

# 大自由度カオス系の 有効自由度を決める。

- Lyapunovベクトルによるアプローチ -

竹内一将

東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻



知の物理学 研究  
センター  
Institute for Physics of Intelligence



生物普遍性研究機構  
Universal Biology Institute

謝辞

科研費  
KAKENHI



創発的研究支援事業  
Fusion Oriented Research for Disruptive Science and Technology



Active Matter c2c



# Takeuchi Lab

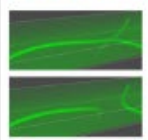
研究室の目標：ソフトマター・生物系を駆使して  
新しい非平衡統計力学を実験的に探求・理解していこう！

## 「実験統計力学研究室」

液晶

液晶がつむぐ非平衡法則：ミクロとマクロ

液晶トポロジカル欠陥の3次元ダイナミクス観察



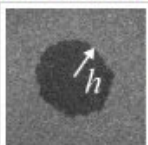
液晶のトポロジカル欠陥を共焦点顕微鏡で観察し、欠陥の3次元非平衡ダイナミクスを捉えることに成功しました。

液晶で見るIsing動的スケーリング則



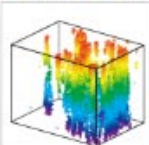
Ising強磁性などの秩序化過程を記述する、いわゆるModel Aの様々な普遍的動的スケーリング則を液晶実験で検証することに成功しました。(近日公開予定)

乱流界面成長に見るKPZ普遍法則



ゆらぎながら成長し続ける界面には、様々な物理や数学と繋がる非平衡普遍法則が隠れていました。

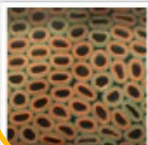
位相欠陥乱流における普遍的な臨界現象の発見



一度入ったら戻れない。そのような系で予言されていた directed percolation 普遍クラスが実験で初めて見つかりました。

マクロなソフトマター系での非平衡現象

スポンジ状粉体の風変わりなレオロジー



大変形可能な粒子からなる粉体が示す、特徴的な流動転移を発見しました。この転移は、粒子の力学特性に基づいて理解できます。(論文投稿後に公開予定)

非平衡  
相転移

コロイド

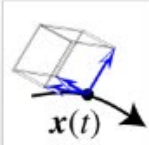
非線形物理

時系列解析による大自由度力学系の不安定性計測



対称性の高い大自由度力学系を対象に、実験に適用可能な不安定性の計測手法を開発しています。

大自由度力学系の不安定性解析の新展開

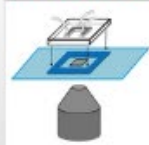


近年計算可能になった Lyapunov ベクトルを用い、集団挙動の不安定性や有効自由度を調べることに成功しました。

バクテリア

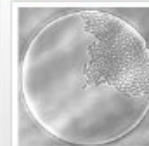
微生物集団の非平衡実験

バクテリア集団の長時間計測に向けた  
微小流体デバイス開発：広域マイクロ灌漑系



バクテリア集団を一樣な環境下で長時間安定して観察できる実験系を開発し、バクテリア集団の挙動の理解を深めています。

細胞サイズゆらぎのスケール不変性

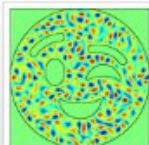


広域マイクロ灌漑系を用いた実験で、細胞のサイズ分布に普遍的なスケーリング則を見出しました。

アクティブマターの物理学

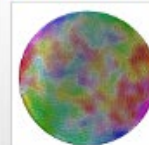
アクティブマター

バクテリア懸濁液の route to turbulence



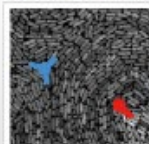
バクテリア懸濁液のモデル方程式を任意境界で解く数値計算コードを開発し、バクテリア懸濁液の乱流化過程を明らかにしました。(近日公開予定)

バクテリア集団のガラス転移



バクテリア集団が、増殖により、アクティブ流体相からアクティブガラス相に転移することを発見しました。(近日公開予定)

バクテリアコロニーの成長とトポロジカル欠陥



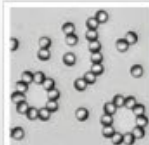
増殖するバクテリアコロニーにおいて、トポロジカル欠陥が三次元的成長を駆動することを明らかにしました。

バクテリア集団運動における秩序



高密度のバクテリア集団は乱流のように乱雑な集団運動を示します。そこに秩序を生み出すにはどうするか？ その一般論を実験に基づき構築しました。

自己駆動コロイド粒子の集団運動



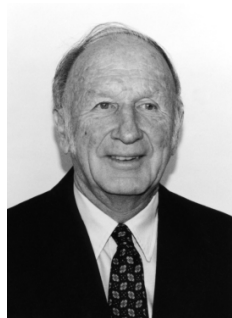
電場をエネルギー源として動きまわるコロイド粒子を用いて、自己駆動粒子系の非平衡法則を探究しています。



<https://lab.kaztake.org>

粉体

# カオス ～ バタフライ効果



気象学者 Edward N. Lorenz (1972)

“Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil  
set off a tornado in Texas?”

