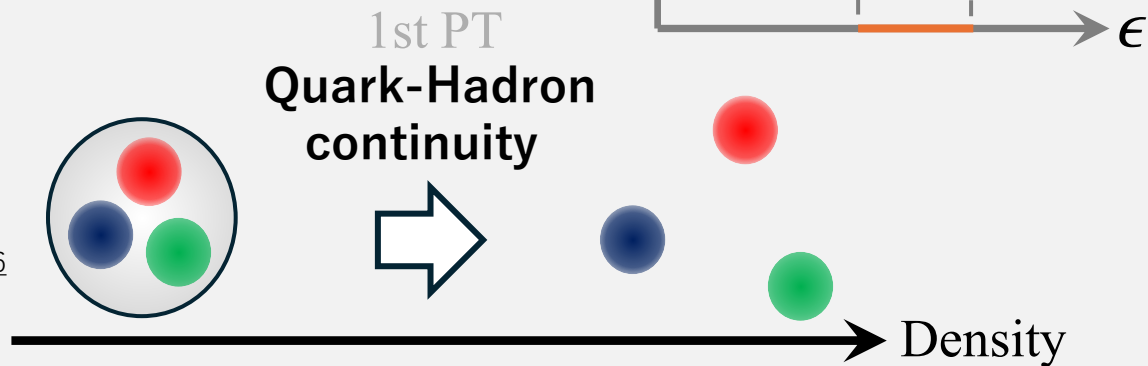
現在までの
弱結合計算の進展と
今後の方向性



右の結果を元にするると,

(A) 1st order PT が起こる可能性は低い

Schafer-Wilchek, 1999
Hatsuda-Tachibana-Yamamoto, 2006

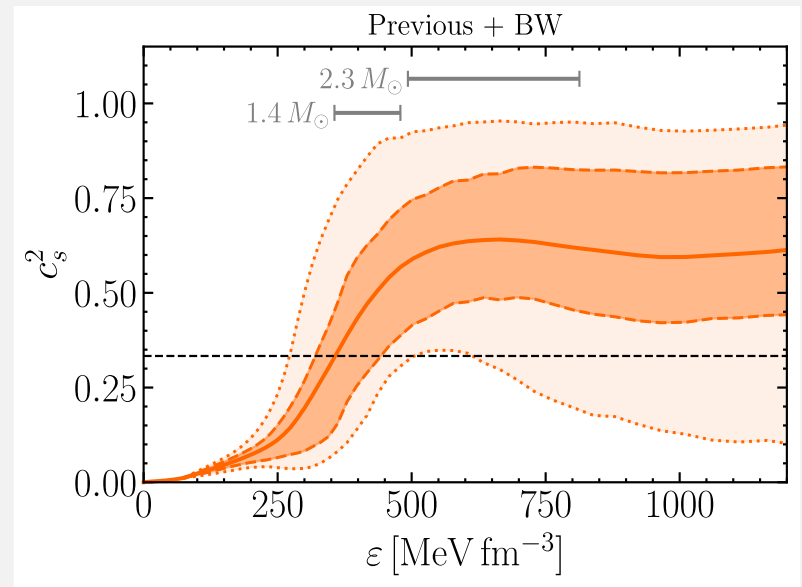
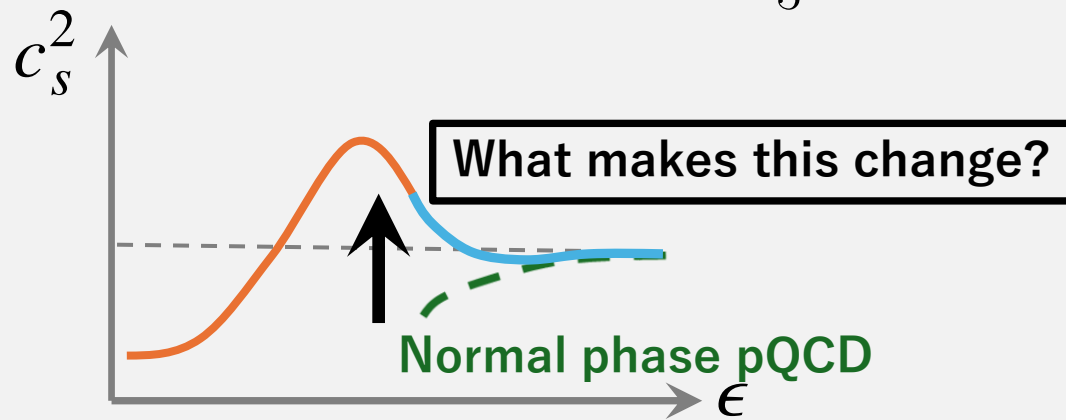


