

三角格子トーリックコードにおける 測定誘起相転移と相構造の解析

片岡 啓介(名城大)

共同研究者

久野 義人(秋田大)、折戸 隆寛(日大)、一瀬 郁夫(名工大)

動機と背景

- なぜ測定誘起相転移(MIPT: measurement-induced phase transition)か？

1. 新しいタイプの量子相転移

通常の量子相転移はハミルトニアンのパラメータ変化（相互作用強度など）で起こる。

一方、MIPTは**測定の確率や頻度**によって誘起される。

これは**量子情報の流れと観測の役割**を本質的に問う新しい種類の臨界現象。

2. 相構造を**トポロジカルエンタングルメントエントロピー(TEE)**を用いて調べる。

多くの研究では「エンタングルメントエントロピー(EE)のスケールリング (volume law $\leftrightarrow$ area law)」を相図の指標に使う。

TEE = トポロジカルな量子相関を抽出する量

⇒トポロジカル秩序は、**局所的な乱れに対して丈夫な量子情報の保持**を可能にする。

トーリックコードの**トポロジカル量子誤り訂正コード**はこの性質に基づいている。

トポロジカル秩序が壊れる限界は、量子メモリや誤り訂正限界に直結する。

- EEではなくTEEにフォーカス

動機と背景

- なぜ三角格子か？

正方格子の双対格子は正方格子(自己双対)
この自己双対性のおかげで、**ボンドパーコレーションの臨界点** $p_c = 0.5$ が正確に決まる。

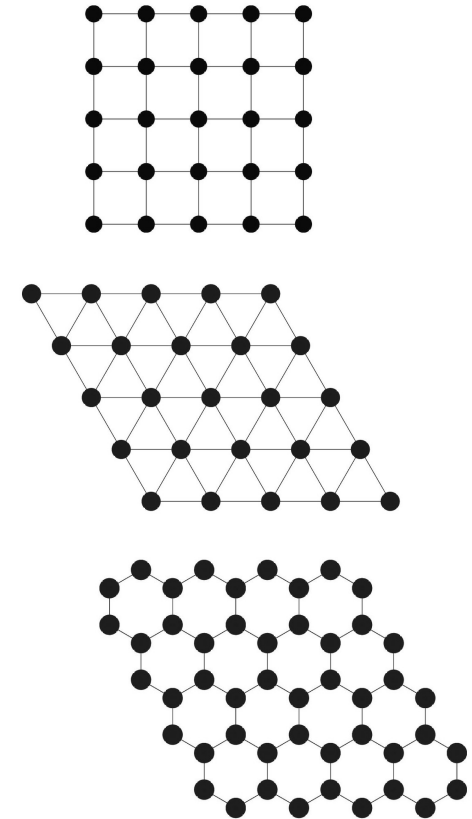
「古典パーコレーション臨界点=測定誘起相転移の臨界点」
⇒量子現象と古典的確率論の接点

これは正方格子トーリックコードでも成り立つ。

三角格子の双対格子は六角格子⇒自己双対性はない。

ボンドパーコレーション臨界点も異なる値

$$p_c^{\text{triangle}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0.347, \quad p_c^{\text{hexagonal}} = 1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0.653$$



- 自己双対性がない場合、「古典パーコレーション臨界点=測定誘起相転移の臨界点」の関係はどうか？

目次

- Kitaev トーリックコード
- スタビライザー形式について
- 数値計算結果

Kitaev トーリックコード(正方格子)