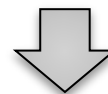
「ブラジルの蝶の羽ばたきがテキサスで嵐を起こすか？」



$v(t)$ : (ある地点での)風速

$v(0)$  に摂動を与える :

$$v(0) \mapsto v(0) + \delta v(0)$$



$$v(t) \mapsto v(t) + \delta v(t)$$

カオスなら  $|\delta v(t)| \sim e^{\lambda t}$

**指数的增长 !**

$\lambda$ : Lyapunov指数

# より正確に...

時間発展  $\vec{X}_t = \vec{F}_t(\vec{X}_0)$

摂動  $\delta\vec{X}_t = \frac{DF_t(\vec{X}_0)\delta\vec{X}_0}{\text{Jacobian}}$

摂動を受けた軌道

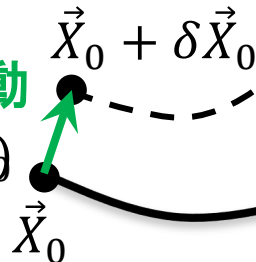
$$\vec{X}_t + \delta\vec{X}_t = \vec{F}_t(\vec{X}_0 + \delta\vec{X}_0)$$

時刻  $t$  の摂動  $\delta\vec{X}_t$

$$\|\delta\vec{X}_t\| \propto \|\delta\vec{X}_0\| e^{\lambda_1 t} \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N)$$

初期摂動

$$\propto \vec{v}_i(\vec{X}_0)$$



元の軌道  $\vec{X}_t = \vec{F}_t(\vec{X}_0)$

Lyapunov指数  $\lambda_i$ : 摂動の指数関数的成長率 ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ )

Lyapunovベクトル  $\vec{v}_i(\vec{X})$ : 指数  $\lambda_i$  で成長する固有の摂動方向

一般の摂動 
$$\delta\vec{X}_0 = \sum_i c_i \vec{v}_i(\vec{X}_0),$$

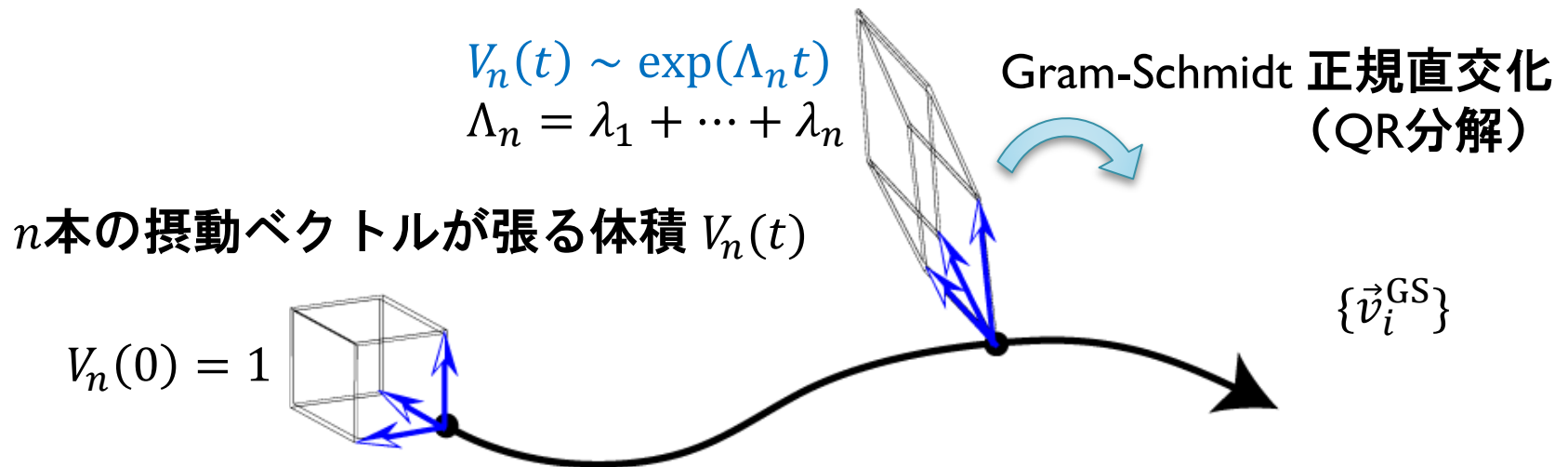
$$\delta\vec{X}_t \sim \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \vec{v}_i(\vec{X}_t) \sim C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 \quad (C_1 \neq 0 \text{ の場合})$$

# Lyapunov指数の計算手法

[Shimada & Nagashima, PTP 61, 1605 (1979);  
Benettin et al. (1980)]

※時間発展方程式  $\delta\vec{X}_t = DF_t(\vec{X}_0)\delta\vec{X}_0$  は既知とする

考え方：「摂動ベクトルが張る体積を測る」



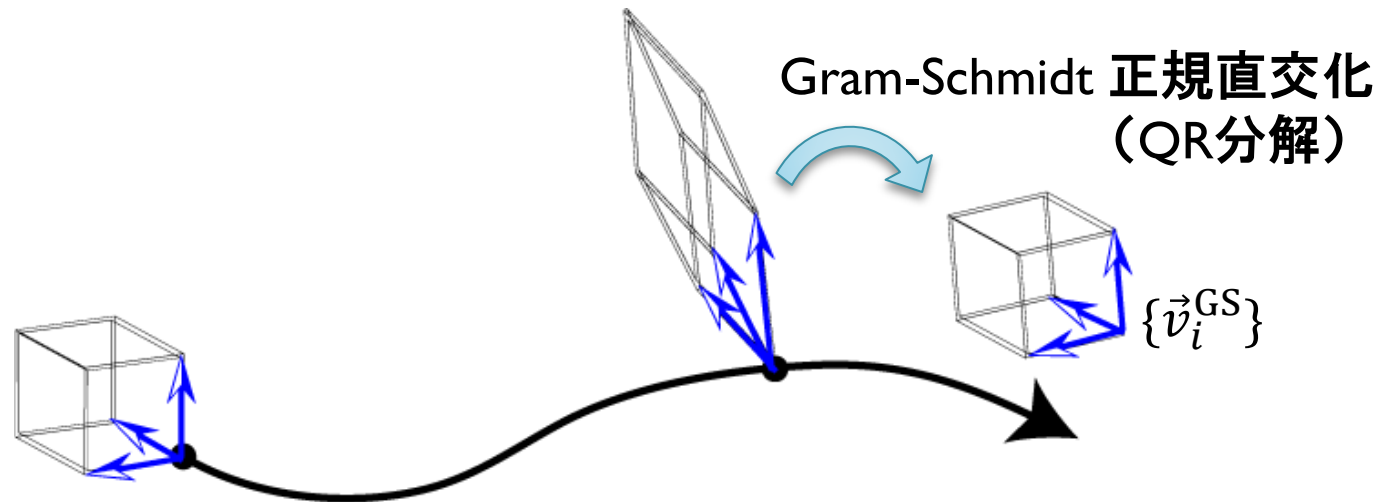
注1: QR分解の対角成分から直接評価可能  $\lambda_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log R_{ii}(t)$