Kamata+, 2024

(B) 音速は $1/3$ (=クォーク物質の指標) より大きな値を取る

Masuda+, 2012

一方, 常伝導相でのpQCDは常に $c_s^2 < \frac{1}{3}$ を予言



Brandes-Weise, 2024

なぜ音速か

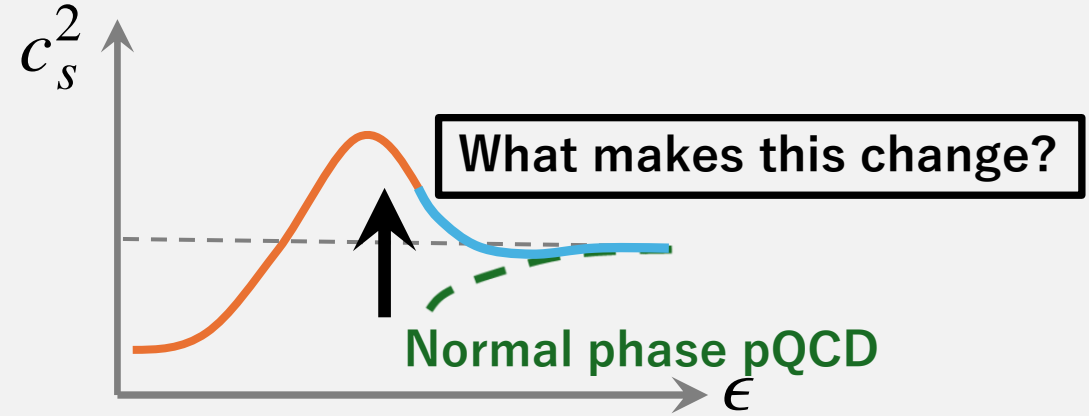
核物質の音速
に対する
観測的制限

クォークの凝縮は
なぜ重要か？

現在までの
弱結合計算の進展と
今後の方向性

- ・常伝導相のpQCDに含まれていない非摂動効果が含まれているのでは？

有力な候補: **color superconductor**



Quark-quark one-gluon exchange has an attractive channel
Son, 1999

➡ “Gap” $\Delta \sim \mu e^{-\frac{\pi}{g}} \sim \boxed{10-100 \text{ MeV}}$

➡ Pressure: $p \sim \underbrace{\mu^4}_{\text{常伝導相}} + \underbrace{\mu^2 \Delta^2}_{\text{ダイクォークによる補正}}$

音速:

$$c_s^2 - \frac{1}{3} \simeq -\frac{5}{36} \mu \frac{\partial \gamma_0(g)}{\partial \mu} + \frac{\gamma_1(g)}{18} \times \left\{ 2 \frac{\Delta^2}{\mu^2} - \frac{\Delta}{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \right)^2 - \Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \mu^2} \right\}$$

