

低次元流体の定常流を预言する上での 揺らぐ流体力学の必要性

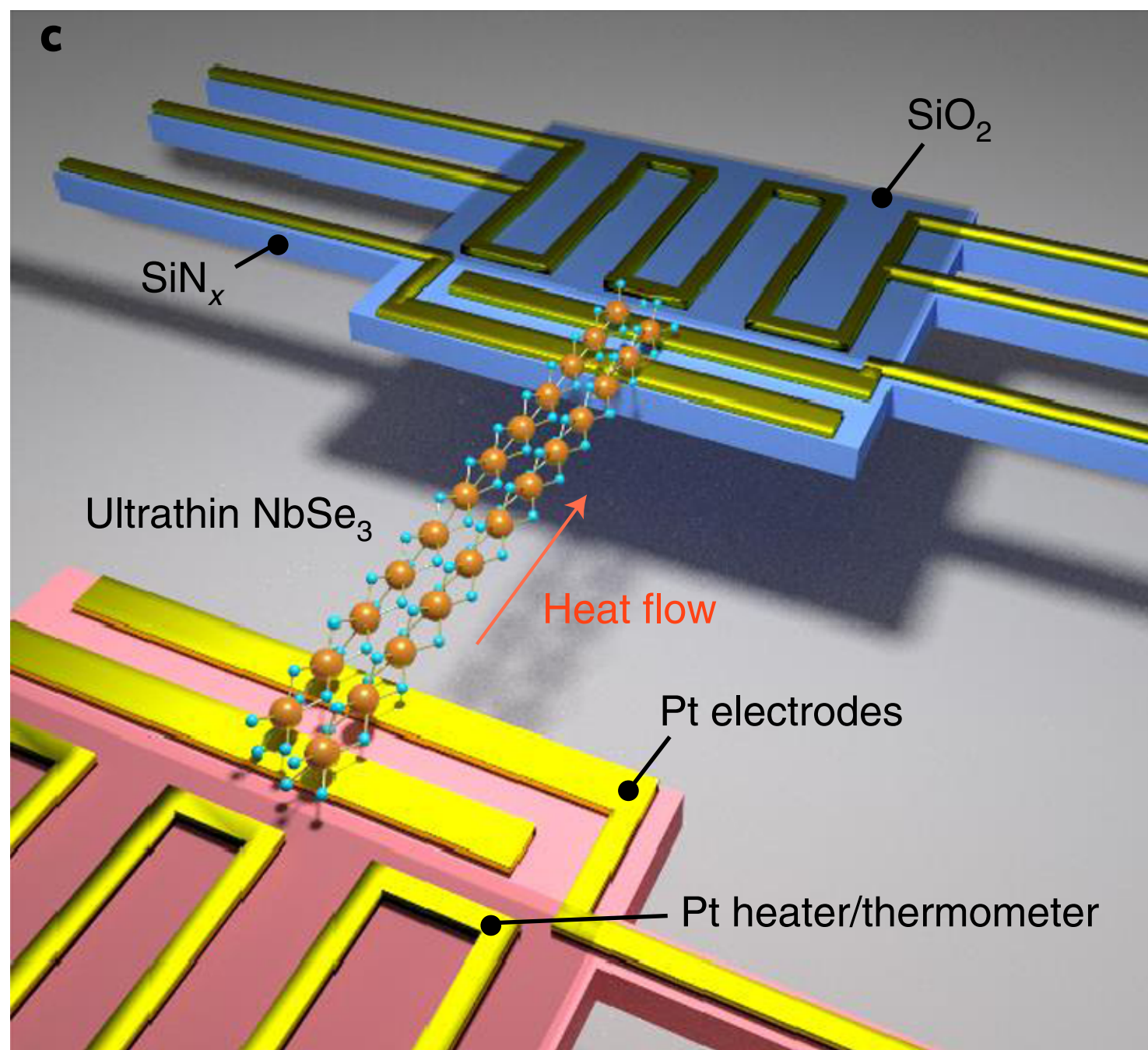
中野 裕義 （東大物性研）

共同研究者：南 佑樹（岐阜大学），齊藤圭司（京都大学）

低次元固体 / 低次元流体

ナノワイヤの流れる熱流

L. Yang et al. Nat. Nanotechnol (2021)

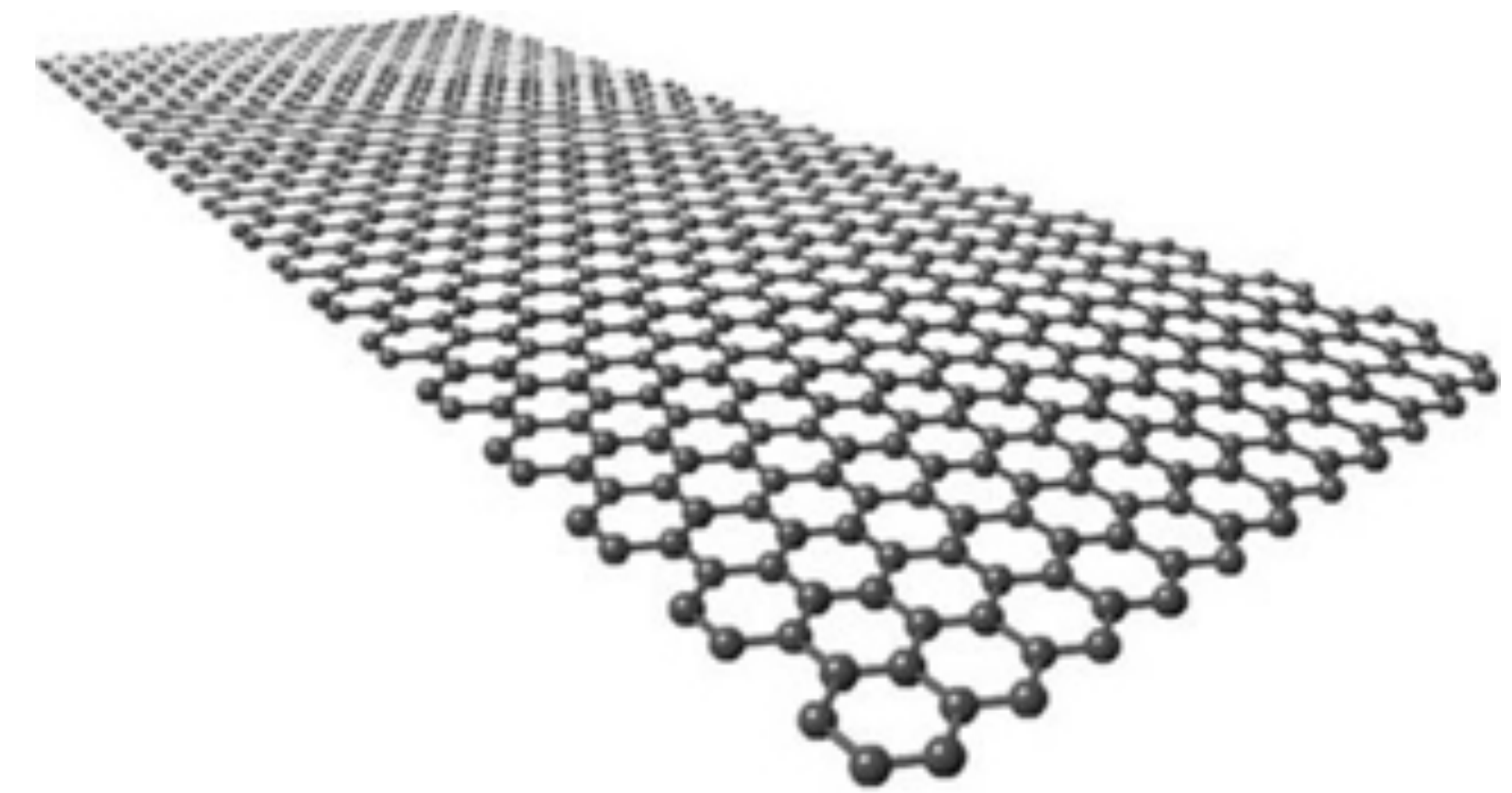


極端に細く、長い材料の実現
直径 $\sim 5\text{nm}$ 長さ $\sim 50\mu\text{m}$

➡ 一次元固体

グラフェン中の電子の流体力学的振る舞い

J. A. Sulpizio et al. Nature (2019)



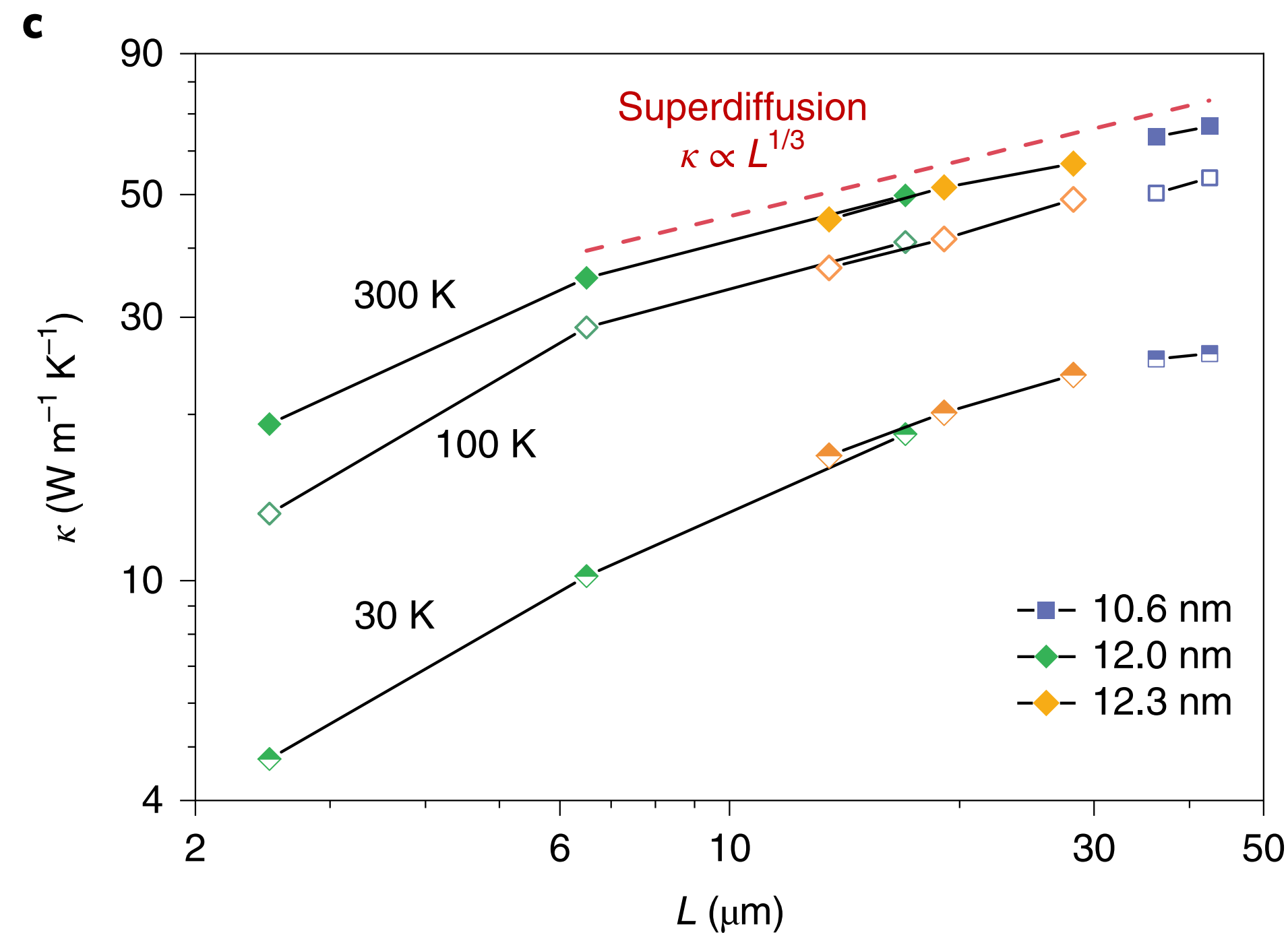
純度の高いグラフェンを実現
電子が原子核や不純物によって散
乱されず、流体的に振る舞う

➡ 二次元流体

低次元流体/固体の特徴

低次元系では、**輸送係数がシステムサイズとともに発散的に増大すること**が知られている

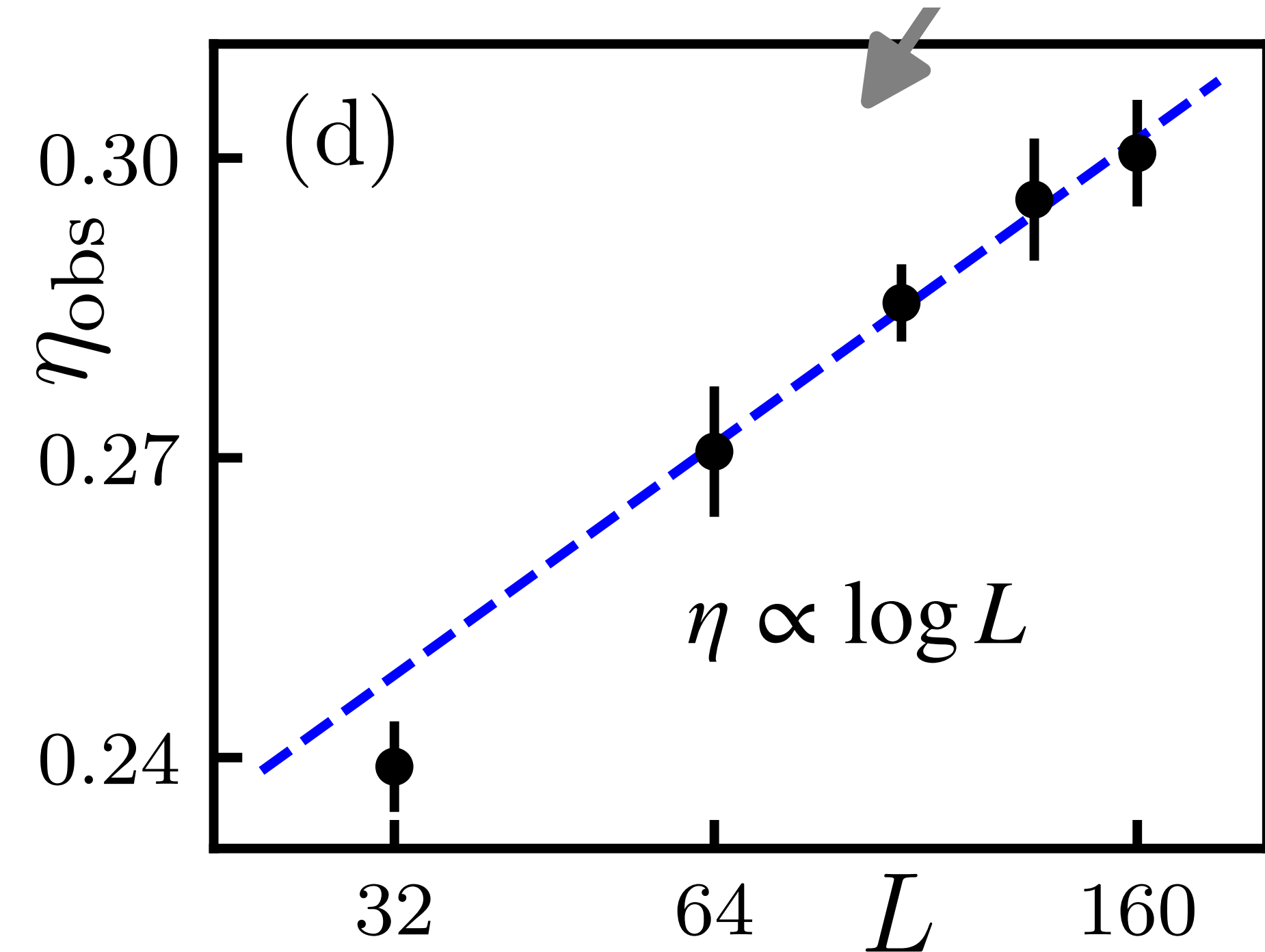
L. Yang et al. Nat. Nanotechnol (2021)



1次元ナノワイヤ

熱伝導率が $L^{1/3}$ で大きくなる
(実験的観測にも成功)