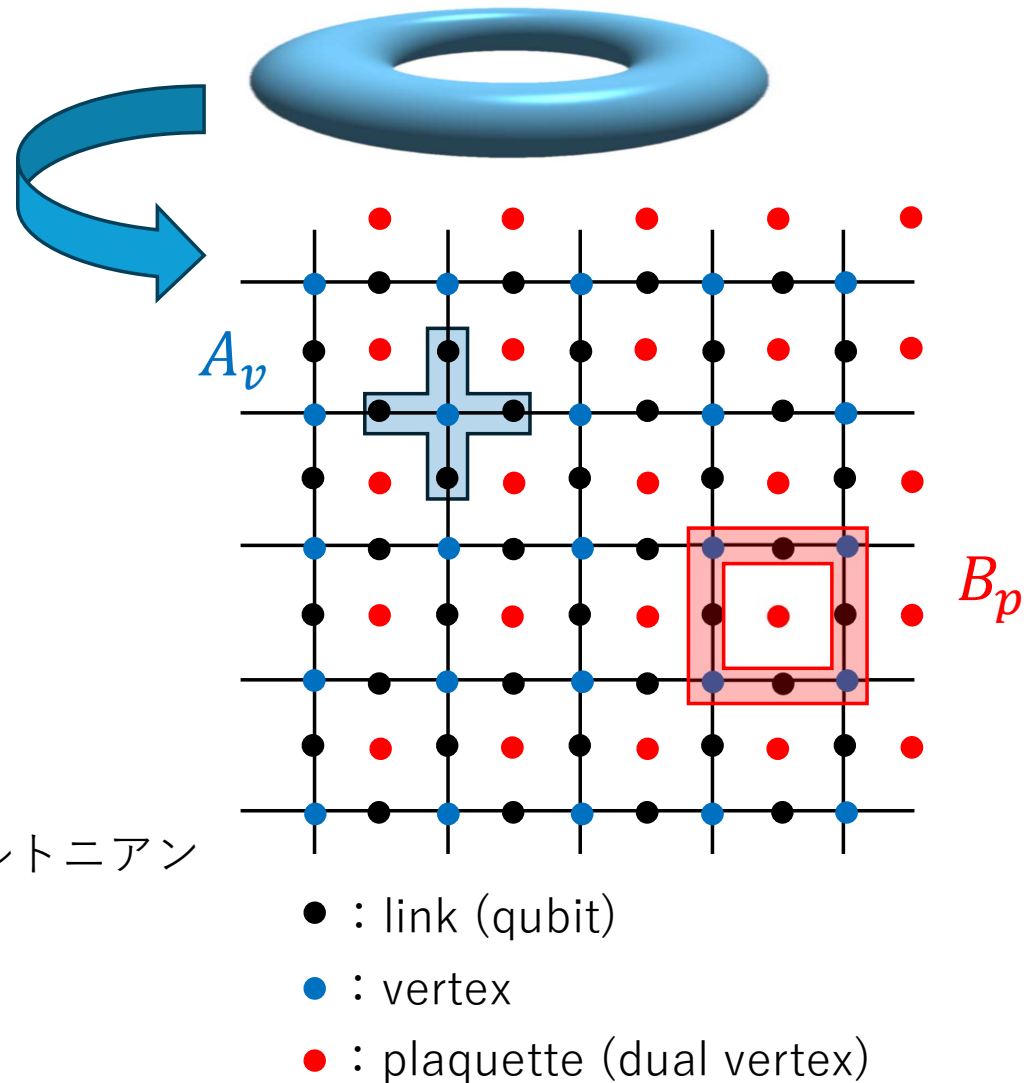
- モデル

$$\mathcal{H}_{TC} = - \sum_v A_v - \sum_p B_p$$

$$A_v = \prod_{i \in v} X_i : \text{スター演算子}$$

$$B_p = \prod_{i \in p} Z_i : \text{プラケット演算子}$$

- すべての A_v, B_p は可換
- A_v, B_p の同時固有状態を構成できるハミルトニアン



トーリックコードの基底状態

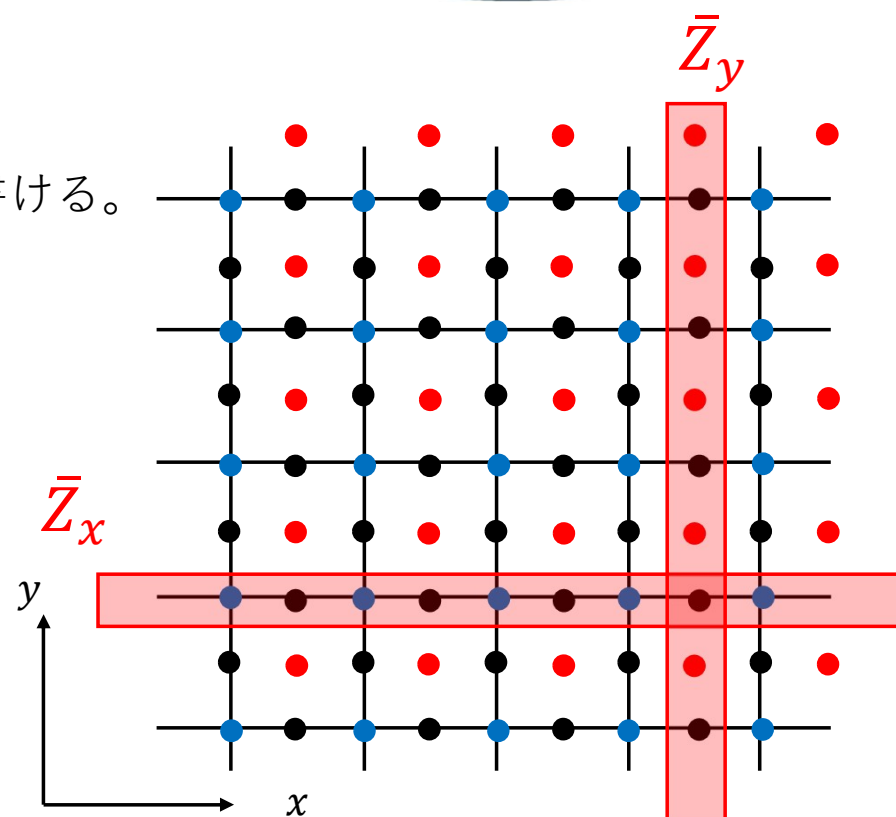
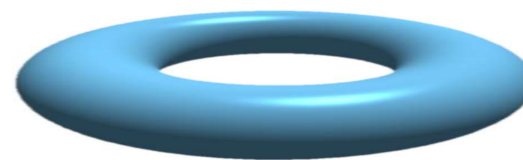
- すべての A_v, B_p の固有値が +1
- 拘束条件：
$$\prod_v A_v = \prod_p B_p = 1$$

- 収縮できるループ演算子
⇒ 任意の収縮できる閉ループは A_v, B_p の積で書ける。

- ◆ 非収縮ループ演算子 = 論理演算子

$$\bar{Z}_x = \prod_i Z_i \quad \bar{Z}_y = \prod_i Z_i$$

それぞれの固有値 ± 1 が縮退状態を区別する。
基底状態は 4 重縮退
⇒ 局所演算子によって縮退の区別はできない。
(局所摂動に対して安定)



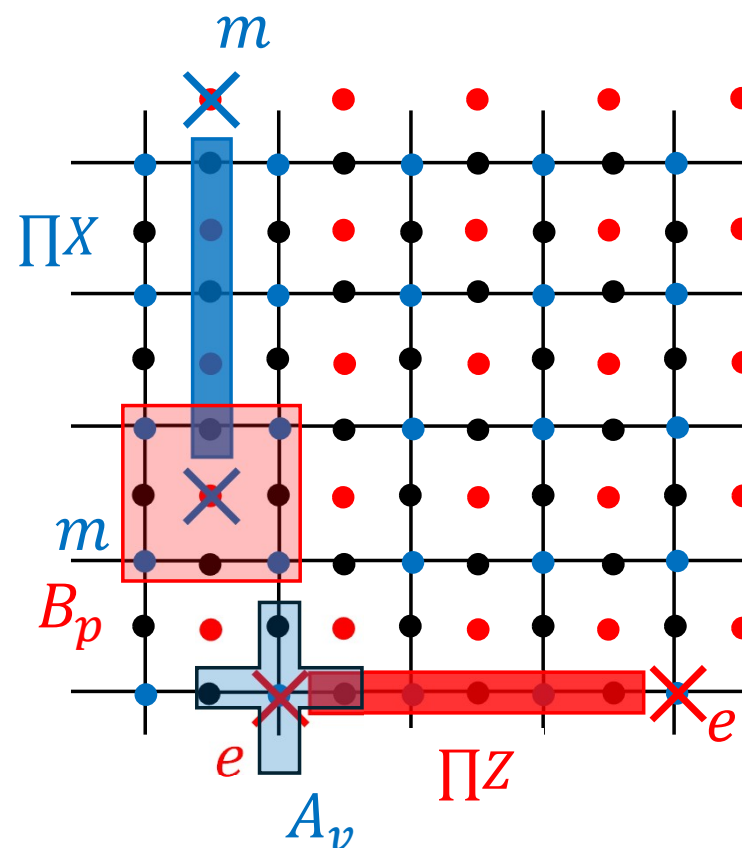
トーリックコード+磁場

$$\mathcal{H} = - \sum_v A_v - \sum_p B_p - h_x \sum_{\ell} X_{\ell} - h_z \sum_{\ell} Z_{\ell}$$

h_x : 横磁場

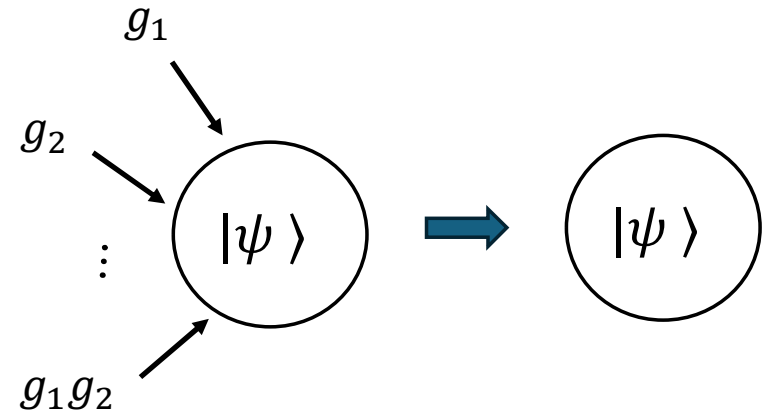
h_z : 縦磁場

- 磁場は局所ノイズ
 $\prod X$ は B_p を反転 $\Rightarrow m$ エニオンを生成
 $\prod Z$ は A_v を反転 $\Rightarrow e$ エニオンを生成
 $\Rightarrow$ 基底状態から励起状態になるが
論理演算子には作用しない。
- 強磁場ではエニオンペアが高密度で生成
 $\Rightarrow$ 非収縮ループが作用すると論理演算子の
固有値の符号を変える。
 $\Rightarrow$ 非局所的なトポロジカル秩序が壊れる。



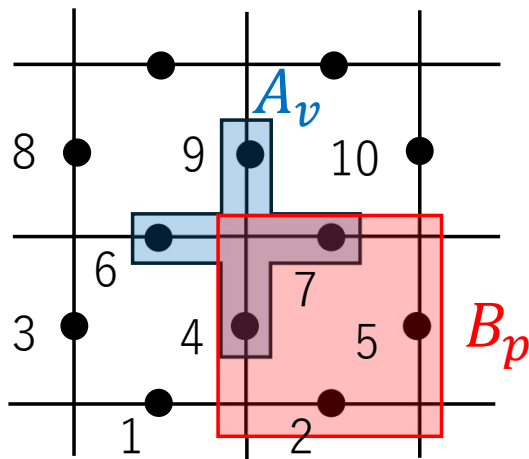
スタビライザーとは？

- 量子状態を直接ベクトルで書くのは大変。 $(L \text{ qubit系では} 2^L \text{次元})$
⇒ **スタビライザー形式**を用いて効率的に状態を表す。
 - 量子状態 $|\psi\rangle$ が、 $g|\psi\rangle = |\psi\rangle$ を満たすパウリ演算子 g を**スタビライザー**という。
作用しても状態を「安定」＝状態を変化させない演算子
 - g でできる可換群を**スタビライザー群**という。
 - スタビライザー群によって一意に定まる純粋状態を**スタビライザー状態**という。
(トーリックコードの基底状態は A_v, B_p の固有値が1のスタビライザー状態)
- $L \text{ qubit 系では独立なスタビライザー生成元が} L \text{個あれば状態は一意に決まる。}$



スタビライザーの利点

- 効率的な表現
 $\Rightarrow L$ qubit系を $O(2^L) \Rightarrow O(L^2)$ で表せる。



- チェック行列、スタビライザー表

$$\begin{array}{c} g_1(=A_v) \\ g_2(=B_p) \\ g_3 \\ \dots \end{array} \begin{pmatrix} & X & & Z \\ 0001011010 \dots & | & 0000000000 \dots \\ 0000000000 \dots & | & 0101101000 \dots \\ & \dots & \\ & \dots & \end{pmatrix}$$