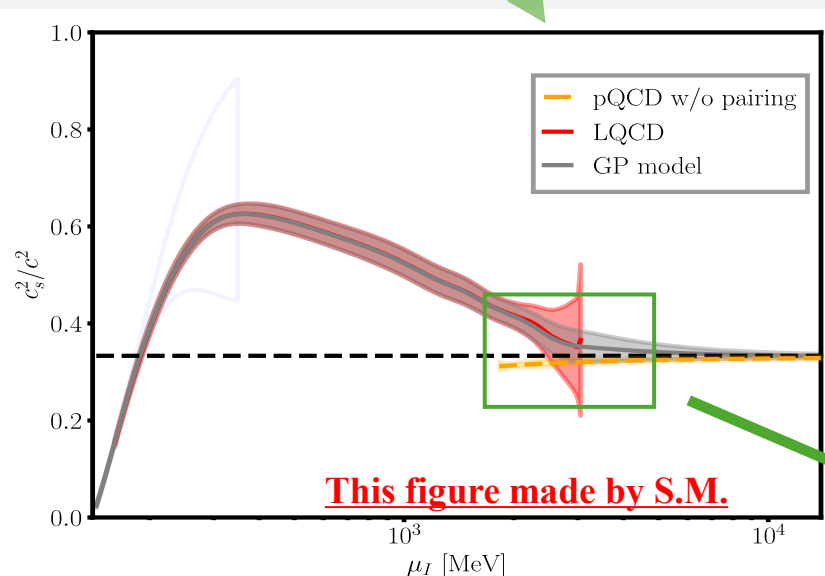
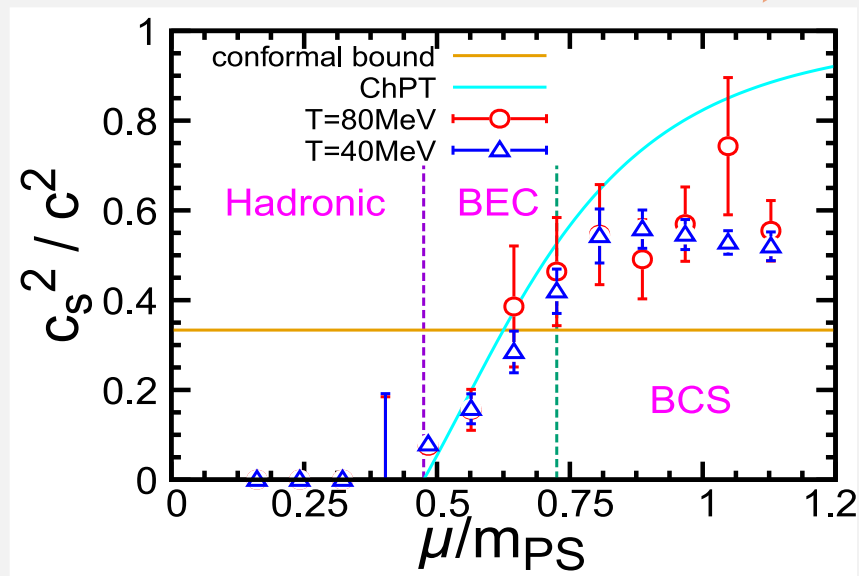
もしもギャップが定数なら上昇.

似たような系に目を向けると

QCD-like theories

Two color QCD at finite baryon density (Itou+, 2022-2024)

Three color QCD at finite isospin density (Brandt+2022, Abbott+, 2023-2025)



Crossover
Peak of speed of sound
Pairing

Normal Phase
cannot explain

やはり、凝縮による補正でpQCDの音速が $c_s^2 > \frac{1}{3}$ に変化してそう？

なぜ音速か

核物質の音速
に対する
観測的制限

クォークの凝縮は
なぜ重要か？

現在までの
弱結合計算の進展と
今後の方向性

次のような解析的な弱結合での近似式がよく用いられている。

$$p(\Delta)|_{\Delta} \simeq \frac{\#}{12\pi^2} \mu_q^2 \Delta_{\text{pp}}^2 \left(1 + O(g)\right) \quad \Delta_{\text{pp}}^{(2SC)} = (\underbrace{b_0}_{\text{known}} + \underbrace{b_1 g}_{\text{unknown}} + O(g^2)) \frac{\mu_q}{g^5} \exp\left(-\frac{3\pi^2}{\sqrt{2}g}\right)$$