D. Forster, D. R. Nelson, and M. I. Stephen, Phys. Rev. A 16, 732 (1977)



2次元流体

粘性率が $\log L$ で大きくなる
(今後の実験に期待)

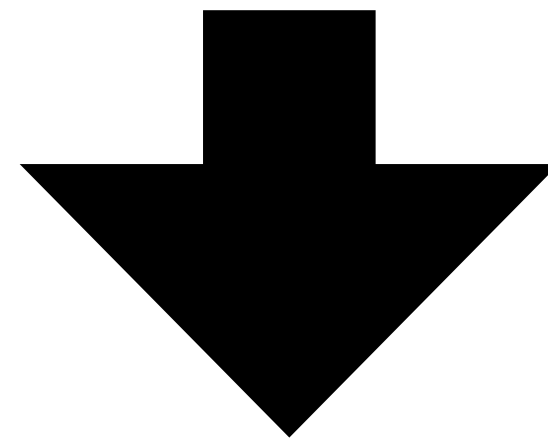
従来の流体力学

<https://www.ryutai.co.jp/shiryou/liquid/water-mitsudo-1.htm>

水の粘性係数

(大気圧下での温度依存性)

流体力学の教科書によると…
輸送係数はその流体の熱力学的な状態のみに依存する

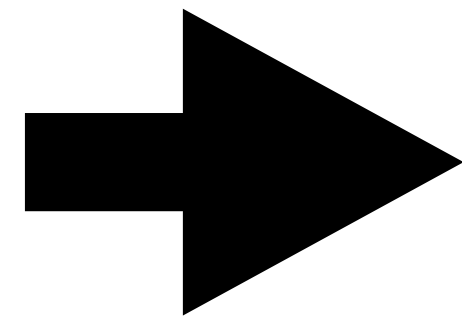


低次元固体/流体は
従来理論の範疇にない

温度	密度	粘度	音速
℃	kg/m ³	mPa・s	m/sec
4.35	999.997	1.55061	1423.09
5.0	999.993	1.51894	1426.16
6.0	999.974	1.47221	
7.0	999.938	1.42774	
8.0	999.887	1.38539	
9.0	999.821	1.34502	
10.0	999.741	1.30651	1447.95
11.0	999.647	1.26974	
12.0	999.539	1.23461	
13.0	999.418	1.20102	
14.0	999.284	1.16887	