注2: Gram-Schmidt ベクトル  $\vec{v}_i^{\text{GS}} \neq$  Lyapunovベクトル  $\vec{v}_i$

# Lyapunovベクトルの計算手法

[Ginelli et al., PRL **99**, 130601 (2007);  
J Phys A 2013 (review)]

※時間発展方程式  $\delta\vec{X}_t = DF_t(\vec{X}_0)\delta\vec{X}_0$  は既知とする



- $\text{span}[\vec{v}_1^{GS}, \dots, \vec{v}_n^{GS}] \simeq \text{span}[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ 
  - $\vec{v}_n$  は  $\text{span}[\vec{v}_1^{GS}, \dots, \vec{v}_n^{GS}]$  中で成長率最小の方向
  - $\vec{v}_n$  は  $\text{span}[\vec{v}_1^{GS}, \dots, \vec{v}_n^{GS}]$  中で  
時間逆向きに最も速く成長する方向

注：QR分解の  $Q, R$  行列を使って効率的に計算可能

- Lyapunovベクトルは最近 計算可能に → 発展の余地大

# 量子系との関係？

Out-of-time-order correlator (OTOC) [García-Mata et al., Scholarpedia 2023]

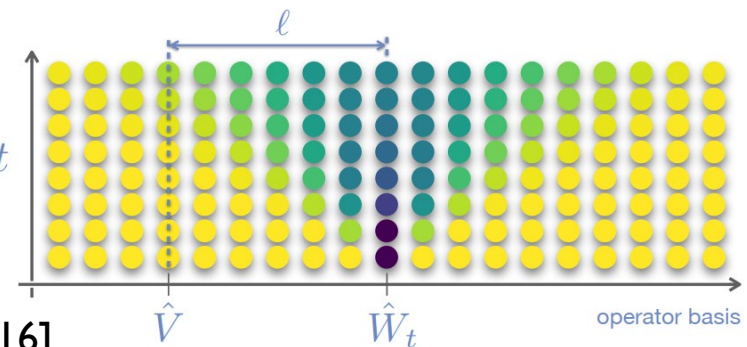
$$C_{\hat{V}\hat{W}}(t) = \left\langle [\hat{W}_t, \hat{V}]^\dagger [\hat{W}_t, \hat{V}] \right\rangle \quad \hat{O}_t = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \hat{O} e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$$

- 古典極限  $\hbar \rightarrow 0$

- $\frac{1}{i\hbar} [\hat{W}_t, \hat{V}] \rightarrow \{W(t), V(0)\}$
- $\hat{W} = \hat{X}, \hat{V} = \hat{P}_X$  とすると、 $\{X(t), P_X(0)\} = \frac{\partial X(t)}{\partial X(0)} \sim e^{\lambda t}$
- $C_{\hat{P}_X \hat{X}}(t) \rightarrow \hbar^2 \left| \frac{\partial X(t)}{\partial X(0)} \right|^2 \sim \hbar^2 e^{2\lambda t}$

- 量子系の特徴量として

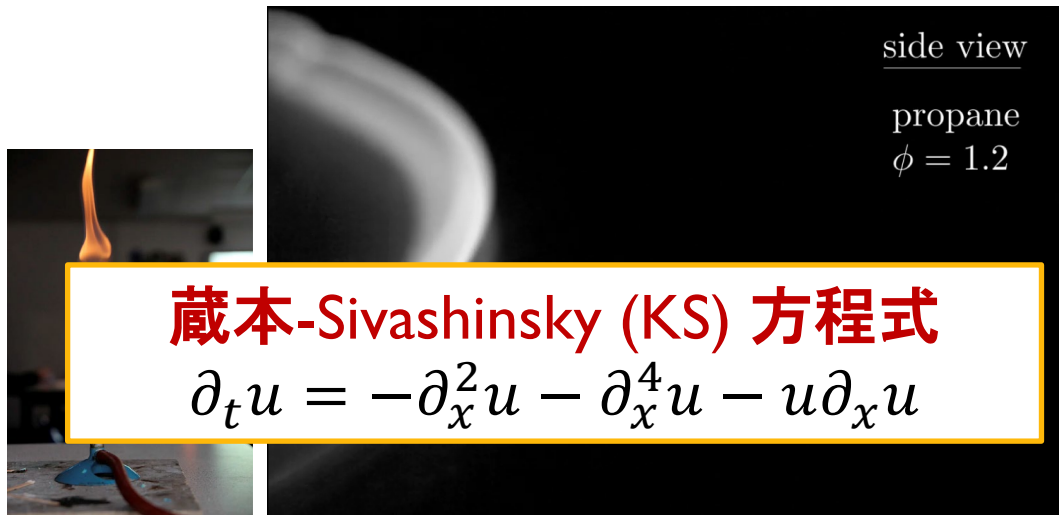
- 量子カオス, “量子Lyapunov指数”  $t$
- 量子情報, scrambling
- 成長率の上限 [Maldacena et al. JHEP 2016]