Cold Quark Matter (Kurkela-Romatschke-Vuorinen, 2009)

For completeness — and to better describe real world finite density quark matter in beta equilibrium — we will include in our EoS a contribution modeling the effects of color superconductivity (CSC). This is accomplished by adding to the pressure a term accounting for the condensation energy of Cooper pairs in the Color-Flavor-Locked (CFL) phase (see *e.g.* Refs. [22, 59, 60]),

$$P_{\text{CSC}} \equiv \frac{\Delta^2 \mu_B^2}{3\pi^2}, \quad (70)$$

where the baryon chemical potential is $\mu_B \equiv \mu_u + \mu_d + \mu_s$ and the gap parameter Δ approaches at asymptotically high densities the form [61]

$$\Delta = \frac{b\mu}{(4\pi\alpha_s)^{5/2}} e^{-3\pi^2/\sqrt{8\pi\alpha_s}}, \quad (71)$$

with b a constant. In this work, Δ itself will for simplicity be assumed to be a constant,

この解析的な式はどのくらい良い近似なのか？

解析的な表式の導出を精査してみる

- ギャップを外場として導入して熱力学ポテンシャルを計算

$$p(\Delta) = - \min_{\Delta_{pp}, \Delta_{aa}} \left[\Gamma(\Delta_{pp}, \Delta_{aa}) \right]$$


 Thermodynamic potential with gap parameter

$$\langle qq \rangle \leftrightarrow \Delta_{pp} \quad \langle \bar{q}\bar{q} \rangle \leftrightarrow \Delta_{aa}$$

- ギャップは熱力学ポテンシャルについての変分方程式を満たすように決める

$$\frac{\Delta_{pp}(q)}{\Delta_{aa}(q)} = \text{[Feynman diagrams]} + \dots$$

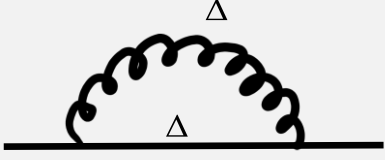
The Feynman diagrams shown are:

- Diagram 1: A horizontal line with a single loop (bubble) above it. The loop is labeled with Δ at its top and bottom vertices.
- Diagram 2: A horizontal line with a loop above it. The loop is split into two parts by a vertical line. Each part is labeled with Δ at its top and bottom vertices.
- Diagram 3: A horizontal line with a loop above it. The loop is split into two parts by a vertical line. Each part is labeled with Δ at its top and bottom vertices.

これらを自己無撞着に解けば良い

とはいえ, fullで解くのはきついで色々近似をします

- one-loop approximation を例にとると,

$$p(\Delta) = - \min_{\Delta_{pp}, \Delta_{aa}} \left[\Gamma(\Delta_{pp}, \Delta_{aa}) \right] \quad \begin{matrix} \Delta_{pp}(q) \\ \Delta_{aa}(q) \end{matrix} = \text{diagram}$$


Further Approximations

- On-shell approximation for gap $\longrightarrow$ Gauge-parameter independence を保証
- Replace gluon self energy by HDL self energy
- Drop antiquark-antiquark gap
- Restrict momentum integral of pressure around Fermi surface
- Replace the gap parameter by an analytic formula

これら4つは解析
を容易にするための
手を入れた近似

一般にギャップの
大きさを変える

この式ってどのくらい良い近似ですか？

$$p(\Delta)|_{\Delta} \simeq \frac{\#}{12\pi^2} \mu_q^2 \Delta_{pp}^2 \left(1 + O(g) \right) \quad \Delta_{pp}^{(2SC)} = (\underbrace{b_0}_{\text{known}} + \underbrace{b_1 g}_{\text{unknown}} + O(g^2)) \frac{\mu_q}{g^5} \exp \left(- \frac{3\pi^2}{\sqrt{2}g} \right)$$

- Consider one-loop approximation

$$p(\Delta) = - \min_{\Delta_{pp}, \Delta_{aa}} \left[\Gamma(\Delta_{pp}, \Delta_{aa}) \right]$$