本発表のテーマ

低次元流体を記述する流体力学は？



熱揺らぎの存在を考慮した『揺らぐ流体力学』

(1970年代から知られている)

D. Forster, D. R. Nelson, and M. I. Stephen, Phys. Rev. A 16, 732 (1977)

今回の発表では、

1. 揺らぐ流体力学とは何か？

2. 揺らぐ流体力学の定量的記述能力

H. Nakano, Y. Minami, and K. Saito,
arXiv:2502.15241 (2025)

『揺らぐ流体力学』は場の量子論と似た数学的構造を持っており、議論の中心は”繰り込み”
低次元流体力学の研究を場の量子論の専門家と共有したい

イントロダクション

揺らぐ流体力学とは

従来の流体力学

Landau and Lifshitz, “Fluid Dynamics” (1959)

流体力学：
気体や液体が示すマクロな挙動
を記述する理論的枠組み



引用元：wikipedia

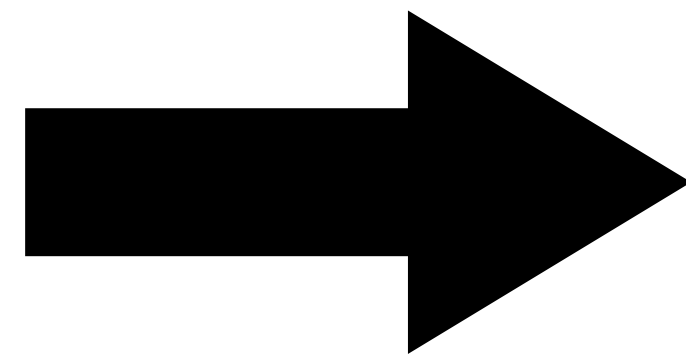
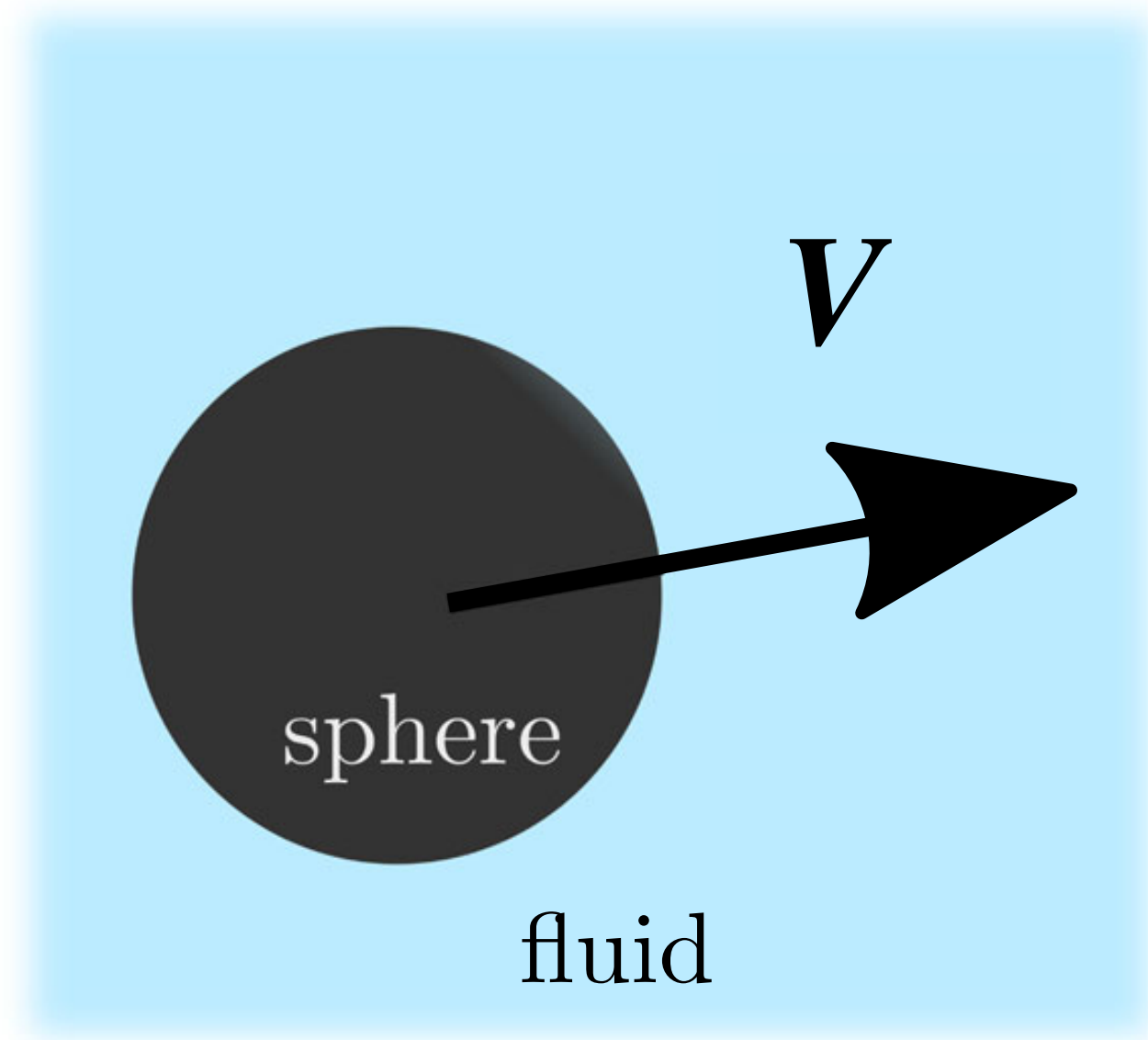
非圧縮流体のナビエ・ストークス方程式