独り言：量子Lyapunovスペクトル、Lyapunovベクトルは定義可能？

# 空間に広がったカオス現象：時空カオス

## 燃焼フロント

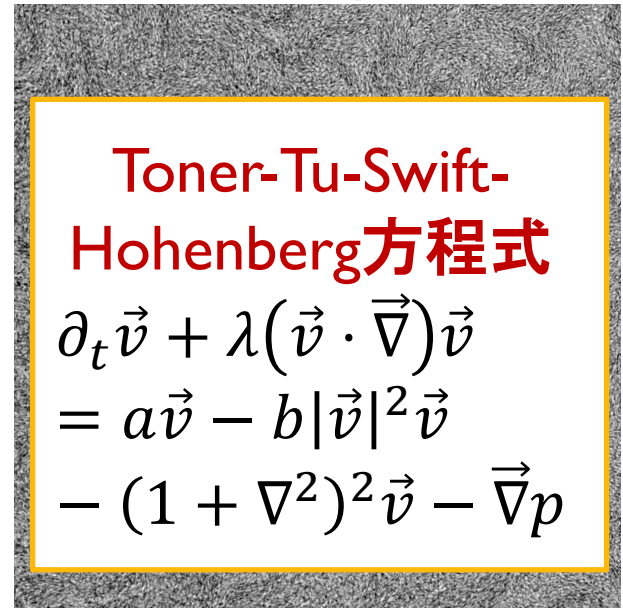


### 蔵本-Sivashinsky (KS) 方程式

$$\partial_t u = -\partial_x^2 u - \partial_x^4 u - u \partial_x u$$

[Martínez-Ruiz et al., APS Gallery of fluid motion 2018]

## バクテリア集団運動

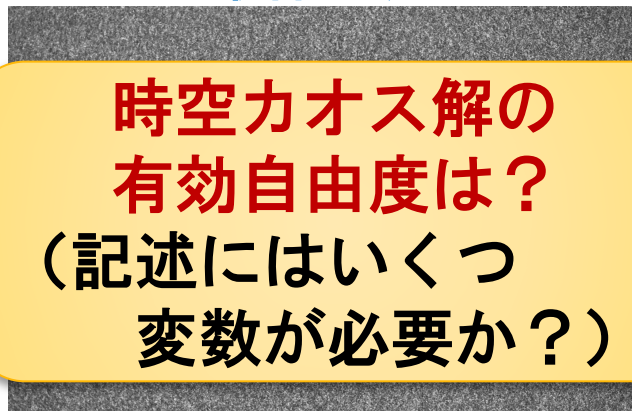


### Toner-Tu-Swift-Hohenberg方程式

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{v} + \lambda(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \\ = a \vec{v} - b |\vec{v}|^2 \vec{v} \\ - (1 + \nabla^2)^2 \vec{v} - \vec{\nabla} p \end{aligned}$$

[Nishiguchi et al., PNAS 2025]

## 液晶乱流



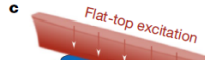
時空カオス解の  
有効自由度は？  
(記述にはいくつ  
変数が必要か？)

※KPZクラス (熱場2017 講演)

## 励起子ポラリトン凝縮体

### 散逸Gross-Pitaevskii方程式

$$\begin{aligned} i \partial_t \psi \\ = \left[ -\nabla^2 + g_c |\psi|^2 + \frac{g_{RP}}{\gamma_{R+R} |\psi|^2} \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \left( \frac{RP}{\gamma_{R+R} |\psi|^2} - \gamma_C \right) \right] \psi \end{aligned}$$



# 偏微分方程式の時空カオス解の有効自由度

## 偏微分方程式の解は何変数で記述できるか？

(例：KS方程式  $\partial_t u = -\partial_x^2 u - \partial_x^4 u - u \partial_x u$  の解  $u(x, t), x \in [0, L]$ )

- 無限？ ( $\because$  Fourier級数  $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)]$ )
- 物理的にはカットオフ波数を期待 → 有限自由度？
- 参考：散逸系カオスの strange attractor

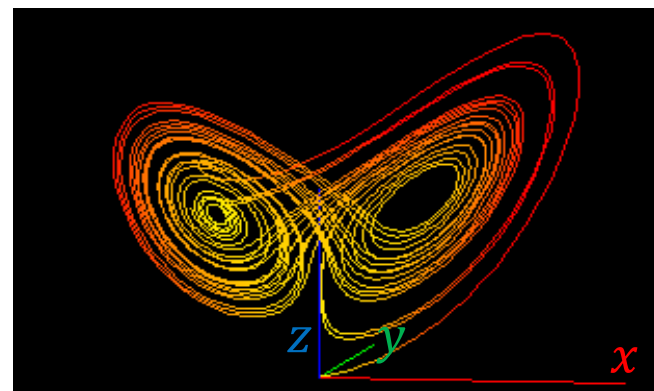
例：Lorenz 1963 モデル

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

相空間：3次元

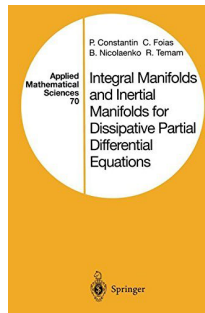
アトラクター：約2.06次元

[Viswanath, Physica D 2004]



散逸のあるカオス系は、  
見かけより少数の自由度しか持たない。

# 数学的知見（散逸つき偏微分方程式のカオス）



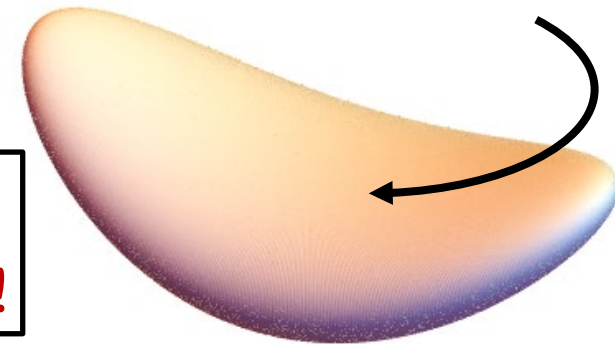
Constantin et al.,  
Springer (1989)

軌道は一般に

- (1) **有限整数次元の「慣性多様体」**に吸い込まれ、
- (2) 最終的に有限フラクタル次元のアトラクターに収まると信じられている。

↓ 本当なら...