- 使用例
Gottesman-Knill 定理：Clifford 回路 + Pauli 測定はスタビライザー形式で効率的にシミュレーション可能。

スタビライザーと射影演算子

- スタビライザーによって射影演算子を作ることができる。

- パウリ測定

$$X : X \text{測定} \quad P_{\pm}^x = \frac{1 \pm X}{2}$$

$$Z : Z \text{測定} \quad P_{\pm}^z = \frac{1 \pm Z}{2}$$

- スタビライザー測定

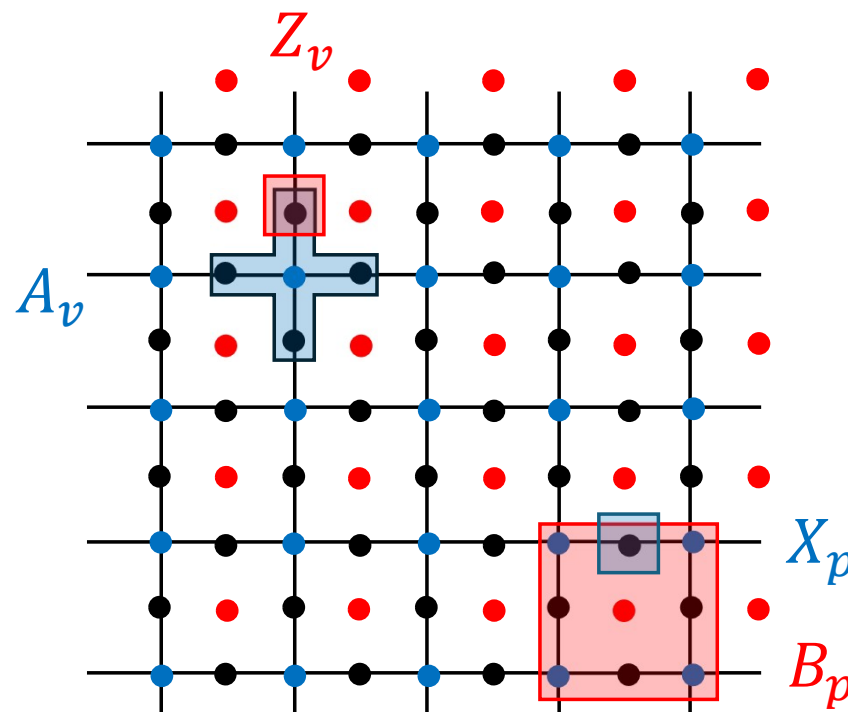
$$A_v : \text{スター測定} \quad P_{\pm}^A = \frac{1 \pm A_v}{2}$$

$$B_p : \text{プラケット測定} \quad P_{\pm}^B = \frac{1 \pm B_p}{2}$$

$$\{Z_v, A_v\} = \{X_p, B_p\} = 0$$

⇒ 反可換は同時測定不可

反可換性によって測定のバックアクション(どの拘束を作る/壊す)が決まる。



スタビライザー形式における測定更新のルール(Gottesman–Aaronson algorithm)

1. 状態をバイナリ行列で準備

$$M = [g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_L]^t$$

2. 測定演算子 P をバイナリ行列で表す。

$$P = (x_p | z_p) = (0101 \dots | 1000 \dots)$$

3. 可換性判定

測定演算子 P とチェック行列中のスタビライザーの生成子 $g_i = (x_i | z_i)$ との
シンプレクティック積： $P \cdot g_i = x_p z_i + z_p x_i$ によって判定。

$$P \cdot g_i = 0 \Rightarrow \text{可換} \quad P \cdot g_i = 1 \Rightarrow \text{反可換} \quad (\text{mod } 2)$$

4. ① P が生成子 g_i とすべて可換 $\Rightarrow M' = M$ (更新しない。 P はスタビライザー群に含まれる)

② P と1つの生成子 g_i と反可換 $\Rightarrow M' = [g_1, g_2, \dots, \pm P, \dots, g_L]^t$ (反可換なものと交換)

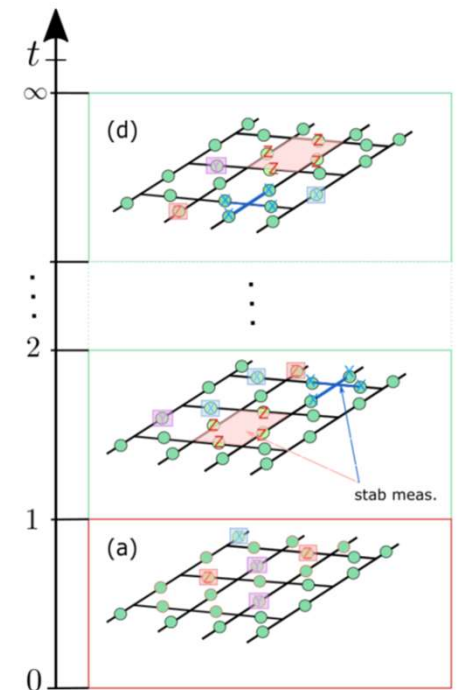
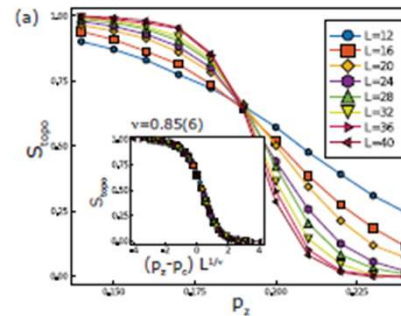
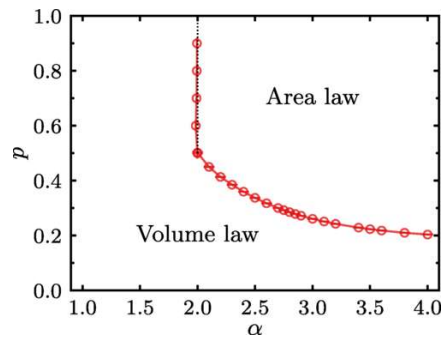
③ P と複数の生成子 g_i, g_j と反可換 $\Rightarrow M' = [g_1, g_2, \dots, \pm P, \dots, \pm P g_j, \dots, g_L]^t$

測定のバックアクション

測定のみ回路

$$|\psi_0\rangle \xrightarrow{P_1} |\psi_1\rangle = \frac{P_1|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0|P_1|\psi_0\rangle} \xrightarrow{P_2} |\psi_2\rangle = \frac{P_2|\psi_1\rangle}{\langle\psi_1|P_2|\psi_1\rangle} \dots \xrightarrow{P_{N-1}} |\psi_N\rangle = \frac{P_N|\psi_{N-1}\rangle}{\langle\psi_{N-1}|P_N|\psi_{N-1}\rangle}$$

- 個々の軌道は、非可換測定が混ざると一点には収束しにくい。
⇒ただし、EEなどの統計量はtime stepが進むと定常値に落ち着き相としては収束が見える。
- 多体系では**測定誘起相転移**を駆動
⇒測定を重ねるだけで**体積則**⇔**面積則**の転移が出現。
トーリックコードでは**測定の連鎖**=**時空パーコレーション**
⇒測定確率pによって**非収縮ループ**が切断され**トポロジカル秩序が崩壊する臨界現象**

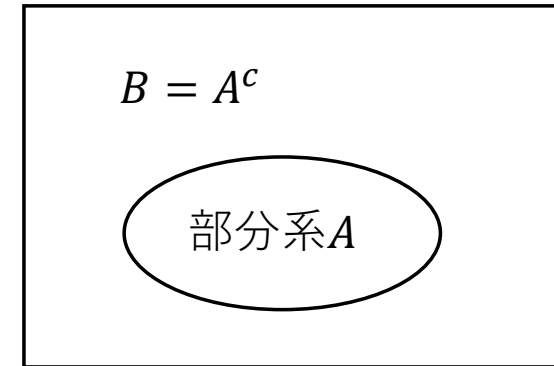


スタビライザー形式を用いた物理量の計算

- 密度行列

$$\begin{aligned}\rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \prod_{\ell} P_{\pm}^{\ell} = \prod_{\ell} \frac{1 \pm g_{\ell}}{2} = \frac{1}{2^L} \sum_{S_i \in \mathcal{S}} S_i\end{aligned}$$

スタビライザー群の生成子 g_{ℓ} の積からなる S_i はスタビライザー群の元



- エンタングルメントエントロピー (EE)

- フォン・ノイマンエントロピー

$$S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log \rho$$

- レニーエントロピー

$$S_n(\rho) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}(\rho^n)$$

一般に $S(\rho)$ と $S_n(\rho)$ は異なるが、部分系の混合成分は完全混合状態になり一致する。

$$S_A = |A| - \text{rank } M_A$$

$|A|$: 部分領域 A に含まれる qubit の数
 $\text{rank } M_A$: A にのみ作用するスタビライザーの部分群の独立な数
⇒ チェック行列の rank 計算

- S_A は $A - B$ 間にまたがるスタビライザーの数

レニー2相関 (Rényi-2 correlator)

演算子 O に対して

$$C_2(O) = \frac{\text{Tr}(\rho O \rho O)}{\text{Tr}(\rho^2)}$$

① O と g_ℓ が反可換

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(\rho O \rho O) \\ &= \text{Tr} \left(\prod_{\ell} \frac{1 \pm g_{\ell}}{2} \prod_{\ell} \frac{1 \mp g_{\ell}}{2} O^2 \right) \\ &= \text{Tr} \left(\prod_{\ell} \frac{1 - g_{\ell}^2}{2} O^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_2(O) = 0$$