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}$$

決定論的な連続場の方程式で現象を定量的に記述する

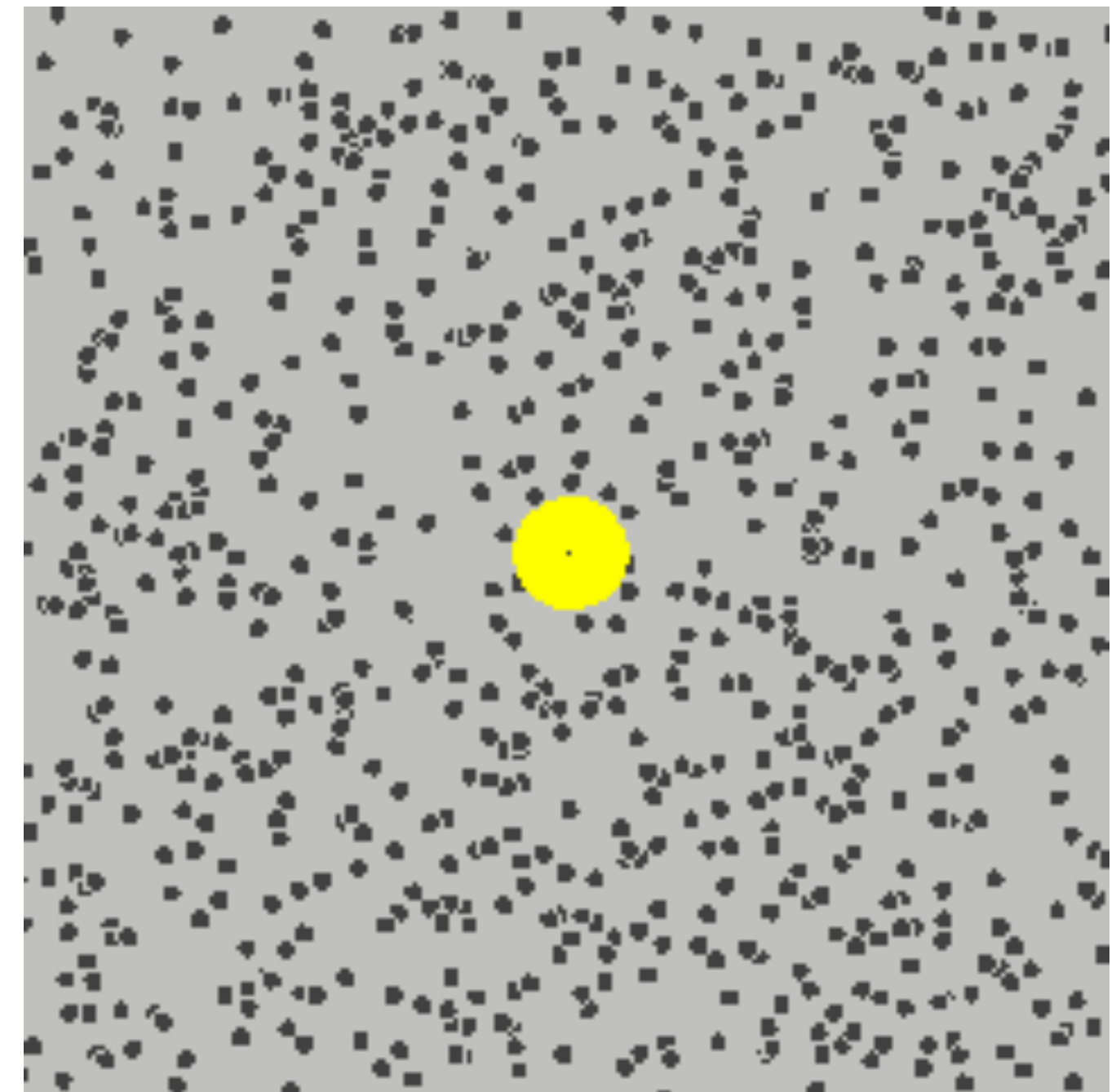
揺らぐ流体力学とは：アイデア

流体中に大きな球を置く



球のサイズを
小さくしていく

引用元：wikipedia

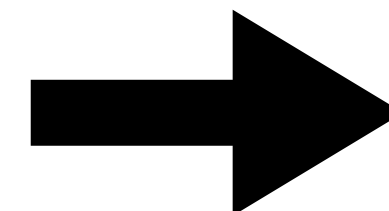


$$F = -\gamma V \quad \text{ストークス抵抗}$$

ブラウン運動

$$F = -\gamma V + \sqrt{2\gamma k_B T} \xi(t)$$

流体を構成する原子・分子のランダムな衝突



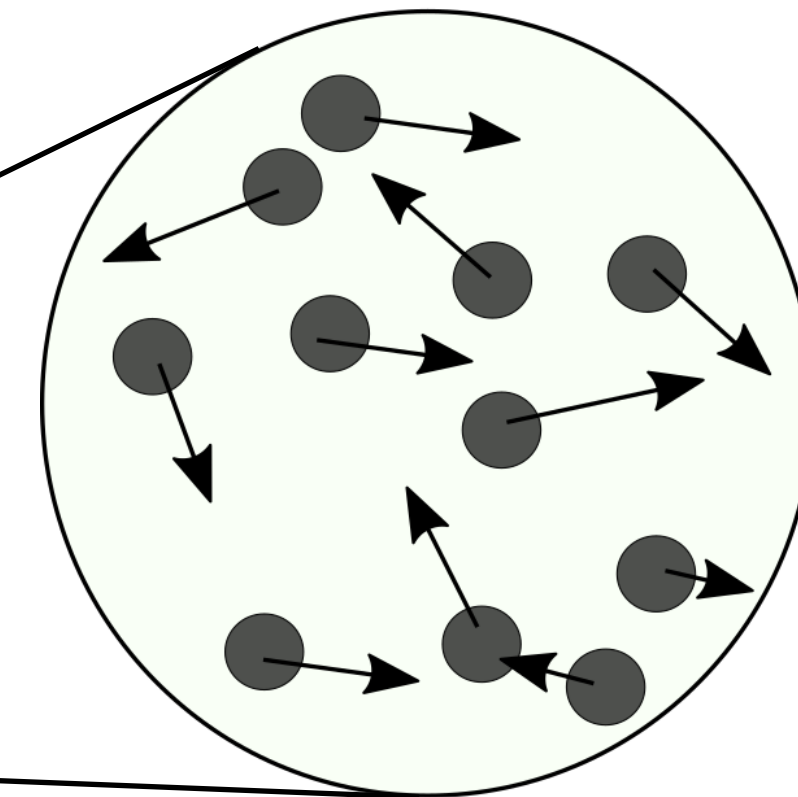
確率的な力が導入される

流体力学と熱揺らぎ

Landau and Lifshitz, "Fluid Dynamics" (1959)



拡大



引用元：wikipedia

流体が原子・分子から構成されている以上、その熱運動の効果は避けられない

Landau and Lifshitzの揺らぐ流体力学

Landau and Lifshitz, "Fluid Dynamics" (1959)

この揺らぎの効果はランジュバン方程式的に拡張すれば、取り込める

揺らぐナビエ・ストークス方程式 $\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{\Pi}^{\text{ran}}$

$\mathbf{v}$: 揺らぐ速度場

1. 空間一様等方
2. 運動量が保存量
3. ガウシアン白色ノイズ
4. 揺動散逸関係を満たす $\longrightarrow$ 散逸 η_0 に対応してノイズ項を導入

$$\langle \mathbf{\Pi}^{\text{ran}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{\Pi}^{\text{ran}}(\mathbf{r}', t') \rangle = 2k_B T \eta_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \\ \times [\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc} - \delta_{ab} \delta_{cd}]$$

揺らぐ流体力学は決定論的流体力学の自然な拡張であり、次元に依存せずに存在する

揺らぐ流体力学の特徴

むしろ、決定論的流体力学は揺らぐ流体力学の熱揺らぎが無視できる極限

揺らぐ流体力学の数学的構造は決定論的流体力学より場の量子論に似ている

	決定論的流体力学	揺らぐ流体力学	場の量子論
揺らぎの有無	決定論的場の理論	揺らぐ場の理論	揺らぐ場の理論

結合定数・質量



粘性係数

UVカットオフ



原子・分子の
長さスケール

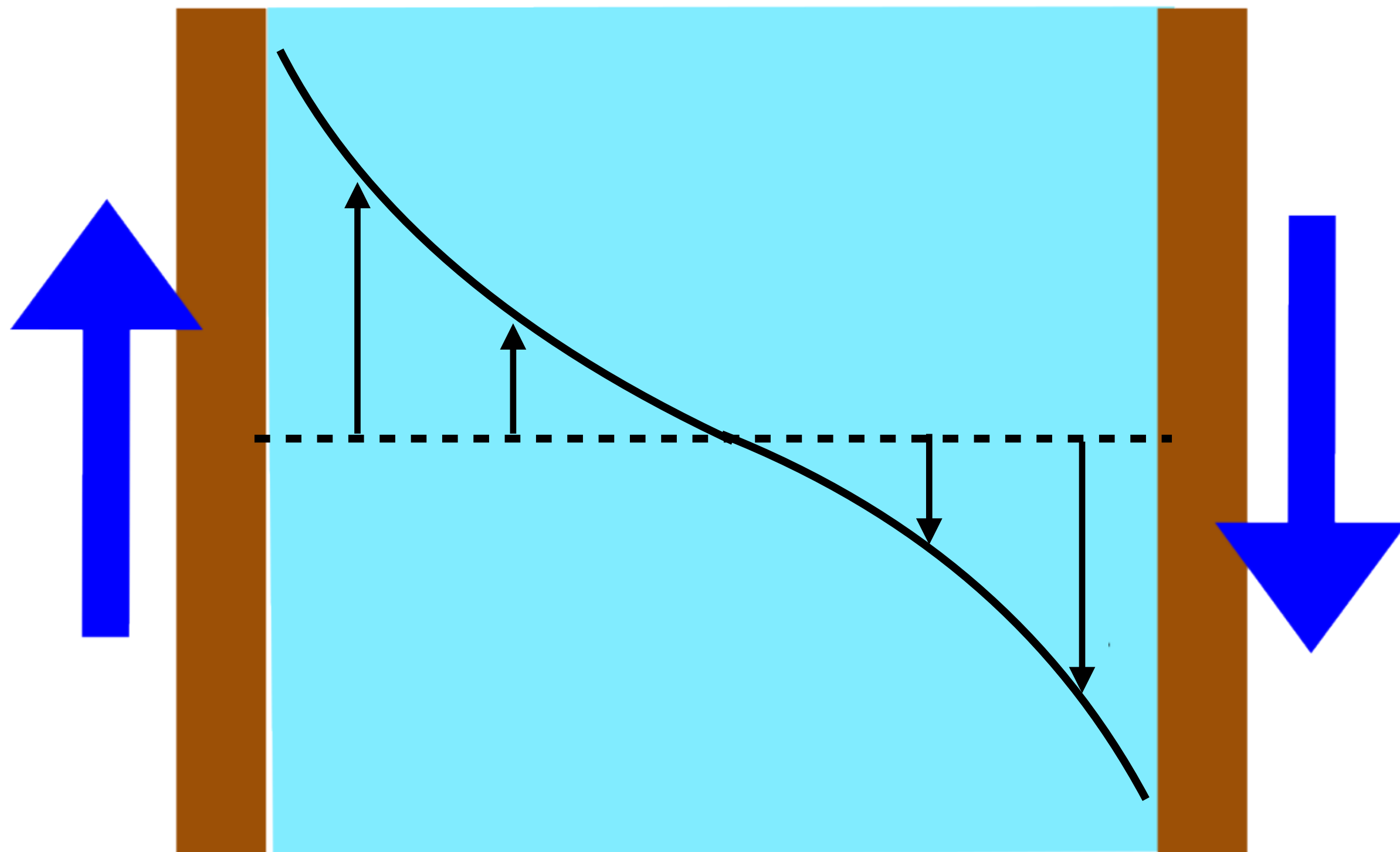
量子揺らぎ



熱揺らぎ

揺らぐ流体力学の
議論の中心は”繰り込み”