- 過渡後の解はたかだか有限次元
- **有限個の変数の常微分方程式でOK!**



一部の系では  
**有限次元の慣性多様体の存在が数学的に証明**

しかし

- **実際に何次元かは不明**（数学が与えたのは上限だけ）
- **どのような変数を選べば良いかも不明**

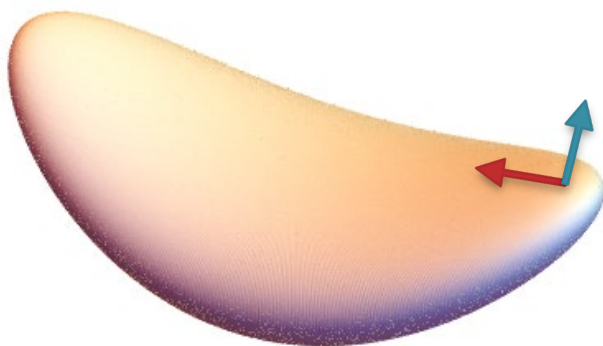
# 慣性多様体を数値的に捉える！

(Takeuchi, Chaté, Ginelli, Yang, Radons, Cvitanović, ...

PRL 102, 074102 (2009); PRE 84, 046214 (2011); PRL 117, 024101 (2016)

アイディア：

摂動に対する応答を活用しよう！



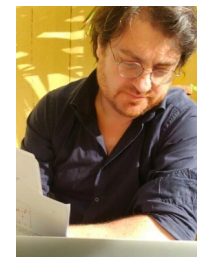
- 慣性多様体内部の摂動 → バタフライ効果  
(様々な摂動モードを励起し指数関数的成長)
- 慣性多様体外の摂動 → 軌道に影響与えず指数関数的減衰

摂動の成長/減衰・他モードへの影響を調べてみよう

主な共同研究者



H. Chaté



F. Ginelli



H.-I. Yang

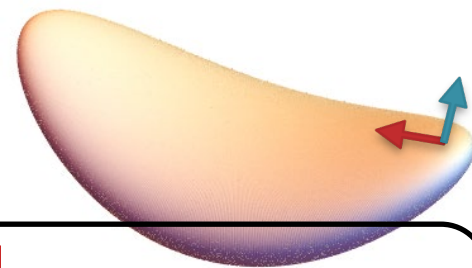


G. Radons



P. Cvitanović

# 慣性多様体を数値的に捉える！



- 慣性多様体内部の摂動 → バタフライ効果  
(様々な摂動モードを励起し指数関数的成長)
- 慣性多様体外の摂動 → 軌道に影響与えず指数関数的減衰

Lyapunovベクトル（固有の摂動方向）が使えるはず！

- $\{\vec{v}_i(\vec{X})\}$  は直交基底ではない。接することもできる。  
接したら、摂動は他モードに伝搬するはず。



- 他と接しない摂動は、 $e^{\lambda_i t}$  で単独で成長/減衰するだけ。

慣性多様体外の摂動 → 接点なし、 $\lambda_i < 0$  ではないか？

# 蔵本-Sivashinsky (KS) 方程式の解析

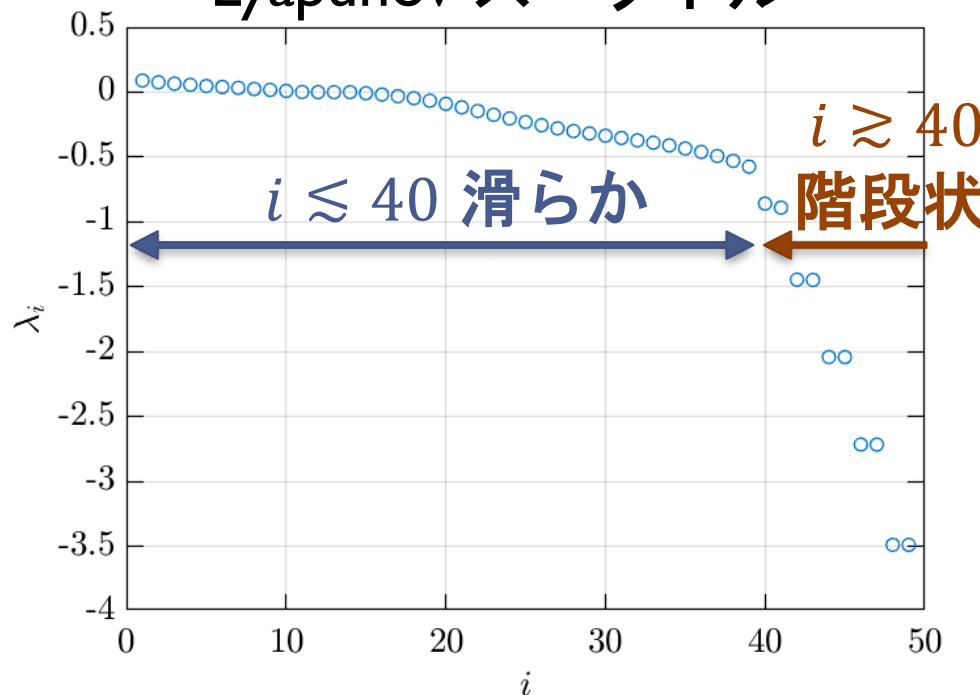
PRL 102, 074102 (2009)  
PRE 84, 046214 (2011)

$$\partial_t u = -\partial_x^2 u - \partial_x^4 u - u \partial_x u, \quad x \in [0, L]$$