- Replace gluon self energy by HDL self energy

$$\Pi(\Delta_{pp}, \Delta_{aa}) = \text{gluon self energy diagram} \longrightarrow \Pi_{\text{HDL}}$$

この近似によって、非常に低運動量でのグルーオンの振る舞いに変化する
(e.g., マイスナー効果は取り入れられない)

この近似の効果は、ギャップパラメーターのサイズに寄与する (Rischke, 2001)

$$\Delta_{pp}^{(2SC)} = (b_0 + \textcolor{red}{b_1 g} + O(g^2)) \frac{\mu_q}{g^5} \exp \left(- \frac{3\pi^2}{\sqrt{2}g} \right)$$

- On-shell approximation for gap $\longrightarrow$ Gauge-parameter independence を保証

- Replace gluon self energy by HDL self energy
- Drop antiquark-antiquark gap
- Restrict momentum integral of pressure around Fermi surface
- Replace the gap parameter by an analytic formula

これら4つは解析
を容易にするための
手で入れた近似

一般にギャップの
大きさを変える

この式ってどのくらい良い近似ですか？

$$p(\Delta)|_{\Delta} \simeq \frac{\#}{12\pi^2} \mu_q^2 \Delta_{pp}^2 (1 + O(g)) \quad \Delta_{pp}^{(2SC)} = (\textcolor{brown}{b_0} + \textcolor{green}{b_1 g} + O(g^2)) \frac{\mu_q}{g^5} \exp \left(- \frac{3\pi^2}{\sqrt{2}g} \right)$$

known unknown

- Consider one-loop approximation

$$p(\Delta) = - \min_{\Delta_{pp}, \Delta_{aa}} \left[\Gamma(\Delta_{pp}, \Delta_{aa}) \right]$$

- On-shell ap

- Replace glu

- Drop antiquark-antiquark gap

- Restrict momentum integral of pressure around Fermi surface

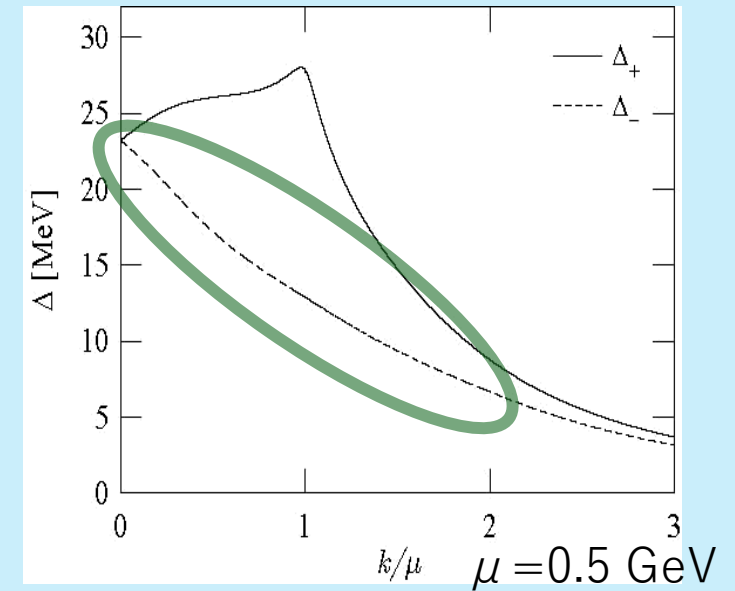
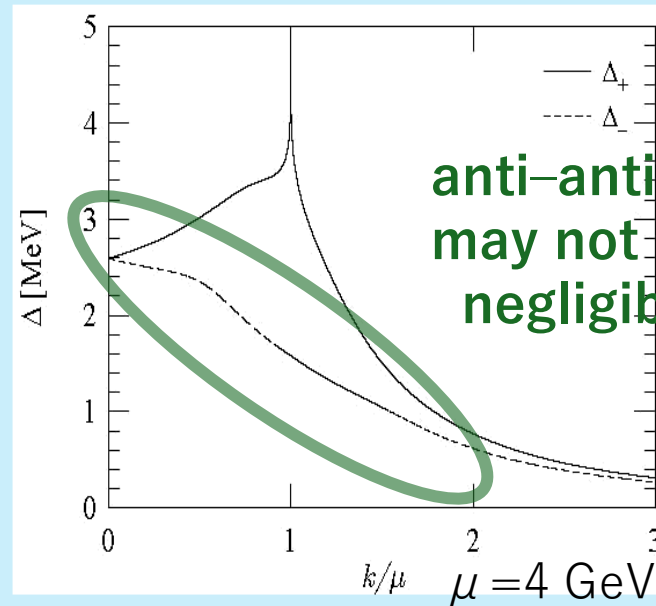
- Replace the gap parameter by an analytic formula