壁に挟まれた流体



以下では

1. 低次元流体の文脈で、揺らぐ流体力学のような解析が行われているか？
2. その解析が“繰り込み”との戦いであることについて具体例を挙げて紹介する。

実際の応用例に近い

二枚の平行な固体壁に挟まれた流体
に注目する

H. Nakano, Y. Minami, and K. Saito, arXiv:2502.15241 (2025)

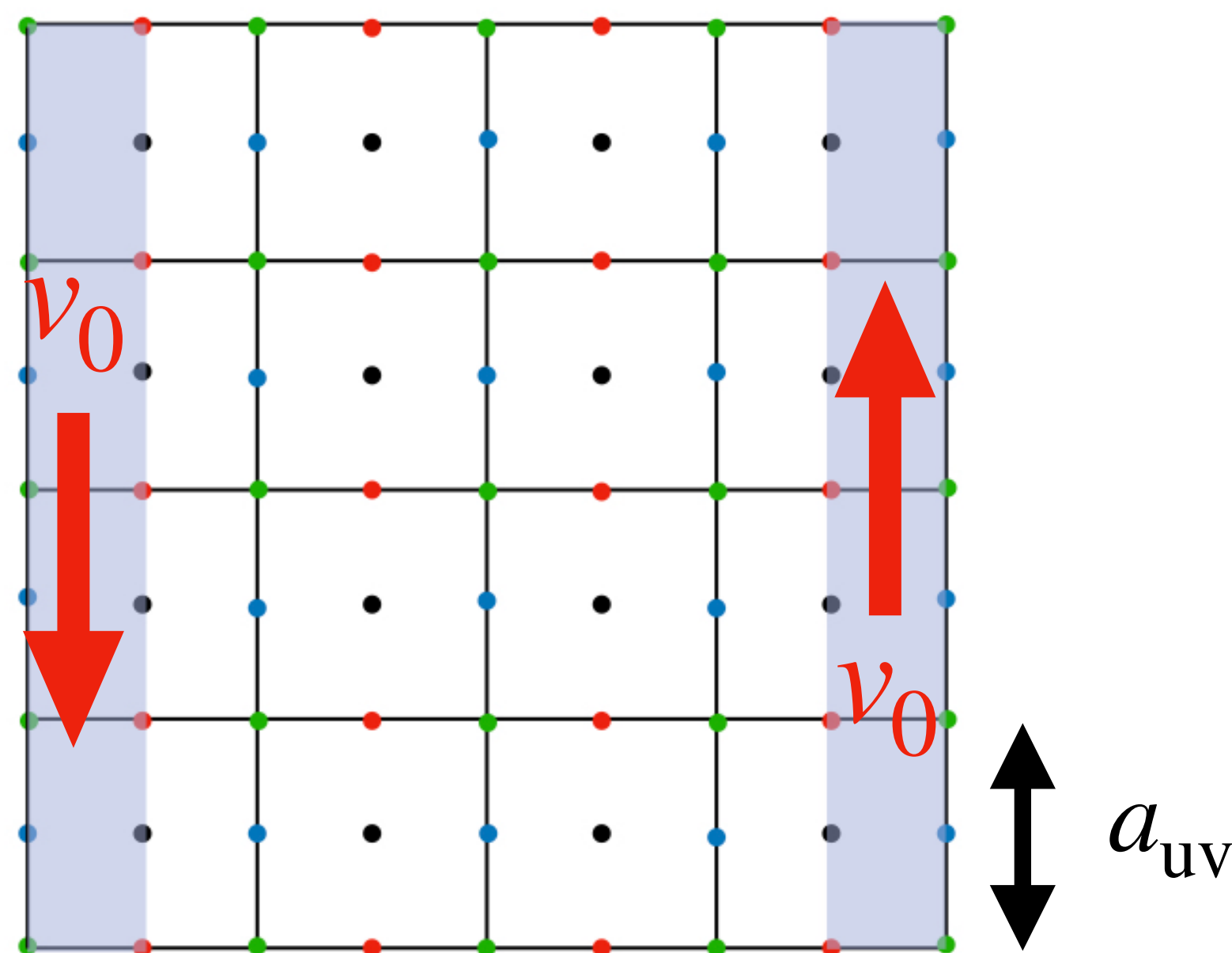
揺らぐ流体と決定論流体の違い

“繰り込み”がどう現れるか？

揺らぐ流体シミュレーション

I. Srivastava et al. Phys. Rev. E **107**, 015305 (2023)

揺らぐナビエ・ストークス方程式 $\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{\Pi}^{\text{ran}}$