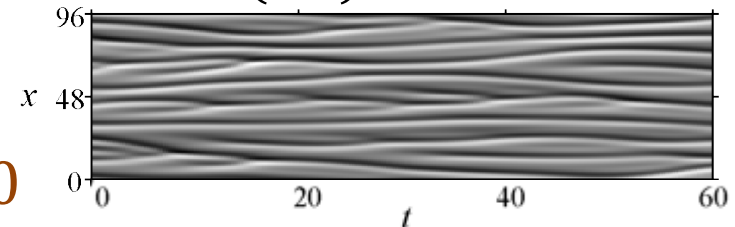
$L = 96$   
周期境界

負の拡散 → 不安定性

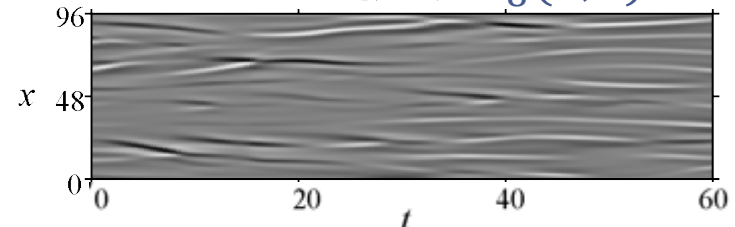
Lyapunov スペクトル



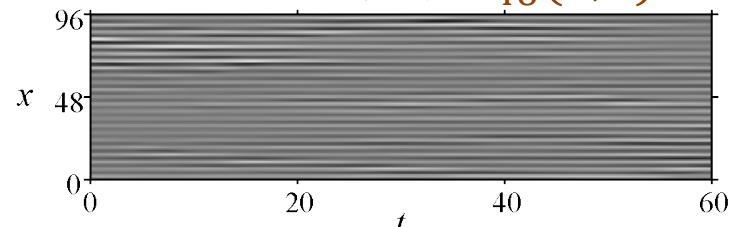
軌道  $u(x, t)$  : 時空カオス



$i \lesssim 40$  の摂動  $v_8(x, t)$



$i \gtrsim 40$  の摂動  $v_{46}(x, t)$



※階段の出現は周期境界のみ。

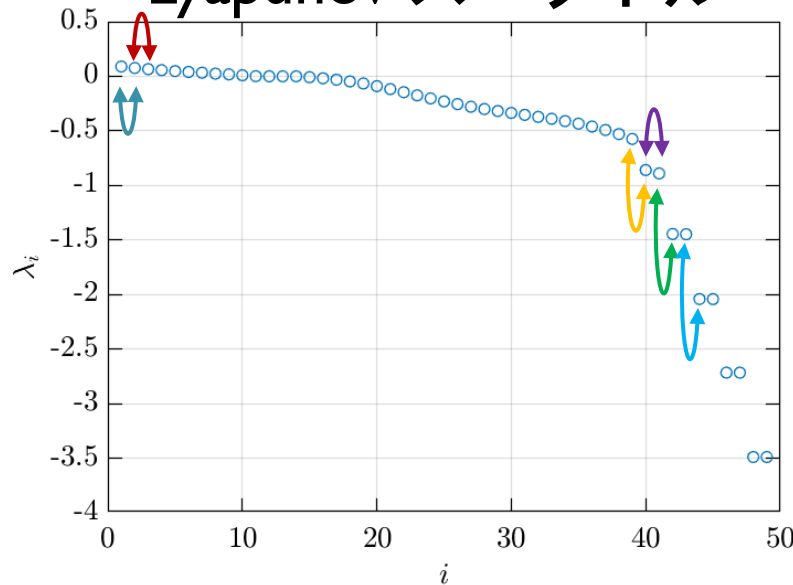
階段状であることが本質ではない。

→ ほぼ正弦波。軌道と無関係？

# KS方程式：慣性多様体次元の決定

PRL 102, 074102 (2009)  
PRE 84, 046214 (2011)

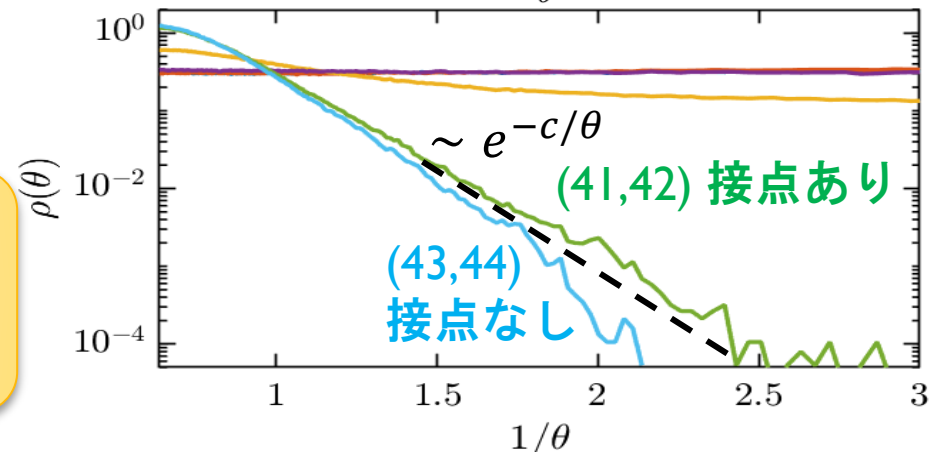
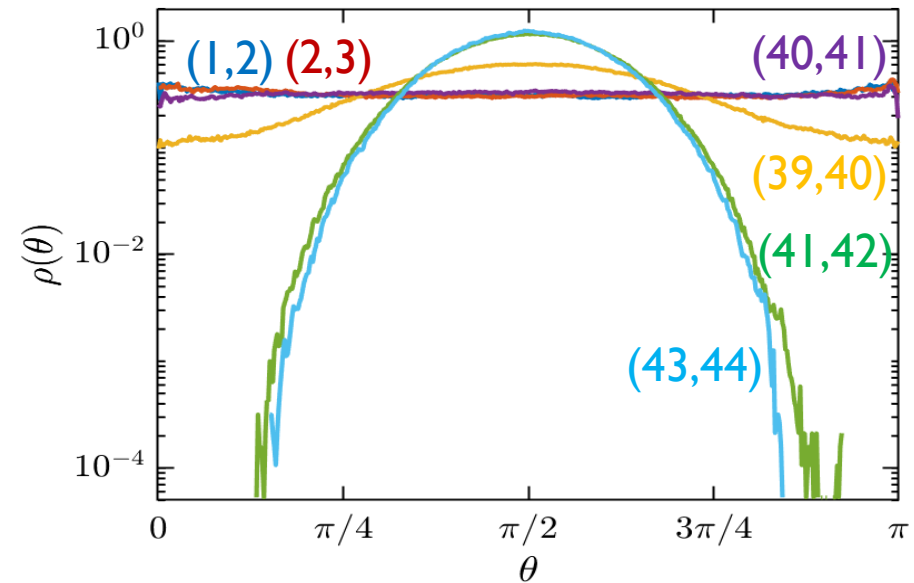
## Lyapunov スペクトル