スタビライザー形式での密度行列

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \prod_{\ell} \frac{1 \pm g_{\ell}}{2}$$

② O がスタビライザー群に含まれる (可換)

$$\rho O = |\psi\rangle\langle\psi| O = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$$

$$\text{Tr}(\rho O \rho O) = \text{Tr}(\rho^2)$$

$$\Rightarrow C_2(O) = 1$$

③ O がスタビライザー群には含まれないが可換。

$$\Rightarrow 0 \leq C_2(O) \leq 1$$

三角格子トーリックコードにおける測定誘起相転移

- ランダムに選ばれたリンク上のqubitに対して以下の確率で射影測定を行う。

p_x : X 測定

p_z : Z 測定

p_g : スタビライザー測定

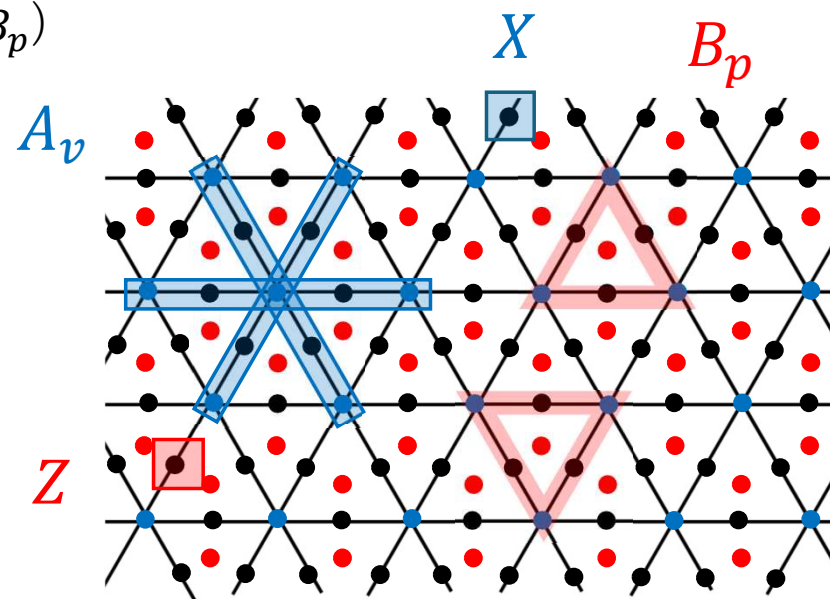
($\frac{1}{2}p_g$: スター測定 A_v 、 $\frac{1}{2}p_g$: プラケット測定 B_p)

$$p_g + p_x + p_z = 1$$

- トーリックコード+磁場

$$\mathcal{H} = - \underbrace{\sum_v A_v}_{p_g} - \underbrace{\sum_p B_p}_{p_x} - \underbrace{h_x \sum_{\ell} \sigma_{\ell}^x + h_z \sum_{\ell} \sigma_{\ell}^z}_{p_z}$$