▶ 実空間を正方格子に離散化し、数値計算を行う

- ・ denseな2次元流体に注目する
- ・ 空間のメッシュサイズ a_{uv} : 理論のUVカットオフ長

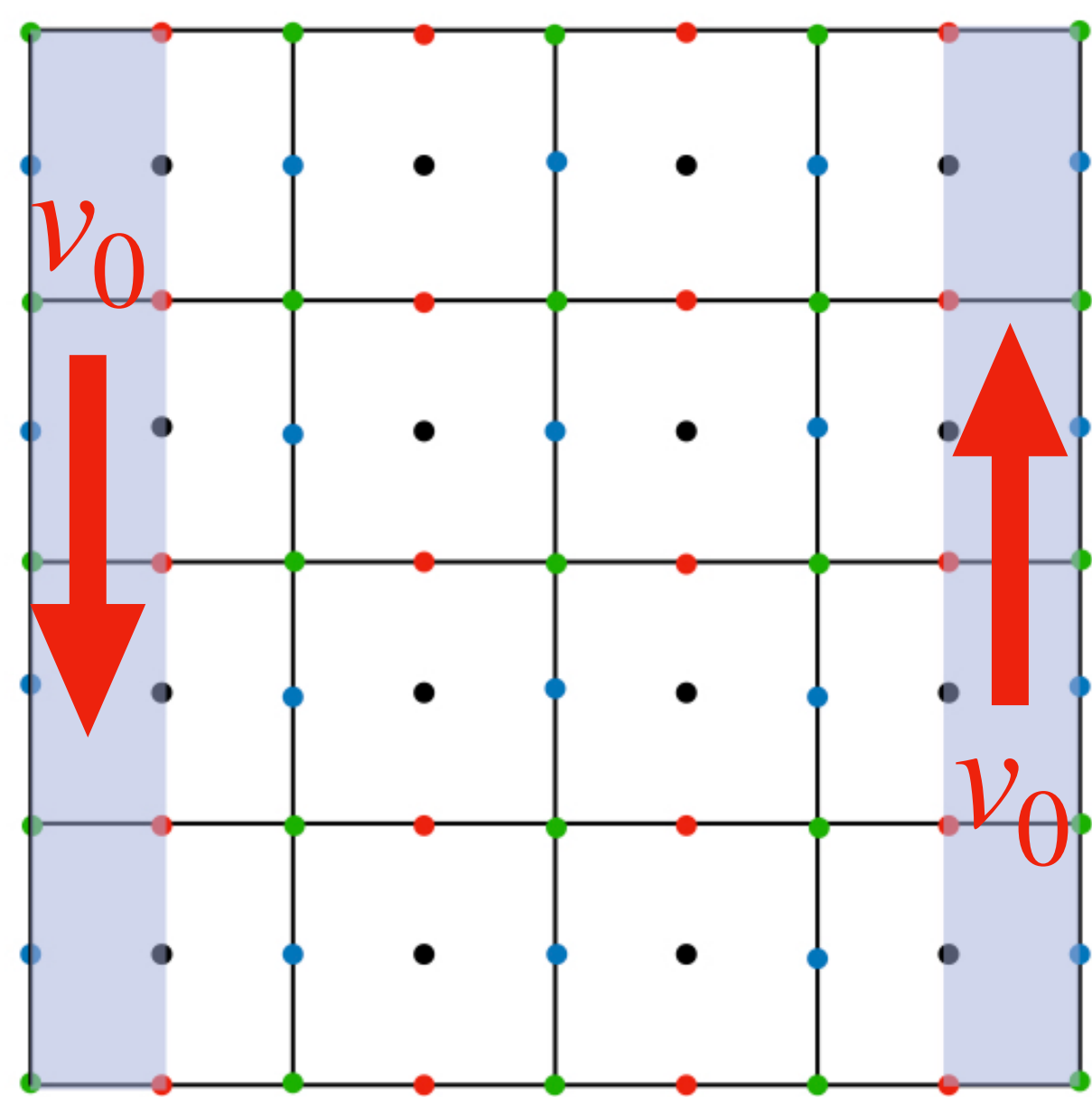
▶ 固体壁は境界条件で与える

- ・ no-slip境界条件を課す $\tilde{\mathbf{v}} = (0, \pm v_0)$

ノイズレスの決定論的流体力学と比較しながら、結果を紹介する

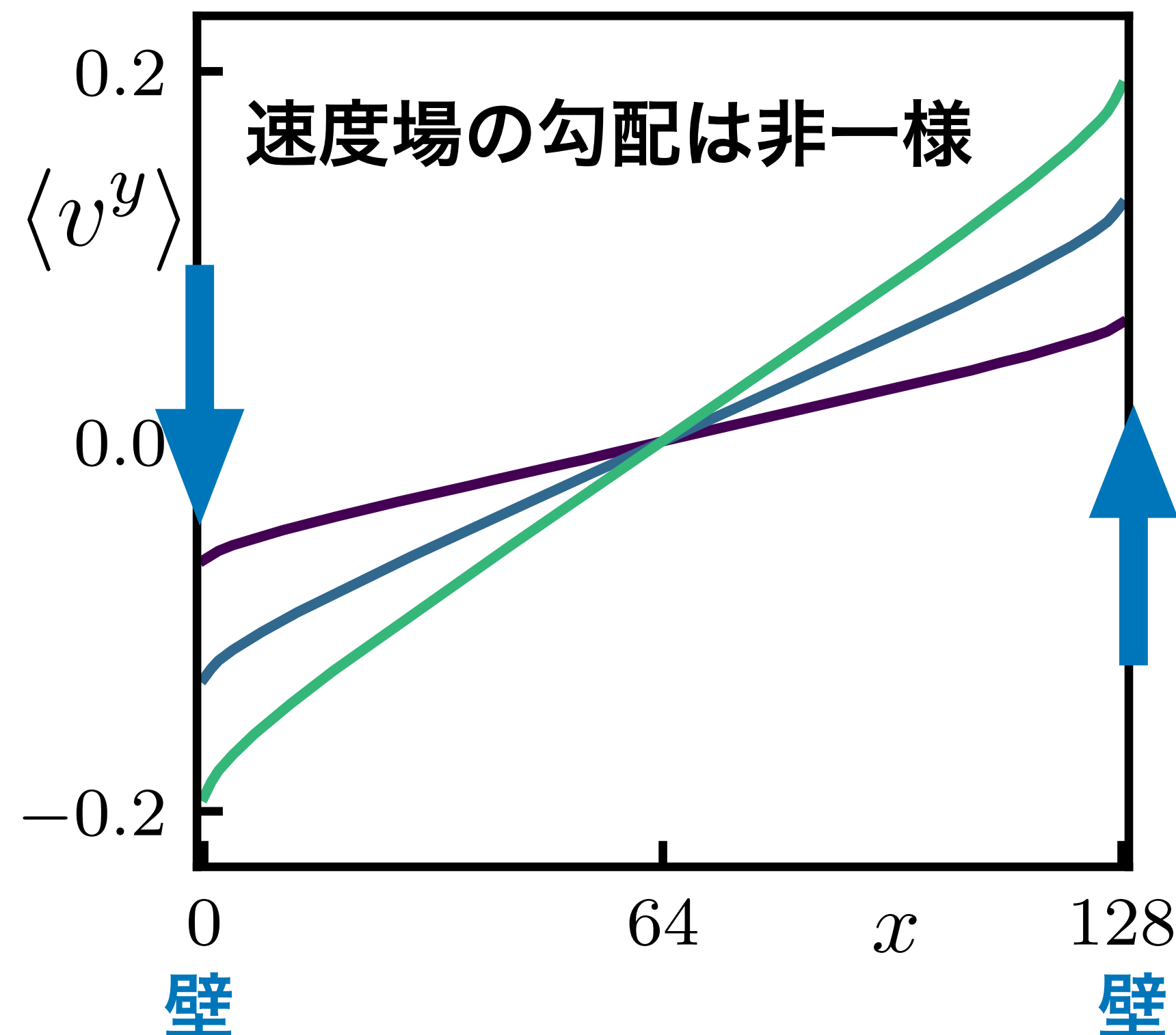
定常状態での速度場

定常状態での速度場の観測結果

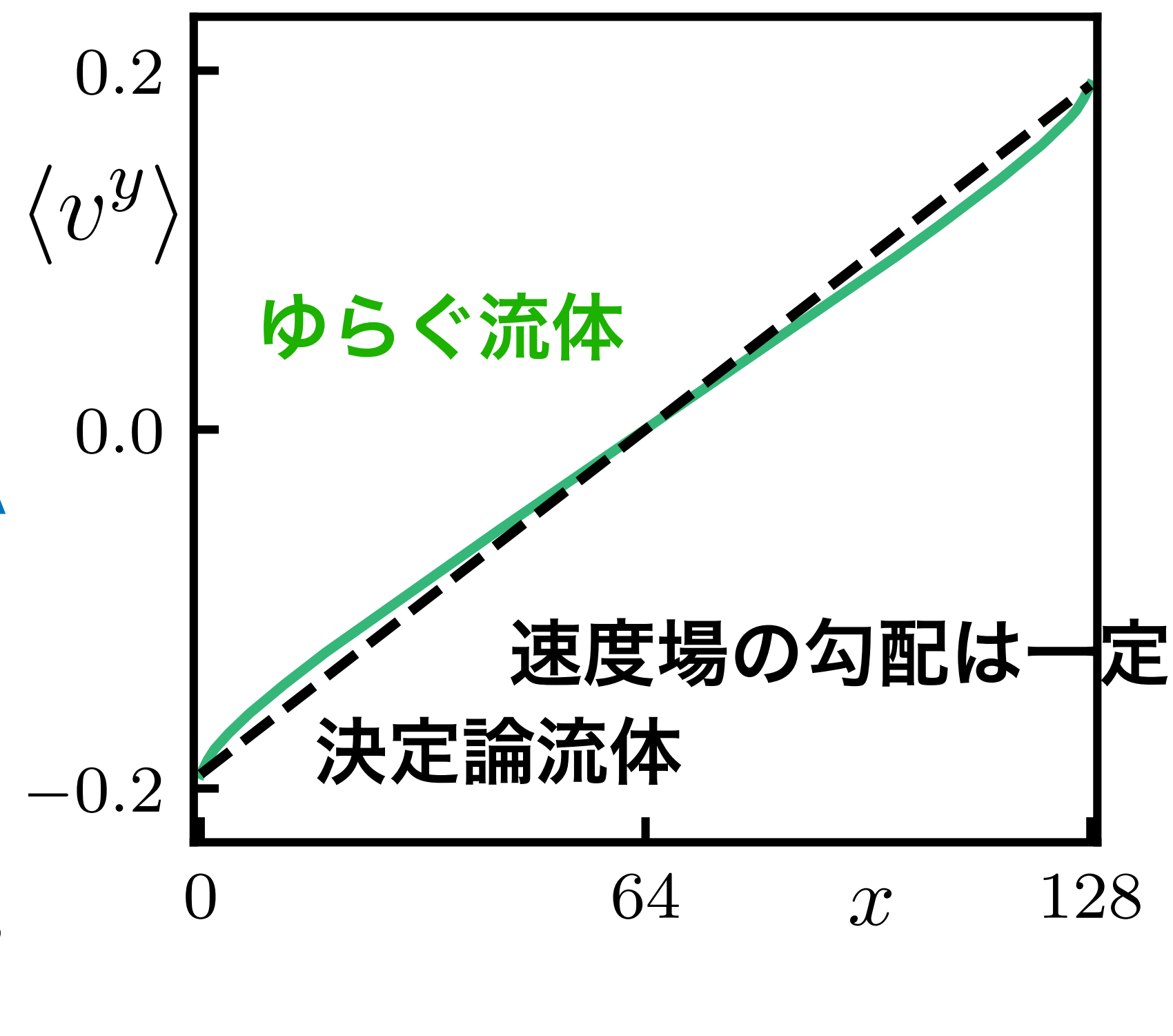


no-slip境界条件を課す

$$\tilde{\mathbf{v}} = (0, \pm v_0)$$



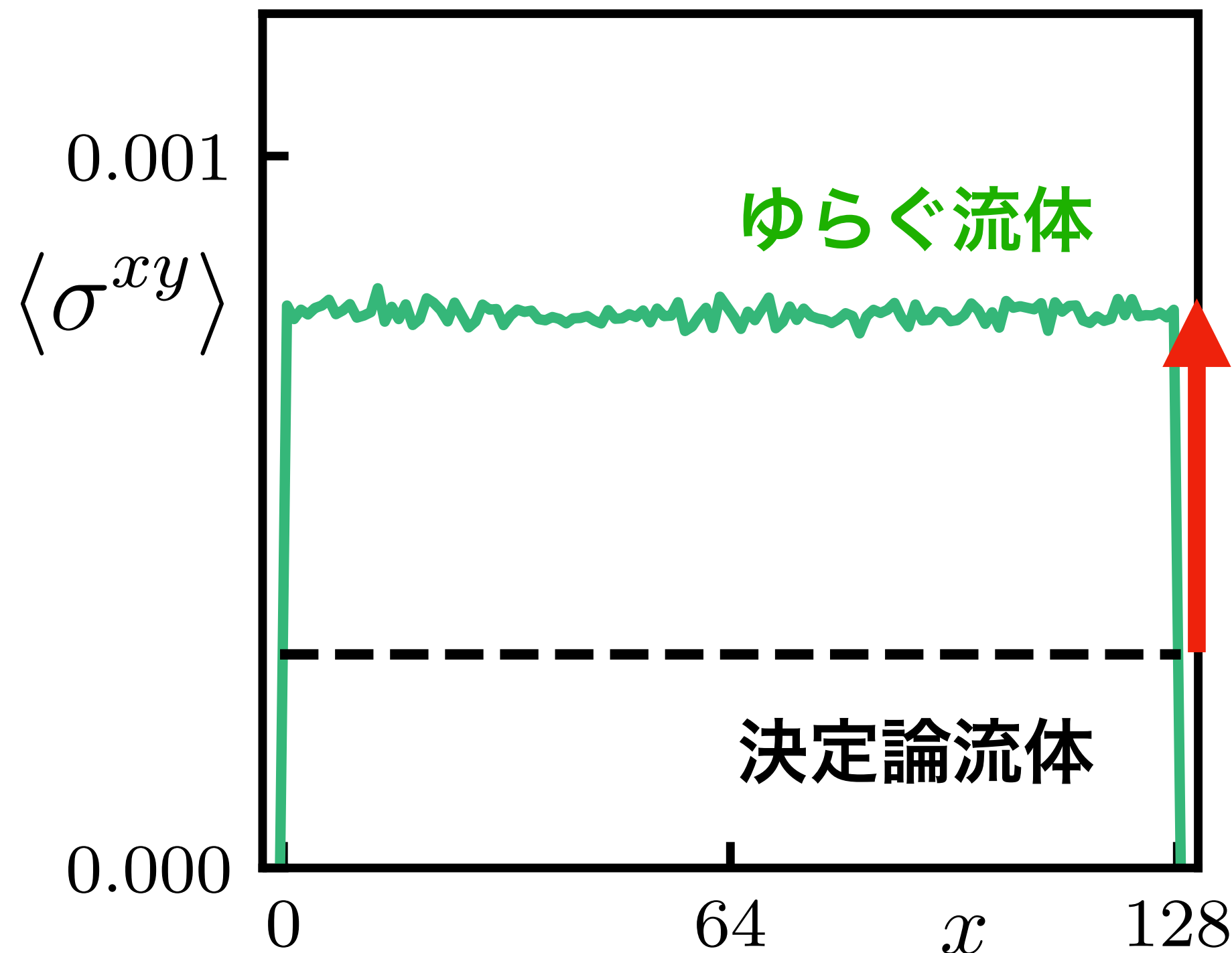
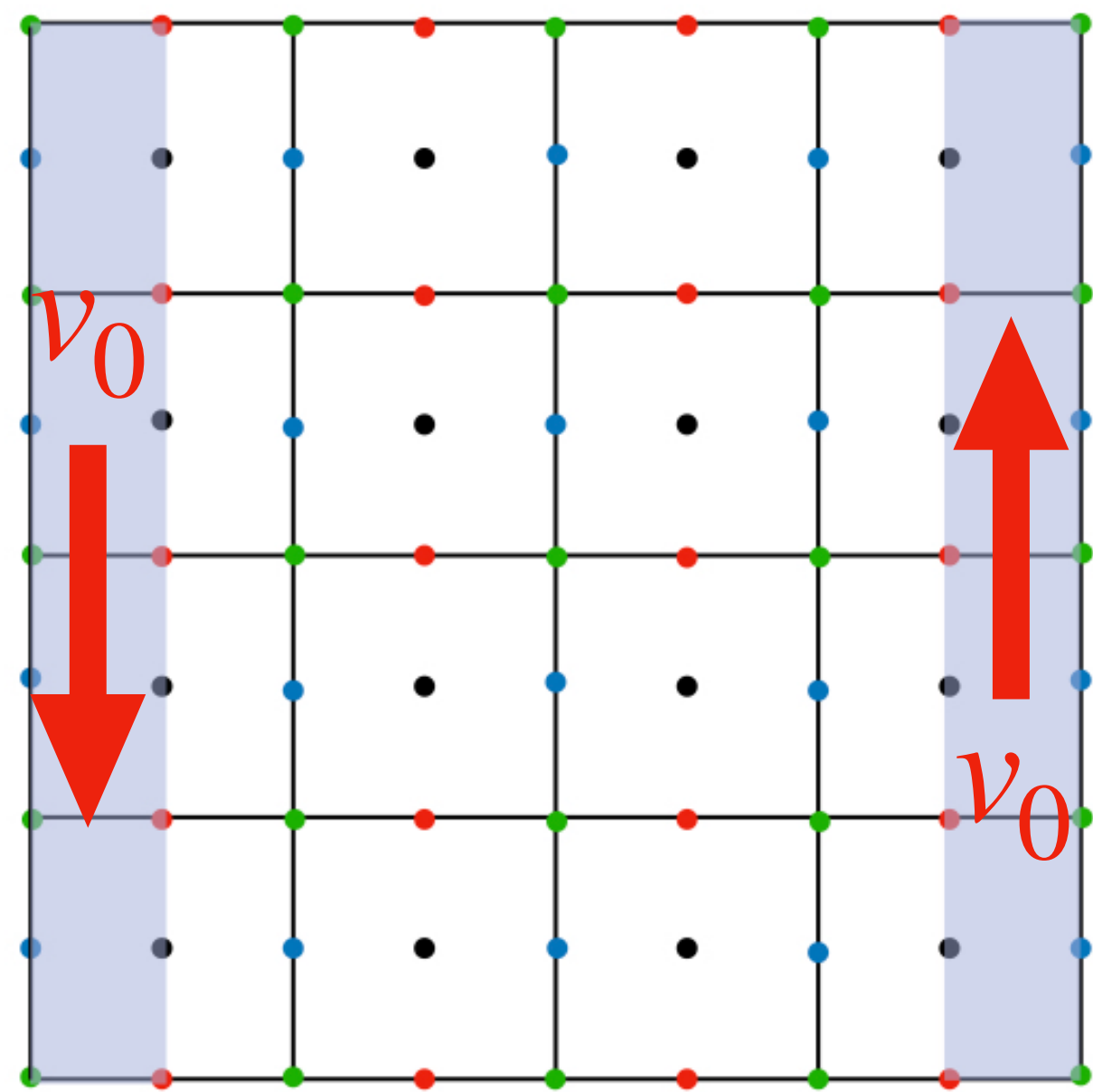
速度場の勾配は非一様



簡単なセットアップでさえ、
揺らぐ流体力学は決定論流体力学とは異なる予言を導く

定常状態でのせん断応力

定常状態のせん断応力の観測



揺らぎによる補正
が存在

ナビエ・ストークス方程式は