この式ってどのくらい良い近似ですか？

$$p(\Delta)|_{\Delta} \simeq \frac{\#}{12\pi^2} \mu_q^2 \Delta_{pp}^2 \left(1 + O(g) \right)$$

$$\Delta_{pp}^{(2SC)} = (\underbrace{b_0}_{\text{known}} + \underbrace{b_1 g}_{\text{unknown}} + O(g^2)) \frac{\mu_q}{g^5} \exp \left(- \frac{3\pi^2}{\sqrt{2}g} \right)$$

Drop antiquark-antiquark gap



Abuki-Hatsuda-Itakura, 2004

これら4つは解析を容易にするための手を入れた近似

一般にギャップの大きさを変える

Approximations

- Consider one-loop approximation

$$p(\Delta) = - \min_{\Delta_{pp}, \Delta_{aa}} \left[\Gamma(\Delta_{pp}, \Delta_{aa}) \right] \quad \Delta_{pp}(q) = \Delta_{aa}(q) = \text{diagram with wavy line and gap } \Delta$$

$$\Pi(\Delta_{pp}, \Delta_{aa}) = \text{diagram with wavy line and gap } \Delta$$

Further Approximations

- On-shell approximation for gap

Gauge-parameter independence を保証

- Replace gluon self energy by HDL self energy

- Replace antiquark-antiquark gap

- Replace momentum integral of pressure around Fermi surface

- Replace the gap parameter by an analytic formula

これら4つは解析
を容易にするための
手で入れた近似

一般にギャップの
大きさを変える

ここまで
戻るべき

この式ってどのくらい良い近似ですか？

必要以上の仮定を置いているように見える

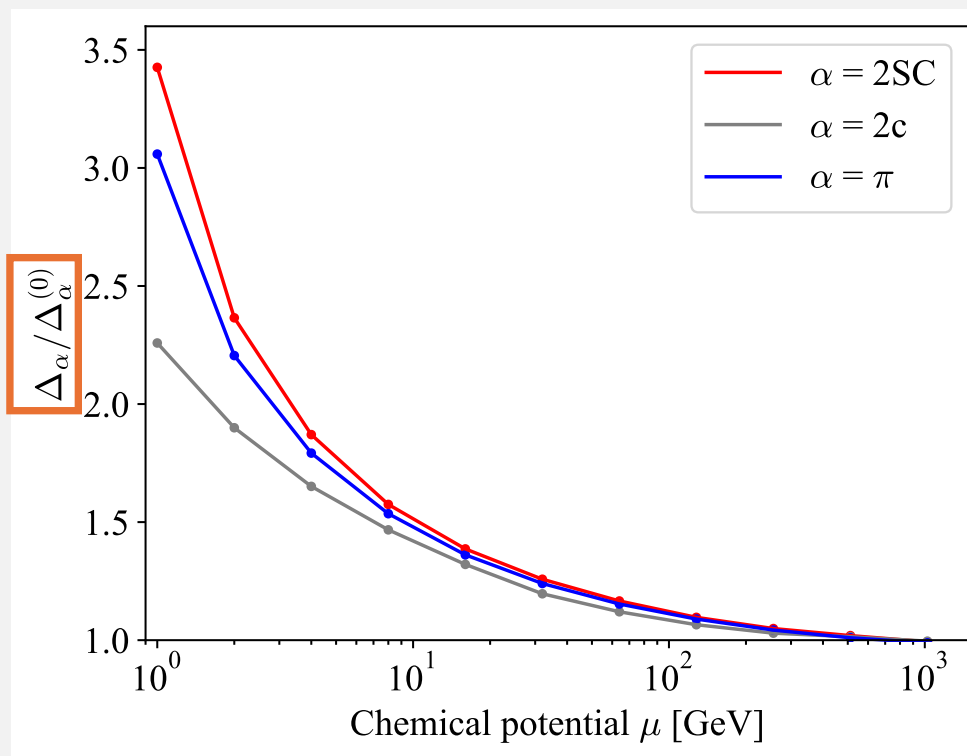
$$p(\Delta)|_{\Delta} \simeq \frac{\#}{12\pi^2} \mu_q^2 \Delta_{pp}^2 (1 + O(g)) \quad \Delta_{pp}^{(ZSC)} = (\underbrace{b_0}_{\text{known}} + \underbrace{b_1 g}_{\text{unknown}} + O(g^2)) \frac{r_q}{g^5} \exp\left(-\frac{\dots}{\sqrt{2}g}\right)$$