測定確率の変化は各項の寄与の変化に相当する。



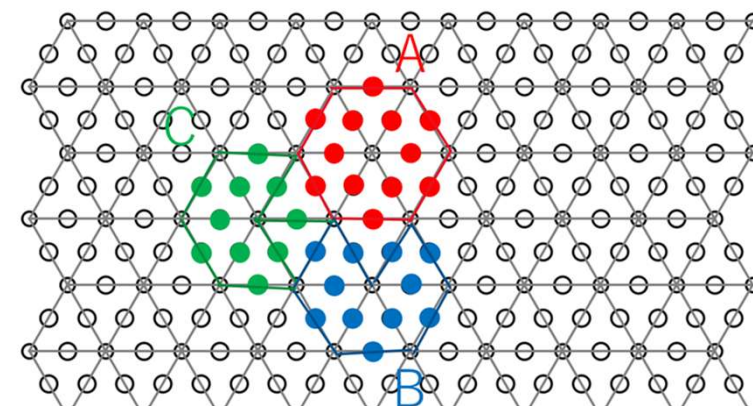
三角格子トーリックコードにおける測定誘起相転移

- トーリックコードの基底状態は
ギャップド+局所相互作用なので面積則に従う。

$$S_A = \alpha |\partial A| - \gamma$$

- トポロジカルエンタングルメントエントロピー(TEE)
⇒ トポロジカル秩序の有力な指標
Kitaev–Preskill, Levin–Wen

$$-\gamma(\text{TEE}) = S_A + S_B + S_C - S_{AB} - S_{BC} - S_{CA} + S_{ABC}$$

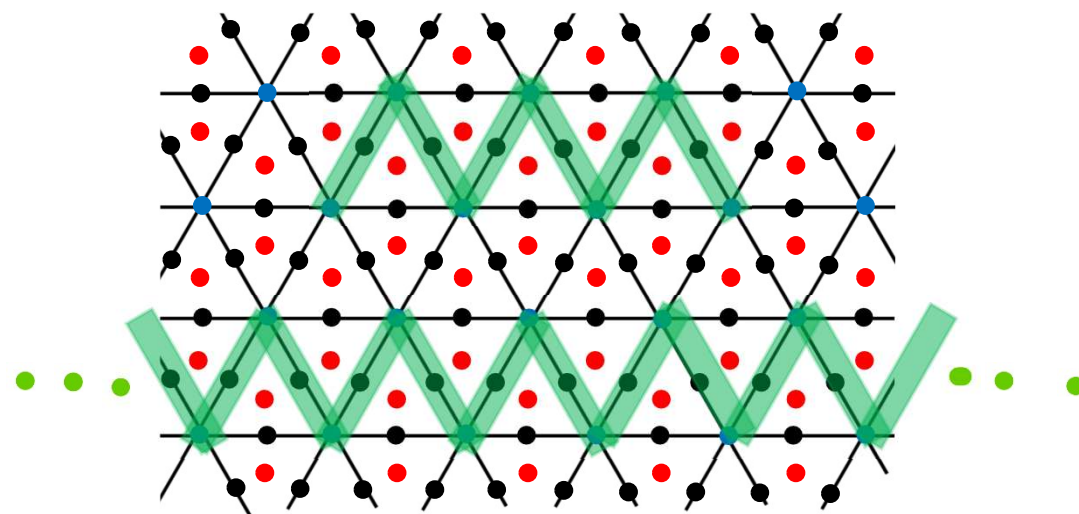


$$C_2(O) = \frac{\text{Tr}(\rho O \rho O)}{\text{Tr}(\rho^2)} \text{ の統計平均}$$

$$O = \prod X, \prod Z$$

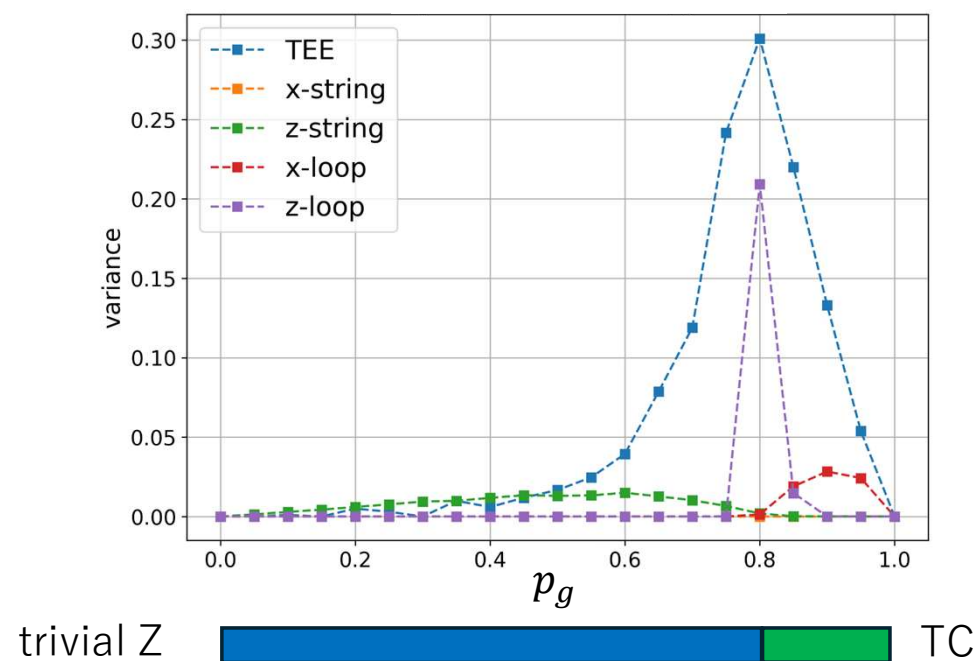
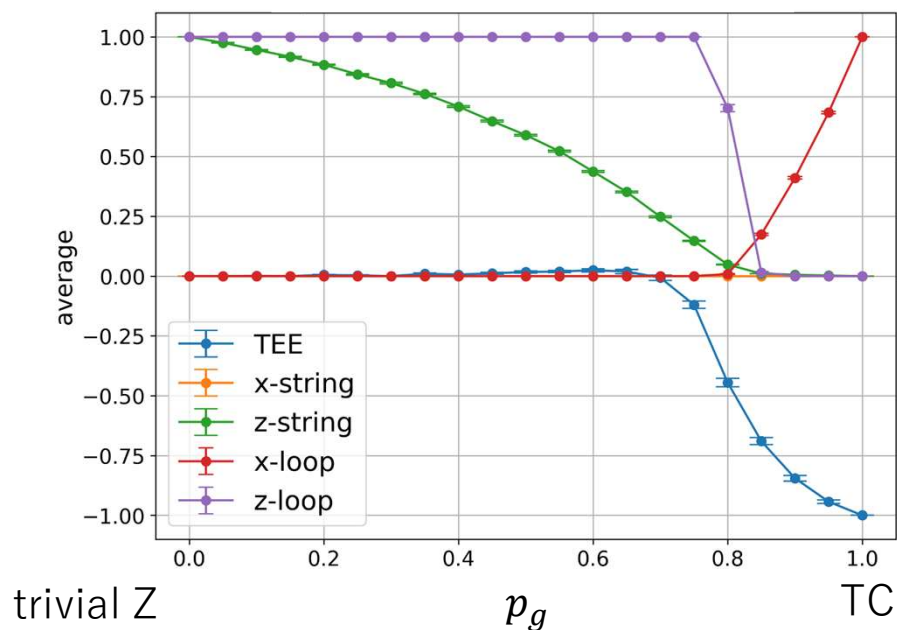
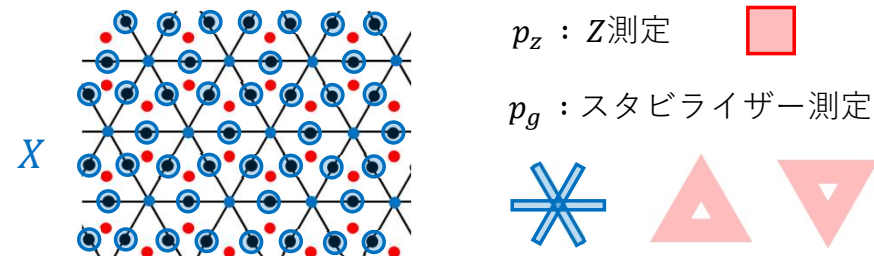
(x方向の積)

- x-string (開)
- z-string (開)
- x-loop (非収縮)
- z-loop (非収縮)



数値計算

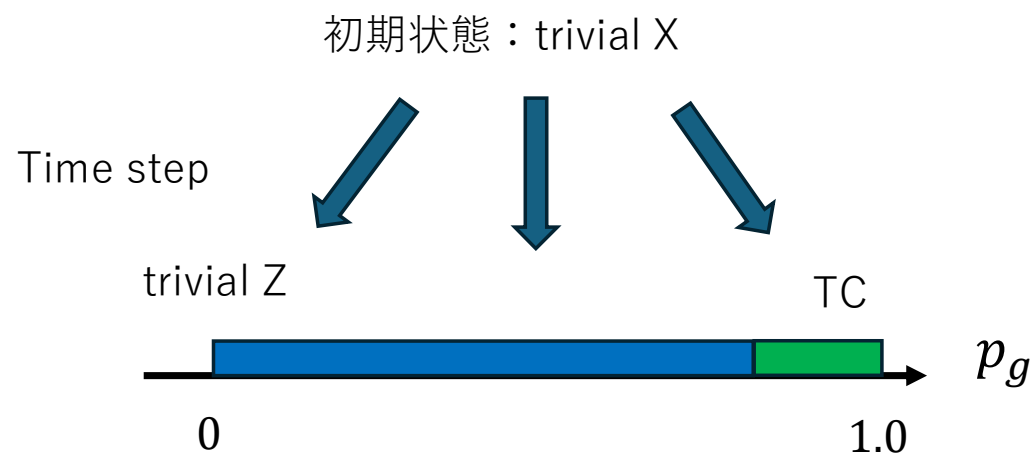
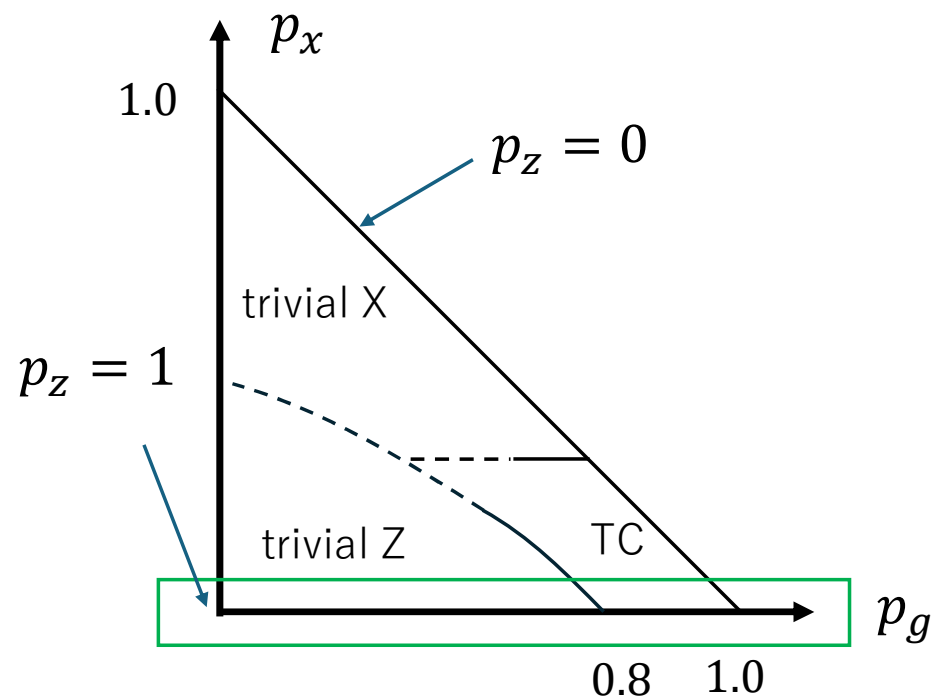
- 初期状態を X の積状態($|X\rangle^{\otimes L}$: trivial X)
- $p_g + p_z = 1$ ($p_x = 0$)



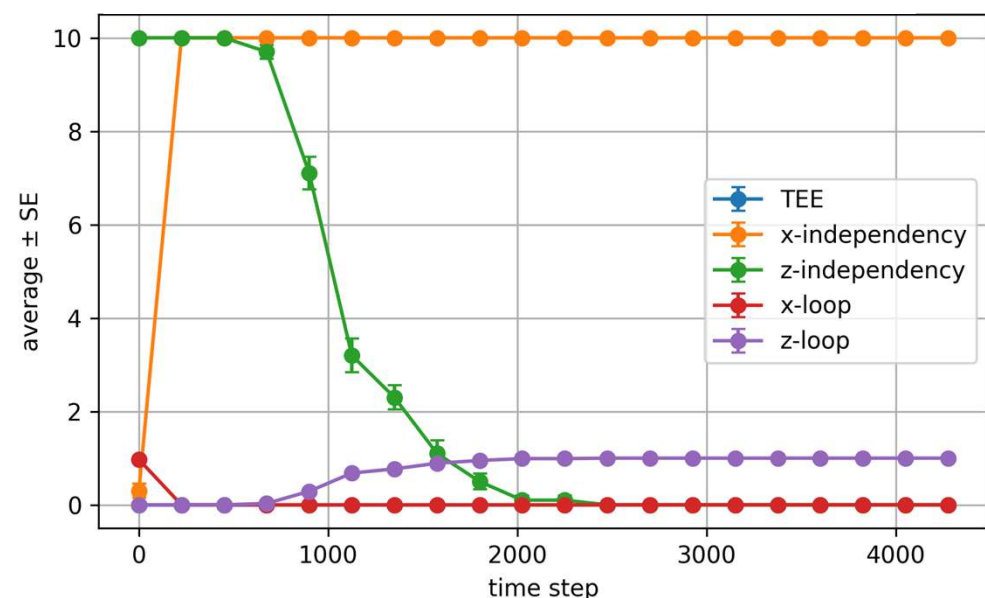
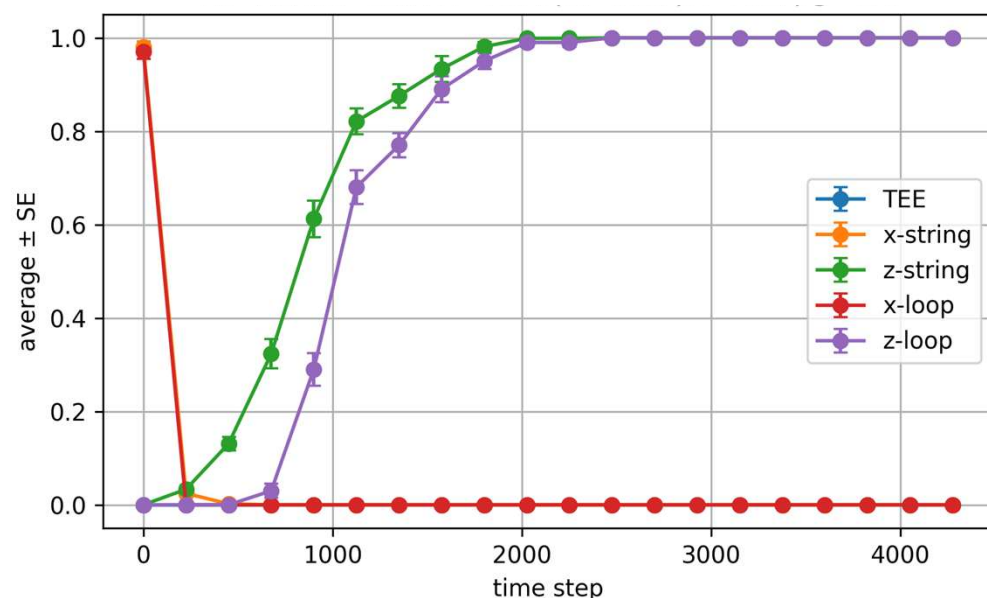
- $p_g \sim 0.8$ で、trivial $Z \Rightarrow$ TCの転移がみられる。
- trivial Z : z-string, z-loopが存在する。
- TC : x-loopが存在する。