運動量保存則の形で書き直すことができる

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad (i, j = x, y)$$

せん断応力（流体に働く力）が定義される

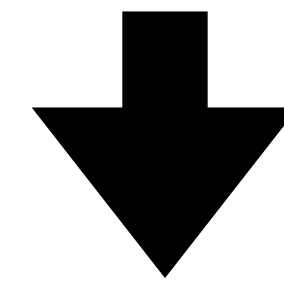
$$\langle \sigma_{xy} \rangle = \underline{-\rho_0 \langle v_x v_y \rangle} + \eta_0 \left(\partial_x \langle v_y \rangle + \partial_y \langle v_x \rangle \right)$$

粘性係数の繰り込み補正

速度場やせん断応力の観測結果は、粘性係数の繰り込みによって理解できる

揺らぐ流体力学におけるせん断応力

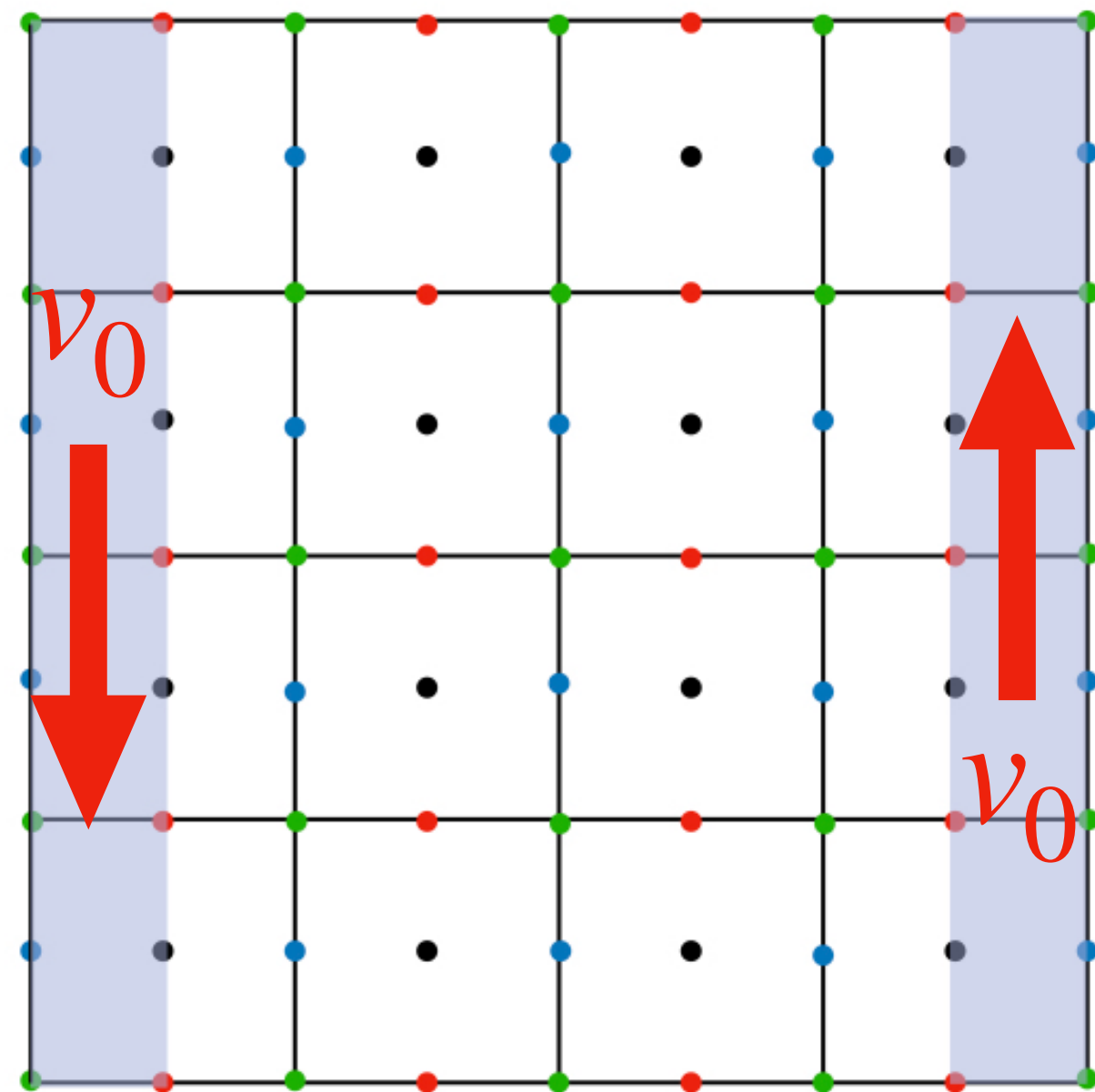
$$\langle \sigma_{xy} \rangle = - \underline{\rho_0 \langle v_x v_y \rangle} + \eta_0 \left(\partial_x \langle v_y \rangle + \partial_y \langle v_x \rangle \right)$$