Analytical gap v.s. Numerical gap

- 解析的な式を導出する際に用いるギャップ方程式を数値的に解いて解析的な式と比べてみる

$$\Delta_{\text{pp}}(k) \sim g^2 \int_0^\infty d(q - \mu) \left[\ln \left(\frac{b\mu}{\sqrt{|\epsilon_q^2 - \epsilon_k^2|}} \right) Z^2(\epsilon_q) \right] \frac{\Delta_{\text{pp}}(q)}{\sqrt{(q - \mu)^2 + \Delta_{\text{pp}}(q)^2}},$$

Numerical gap
Analytical gap



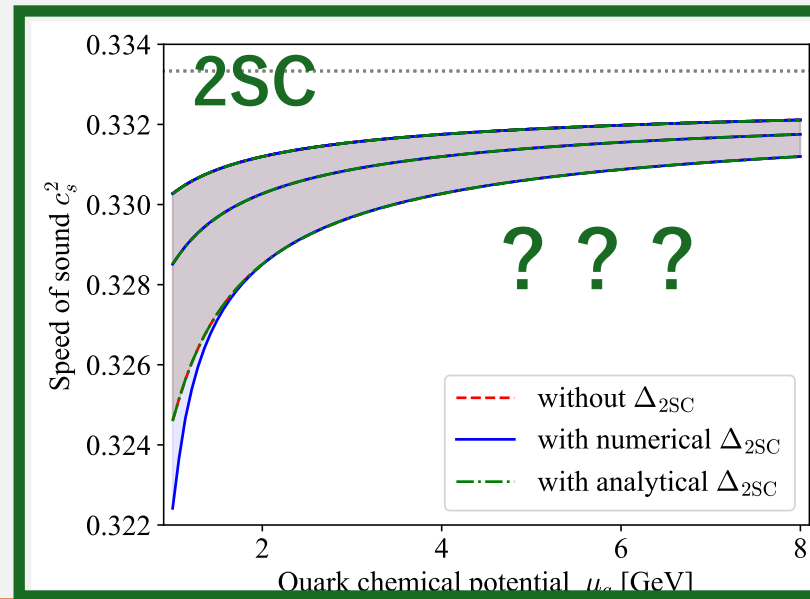
超高密度を除けば、ギャップは
O(1)のサイズ補正を受ける。

では、このサイズの変化は音速に
どのように反映されるか？

How affect the speed of sound

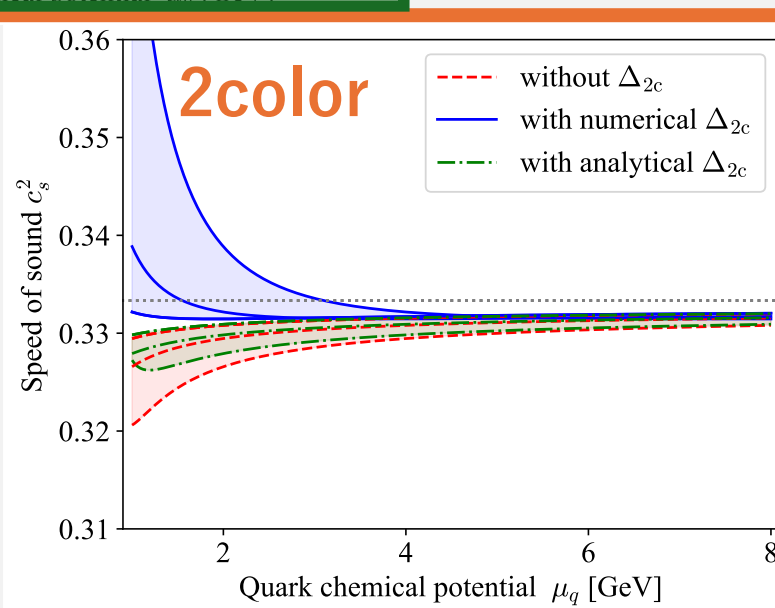
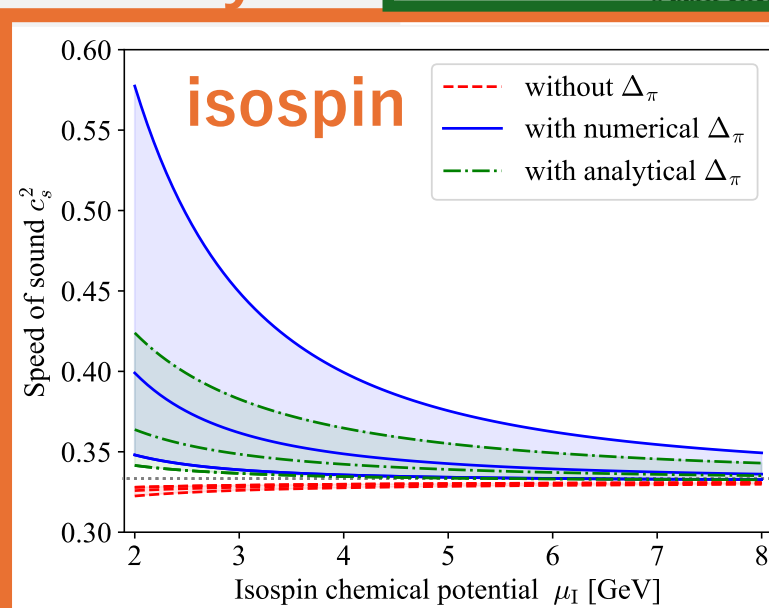
Two-flavor
Color superconductorギャップの効果で
音速が下がる？この近似でのartifactの可能性も
あるので，精査が必要

QCD-like theory



$$c_s^2 - \frac{1}{3} \simeq -\frac{5}{36}\mu \frac{\partial \gamma_0(g)}{\partial \mu} + \frac{\gamma_1(g)}{18} \times \left\{ 2\frac{\Delta^2}{\mu^2} - \frac{\Delta}{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \right)^2 - \Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \mu^2} \right\}.$$

Can be negative

ギャップの効果で
音速が上がる

Summary

- ・観測的に得られた音速との乖離を説明するためには、音速のweak coupling 計算に凝縮の寄与を含めることが重要
- ・ギャップと圧力の解析的な表式は非常に高密度以外では使えそうもない
- ・試みに、ギャップの解析的な表式を得る際に用いるギャップ方程式を数値的に解いてみた
中間密度領域ではギャップは2-3倍程度大きくなった
- ・2SCの場合は音速は常伝導相より下がっている。
今回の近似の問題かもしれないので、今回ネグった効果も踏まえて再度検討する必要がある。