相図

- $p_g + p_x + p_z = 1$



trivial $X \Rightarrow$ trivial Z のtime step ($p_z = 1.0 \Rightarrow Z$ 測定のみ行う)



- 常に $TEE=0$ 、trivial X からtrivial Z へのトポロジカル転移はない。
- trivial Z に近づくにつれ、x-string、x-loopは0、z-string、z-loopは1になる。

trivial X $\Rightarrow$ trivial Z のtime step ($p_z = 1.0 \Rightarrow Z$ 測定のみ行う)

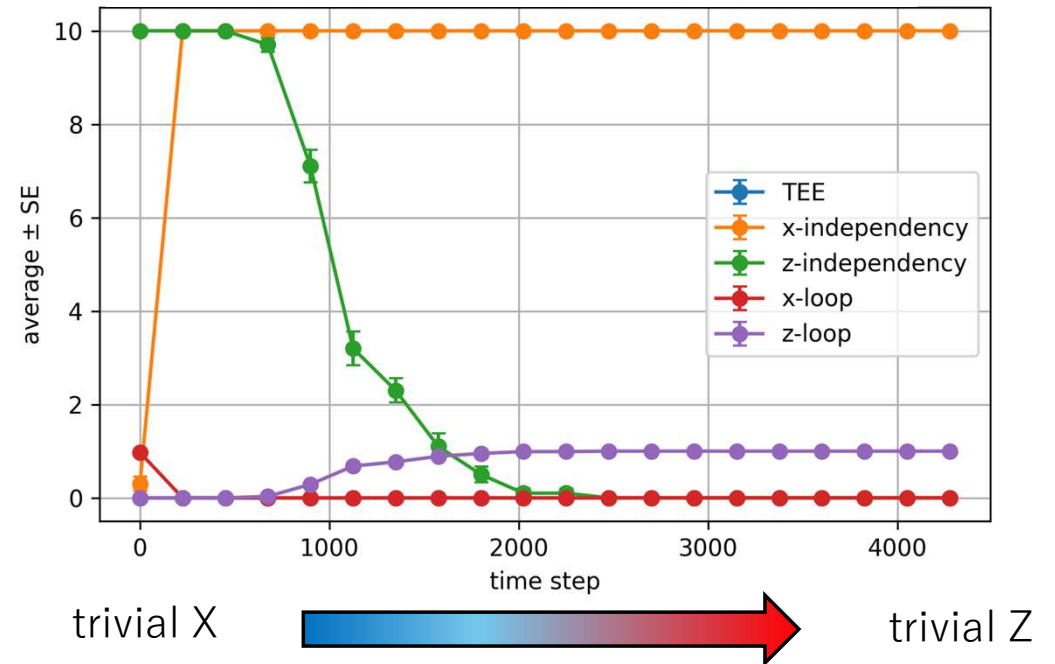
- x, z-independency
 $\Rightarrow$ x方向のx, z-loop ($L_x=L_y=10$ 個)のうち
スタビライザーと独立なものの個数

independency = 10

$\Rightarrow$ loopはスタビライザーの積で表せない。
(スタビライザーを用いて変形して、他の
loopに移り変わることができない。)

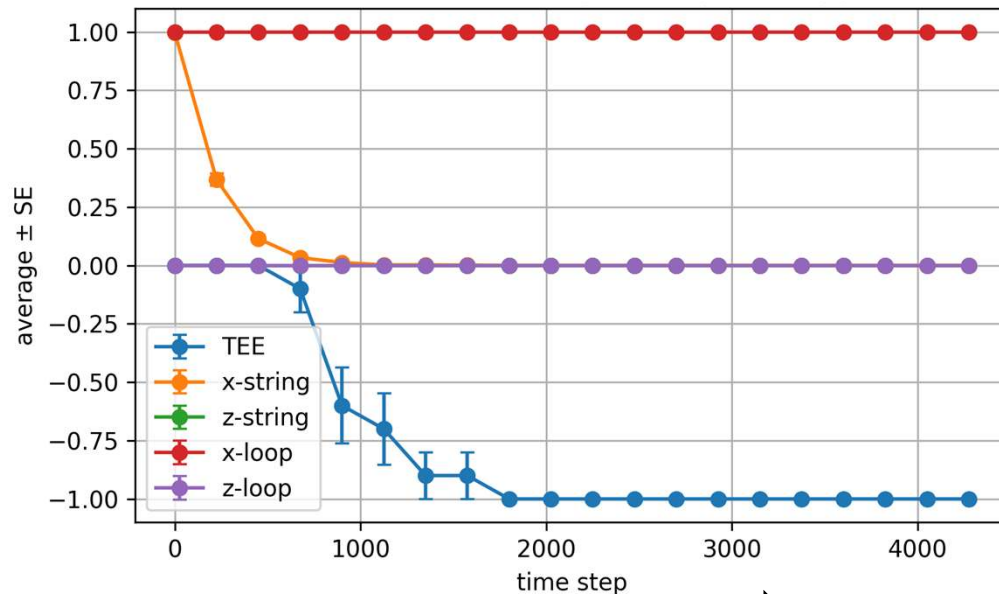
independency = 0

$\Rightarrow$ loopはスタビライザーの積で表せる。



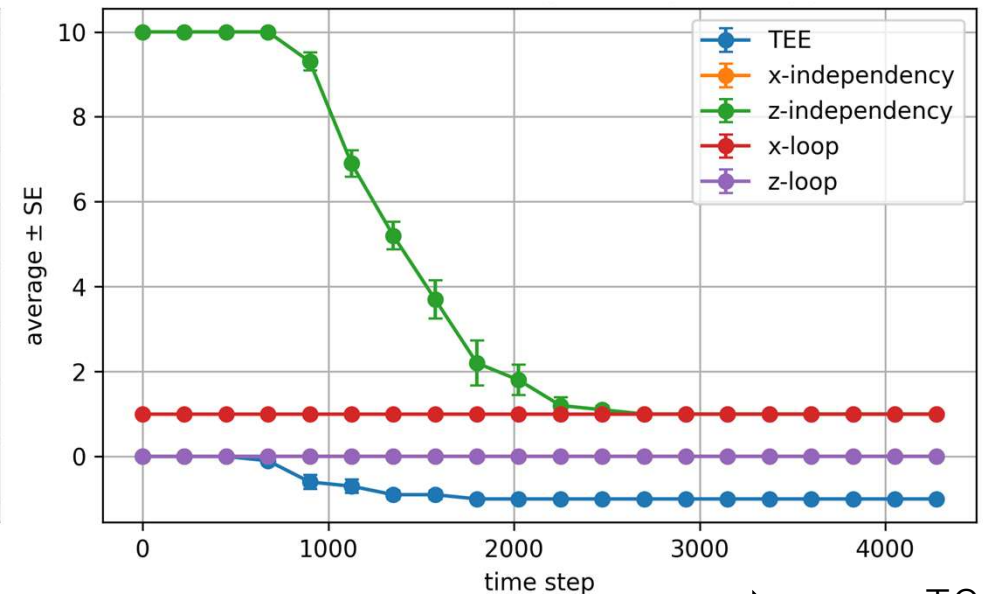
- ✓ loopの値 $\Rightarrow$ 状態の中に平均的にどれだけ存在するか
- ✓ Independencyの値 $\Rightarrow$ 状態を構成するスタビライザーと独立なものの数
 $\Rightarrow$ 論理演算子の定義
スタビライザー群と**可換**するがスタビライザー群そのものには含まれない。