$i \geq 44$  は接点なし & 減衰  
→ 慣性多様体の外の摂動

**慣性多様体の次元  
(記述に必要な自由度数)  
を決定できた！  $N = 43$**

## Lyapunov ベクトル間の 角度分布



# わかったこと

Yang, Takeuchi, ...,  
PRL 102, 074102 (2009); PRE 84, 046214 (2011)

- 慣性多様体次元（必要な自由度数） $N$  を exact に決められるようになった！

- 数学的には上限しか与えられていなかった。

慣性多様体  
次元  $N$

- $N$  は示量的 ( $N \sim L$ )

- 数学で得られる上限は示量的でなかった。

$$N < \text{const} \times L^{2.46}$$

[Robinson 1994, Jolly et al. 2000]

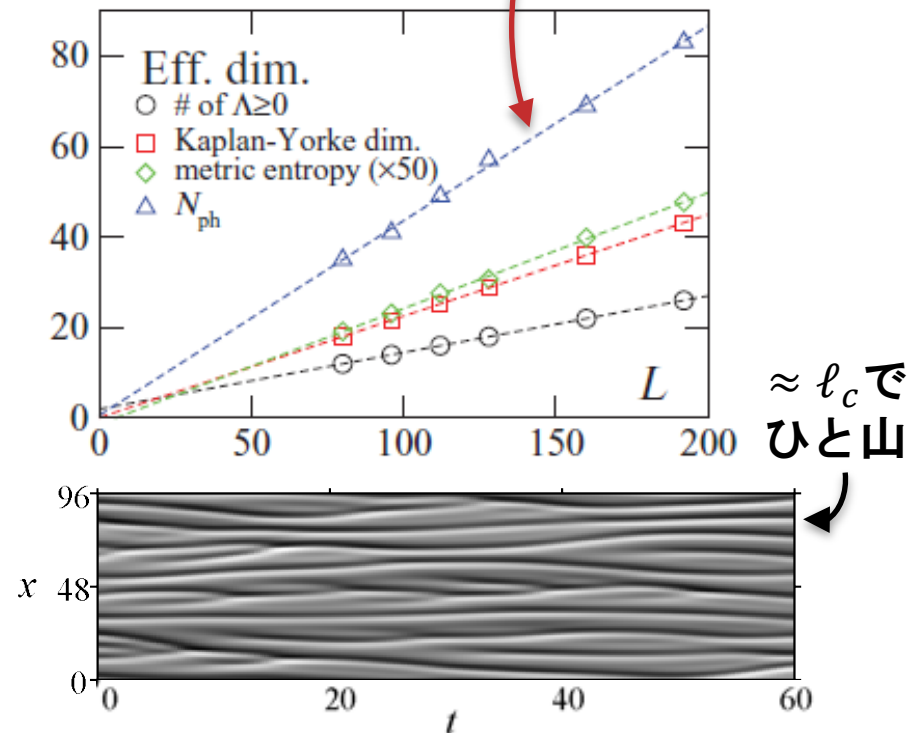
- KS方程式の場合

- 特徴的長さ  $\ell_c \equiv 2\pi\sqrt{2}$

- 我々の結果  $N \approx 3.8 \times \frac{L}{\ell_c}$

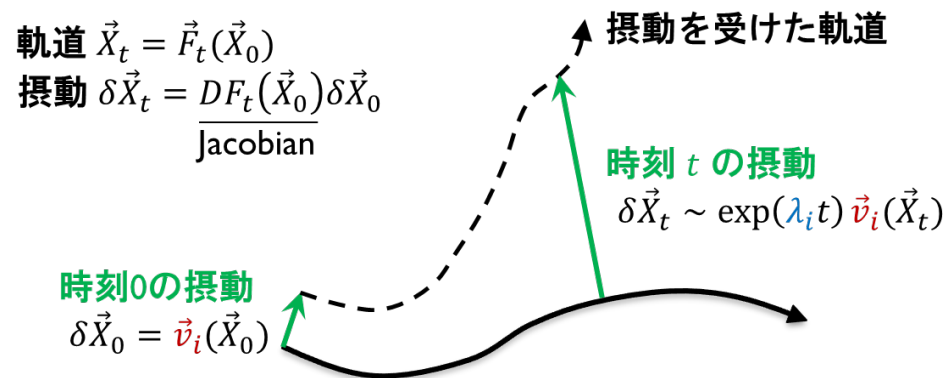
- KS特有の物理からの期待

$N \approx 4 \times \frac{L}{\ell_c}$  [佐々, 未発表] → 我々の結果は物理的にも真っ当だった。



# できていなかったこと

- 時間発展方程式を知らないと何もできない！  
→ 実験には使えない！

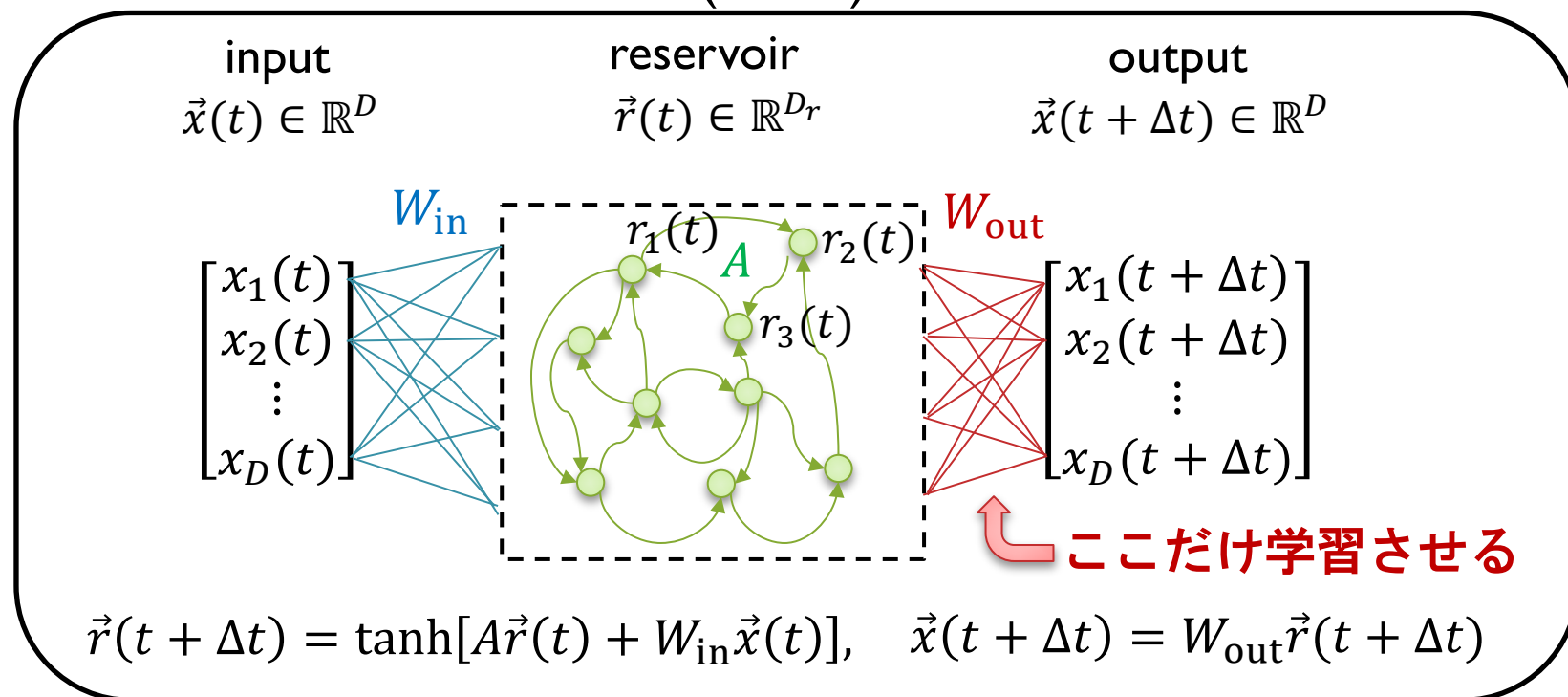


- 実験（時系列解析）で Lyapunov 指数が測れるのは少数自由度の系に限られていた。  
（∴バタフライ効果を実測するのは不可能だった！）
- Edward Ott グループ (2017) [Pathak et al. Chaos 27, 121102 (2017); PRL 2018]  
機械学習（リザーバー計算）＋時系列データで Lyapunov スペクトルを測る方法が提案された。  
（KS方程式で概念実証されたが実験はない）

# リザーバー計算

[Maass et al. Neural Comput. 2002; Jaeger & Haas, Science 2004]

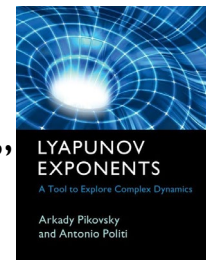
## Recurrent neural network (RNN) の一種



- **学習させるのは  $W_{out}$  だけ** (計算コスト、メモリ、収束性向上)
- **予測フェーズ**：これ自体が自律した力学系  
→ **Lyapunov指数・ベクトルの数値計算手法**を使える。

# まとめ (Review part)

参考 : Pikovsky & Politi,  
“Lyapunov Exponents:  
A Tool to Explore Complex Dynamics”  
(Cambridge University Press, 2016)



## • 古典カオス系のLyapunov指数・Lyapunovベクトル

- $N$ 自由度のカオス系には、  
Lyapunov指数・Lyapunovベクトルの組 $(\lambda_i, \vec{v}_i)$ が $N$ 個。  
固有値・固有ベクトルと似た関係。
- Lyapunovベクトルの計算手法は比較的最近できた。  
発展の余地大。
- 量子系の対応物？ OTOCの拡張・固有値問題化？

## • 時空カオス系の有効自由度 [Yang, Takeuchi, ..., PRL **102**, 074102 (2009); PRE **84**, 046214 (2011)]

- 散逸つき時空カオスの解は有限の自由度で記述可能
- 必要な自由度数（慣性多様体次元）は  
Lyapunovベクトル間の接点の有無から決定可能
- 蔵本-Sivashinsky 方程式などで数値的に実証