trivial X $\Rightarrow$ TC のtime step ($p_g = 1.0 \Rightarrow$ スタビライザー測定のみ行う)



trivial X

TC



trivial X

TC

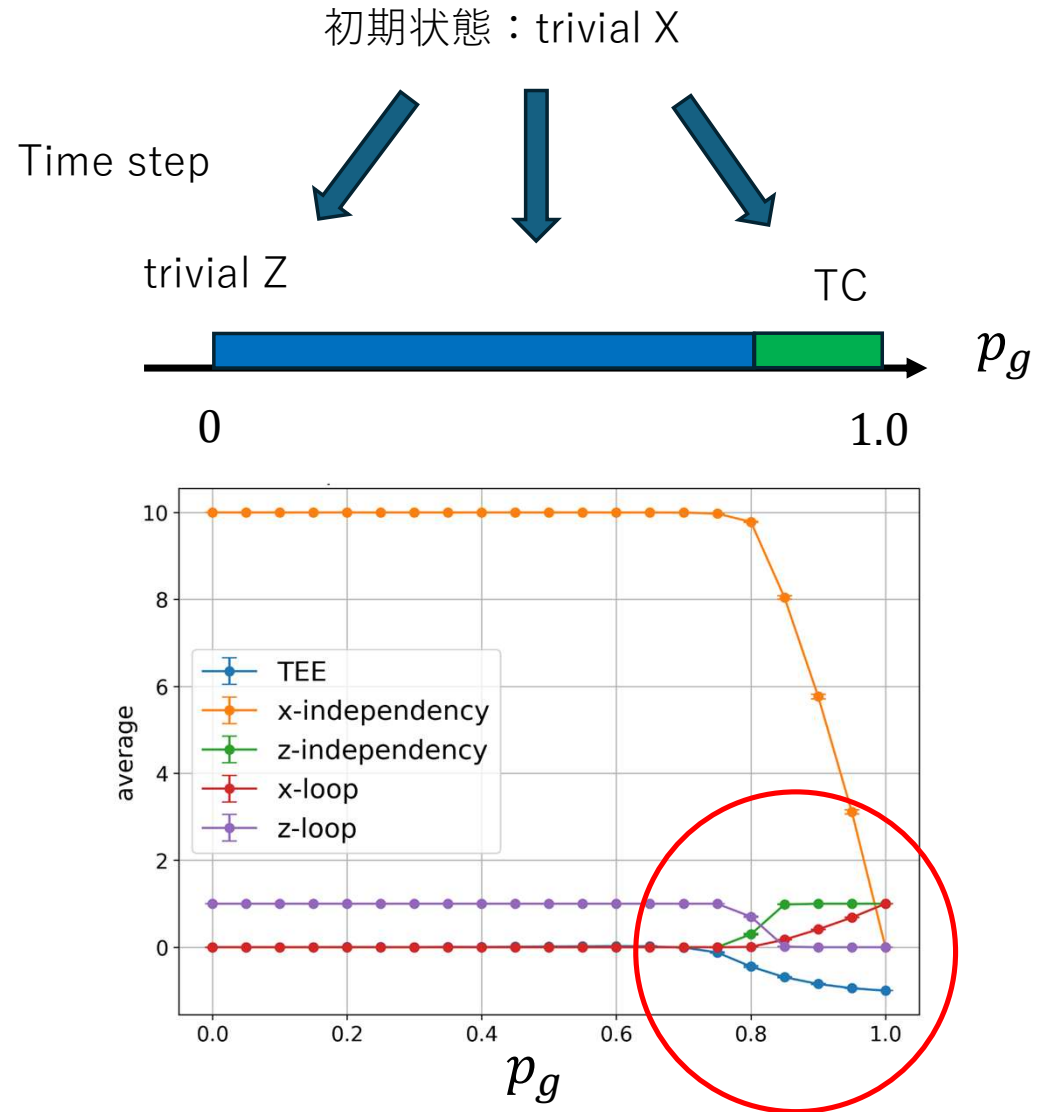
- trivial Xの状態に含まれるx-stringはブラケット測定 (ZZZ)によって消される。
- x-loopはスタビライザー測定のスター測定 (XXXXXX)によって変形するだけずっと残る。
- x-independencyは0のまま。x-loopのスタビライザー化？
- z-loopは0だが、z-independencyは1 (スタビライザーと独立なz-loopは存在できる。)

loopの変化

z-loopが0、x-loopが1になる。

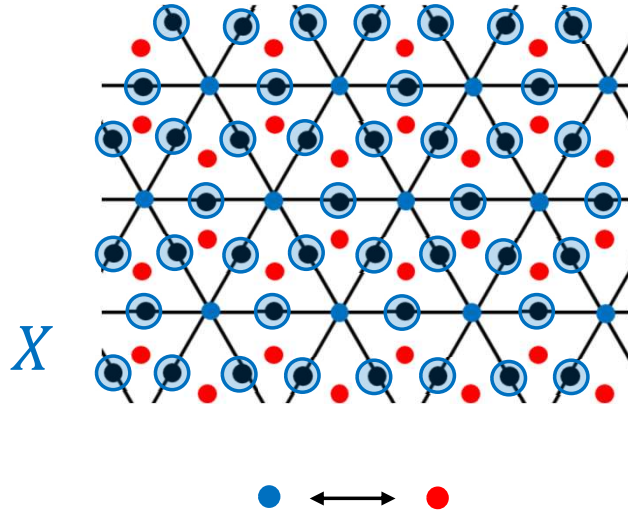
z-independencyが1
⇒z-loopが論理演算子の自由度を持つようになる。

x-independencyが0
⇒x-loopがスタビライザー化される。

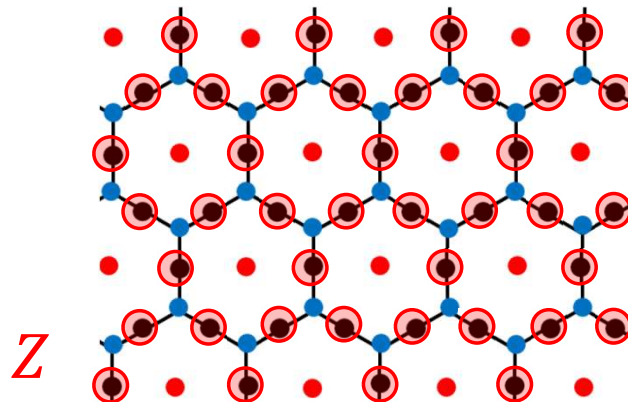


三角格子と六角格子の臨界確率

- 三角格子



- 六角格子



- $p_z + p_g = 1$

p_z : Z測定



p_g : スタビライザー測定



- $p_z + p_g = 1$

p_x : X測定



p_g : スタビライザー測定



- 三角格子パーコレーション

$$p_c = 0.347 \text{ (ボンド)}$$

$$\nu = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$\zeta = 2.389$$

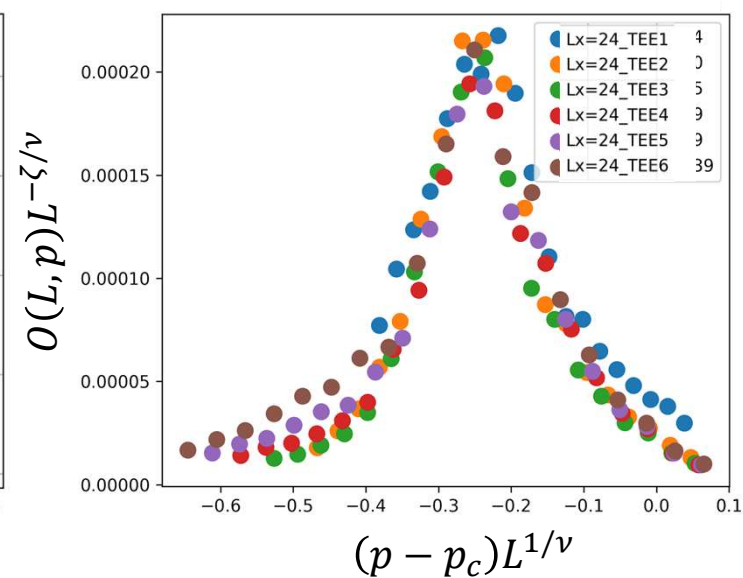
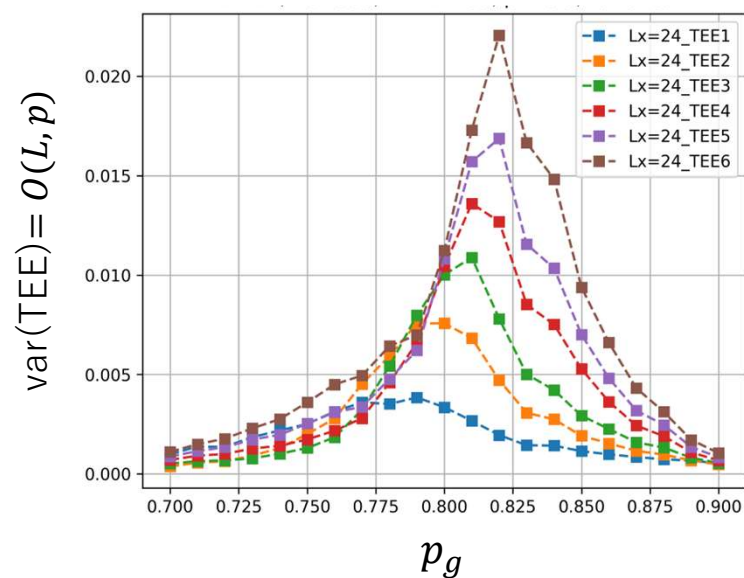
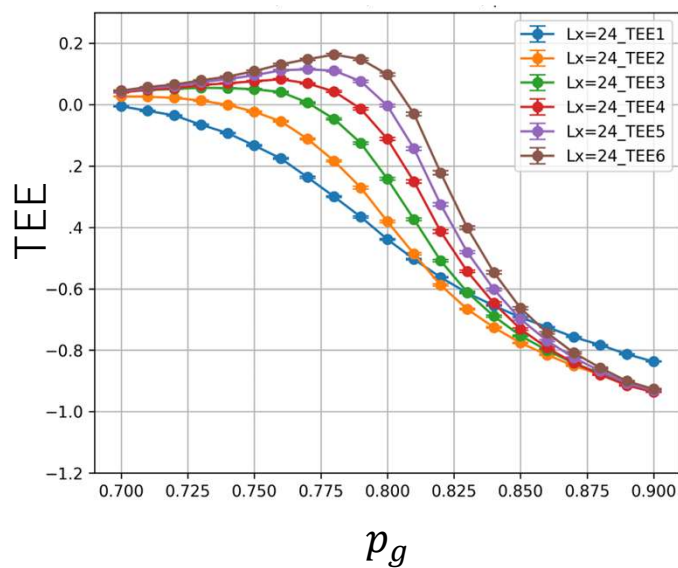
- 六角格子パーコレーション

$$p_c = 0.657 \text{ (ボンド)}$$

$$\nu = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$\zeta = 2.389$$

有限サイズスケーリング (trivial $X \Rightarrow TC$)



$$p_c = 0.117 \pm 0.050$$

$$\nu = 1.76 \pm 0.38$$

$$\zeta = 3.39 \pm 0.63$$

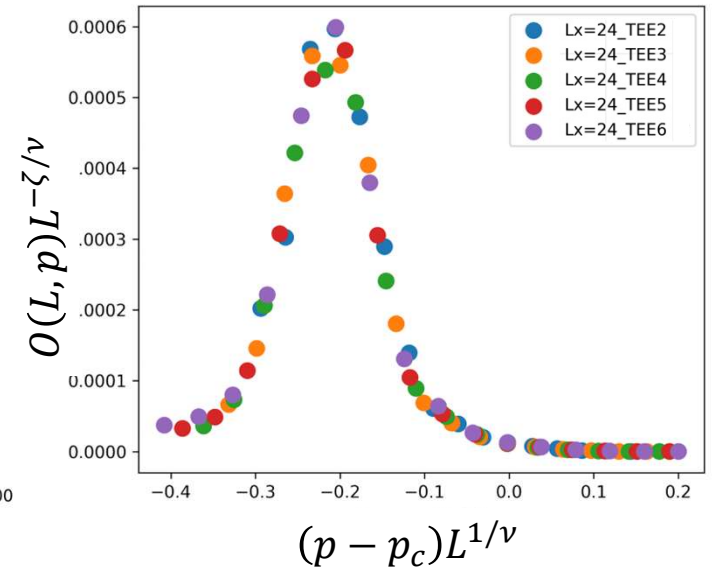
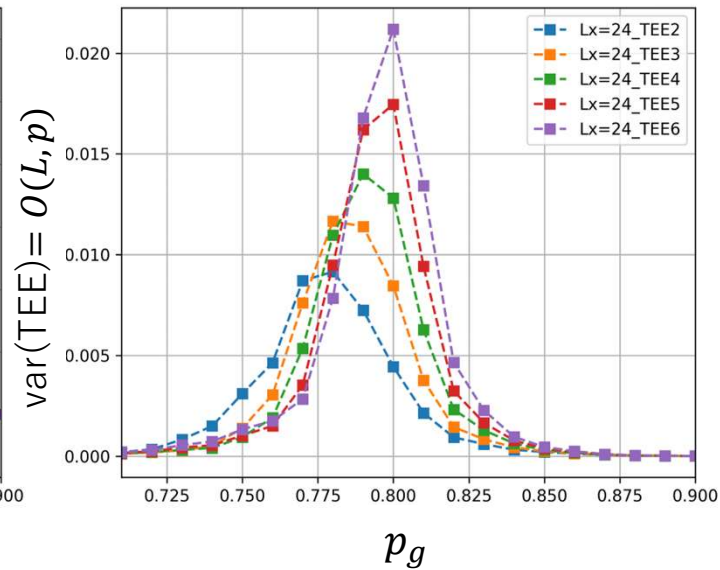
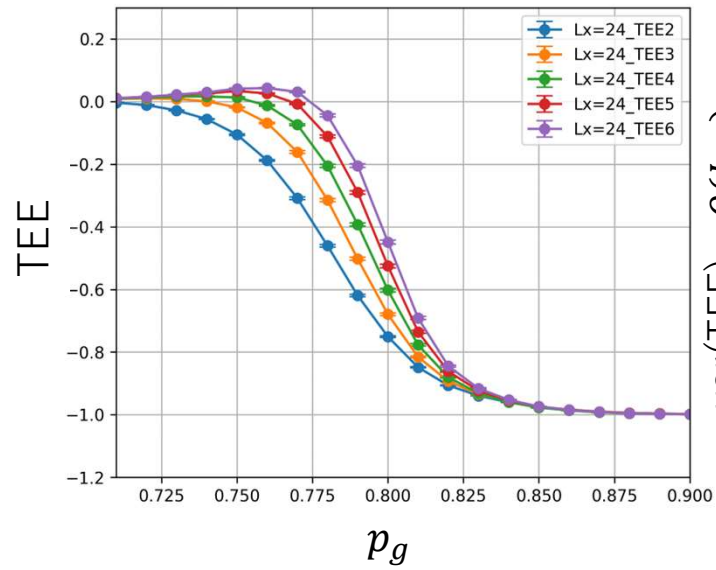
- 三角格子パーコレーション

$$p_c = 2 \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0.347 \text{ (ボンド)}, p_c = 0.5 \text{ (サイト)}$$

$$\nu = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$\zeta = 2.389$$

有限サイズスケーリング (trivial $Z \Rightarrow TC$)



$$p_c = 0.150 \pm 0.002$$

$$\nu = 1.67 \pm 0.09$$

$$\zeta = 2.54 \pm 1.01$$

- 六角格子パーコレーション

$$p_c = 1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0.657 \text{ (ボンド)}, p_c = 0.697 \text{ (サイト)}$$

$$\nu = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$\zeta = 2.389$$

まとめ

- trivial Xの状態に対して、スタビライザー測定を繰り返していくと開いたx-stringが消え、非収縮x-loopが残りTEEに寄与する。
- 非収縮x-loopは転移後、スタビライザーに含まれてしまう。
- 三角格子トーリックコードにおける測定誘起相転移の臨界確率は

$$p_c^{\text{triangle}} = 0.117 \pm 0.050$$
$$p_c^{\text{hexagonal}} = 0.150 \pm 0.002$$

⇒三角格子、六角格子のボンドパーコレーションの双対性は見られなかった。

- 確率による測定の与え方の検討