測定量としての粘性係数

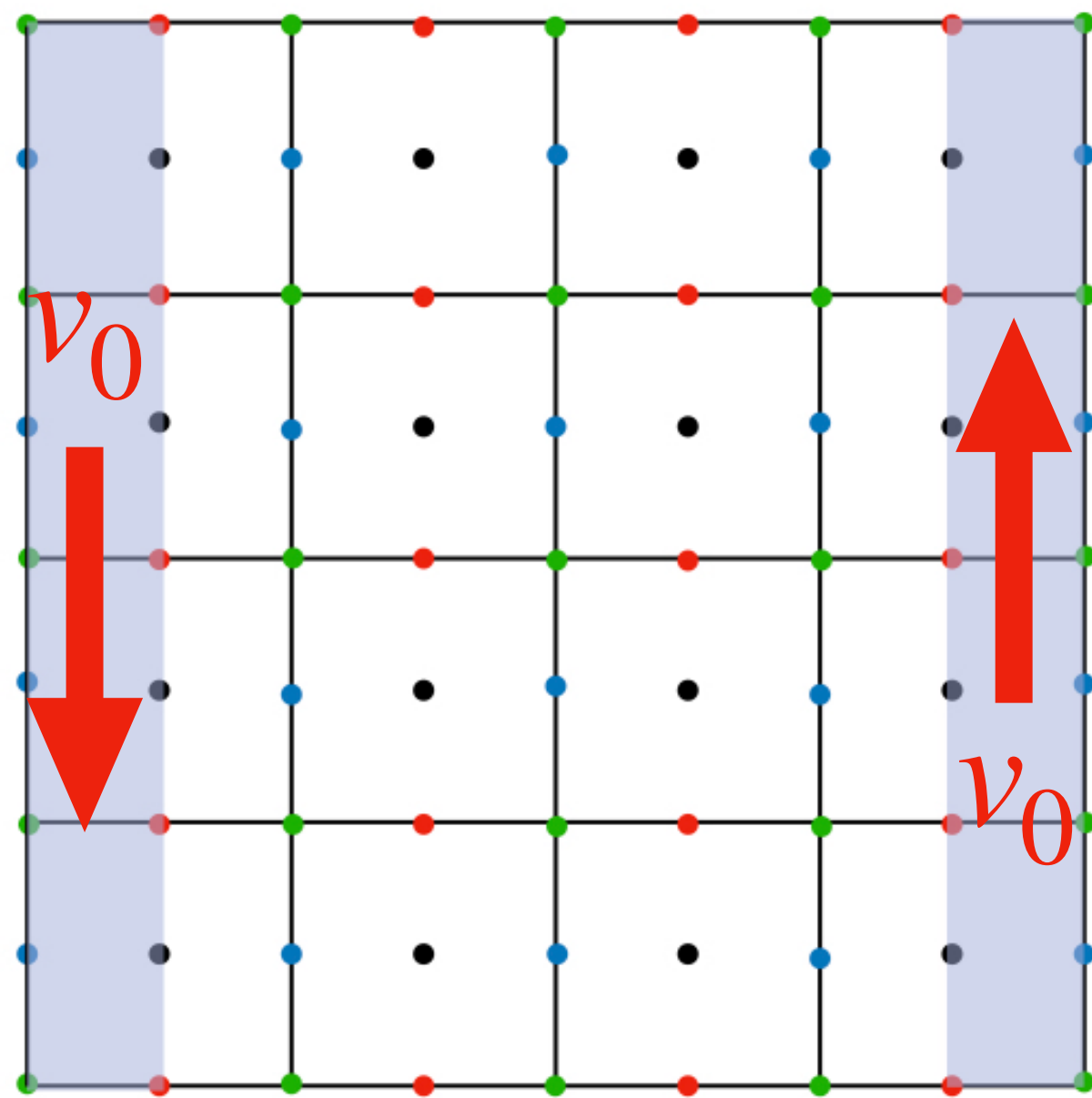
$$\langle \sigma_{xy} \rangle = \eta_R \left(\partial_x \langle v_y \rangle + \partial_y \langle v_x \rangle \right)$$

測定される粘性係数は、非線形項の効果が繰り込まれた有効的な係数となる



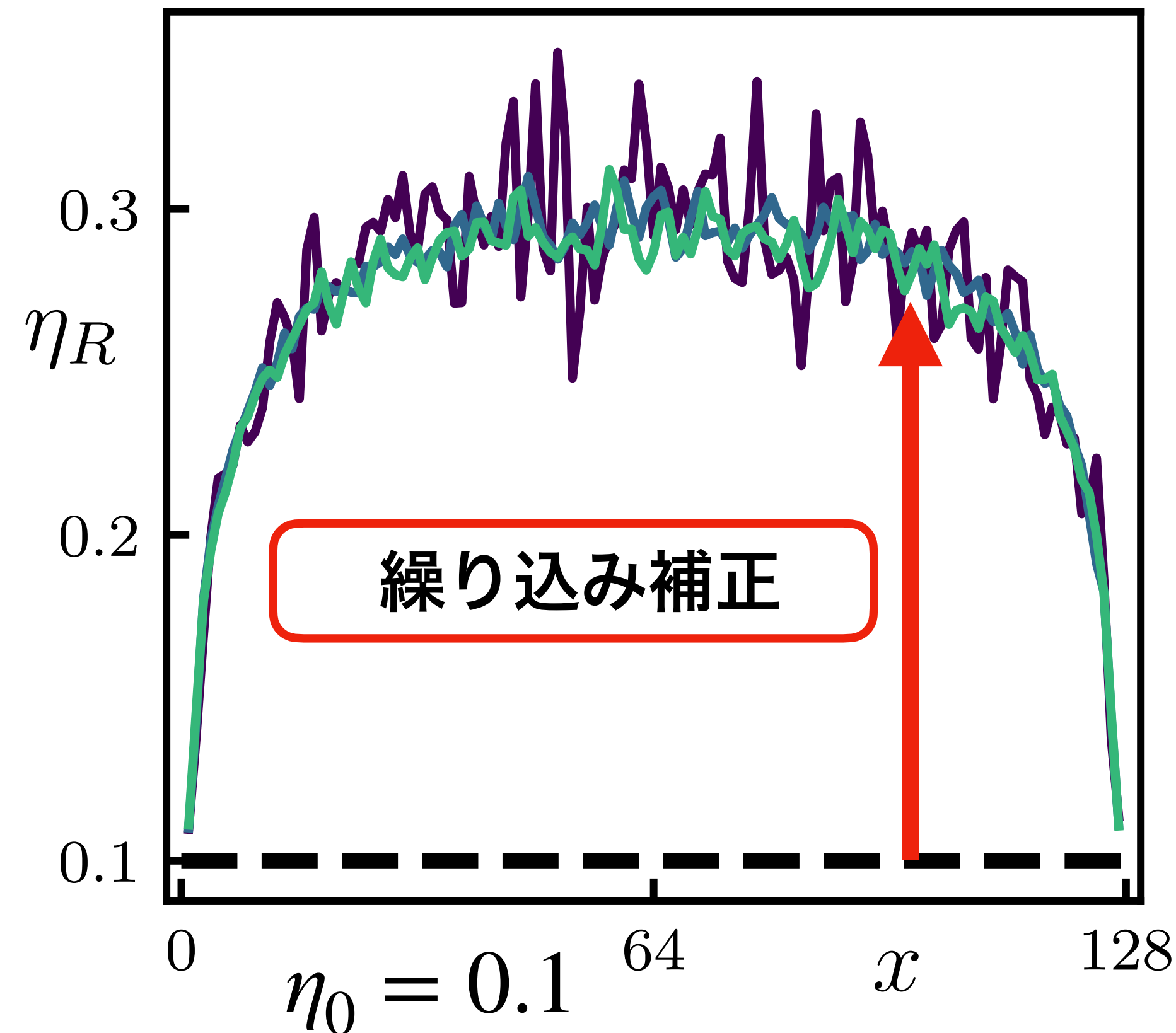
測定される粘性係数の位置依存性

速度場やせん断応力の観測結果は、粘性係数の繰り込みによって理解できる

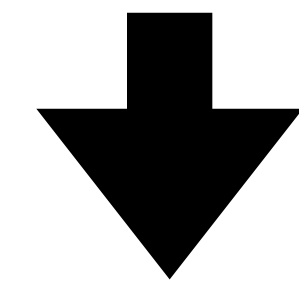


no-slip境界条件を課す

$$\tilde{\mathbf{v}} = (0, \pm v_0)$$



速度場は固体壁直上では
全く揺らがない

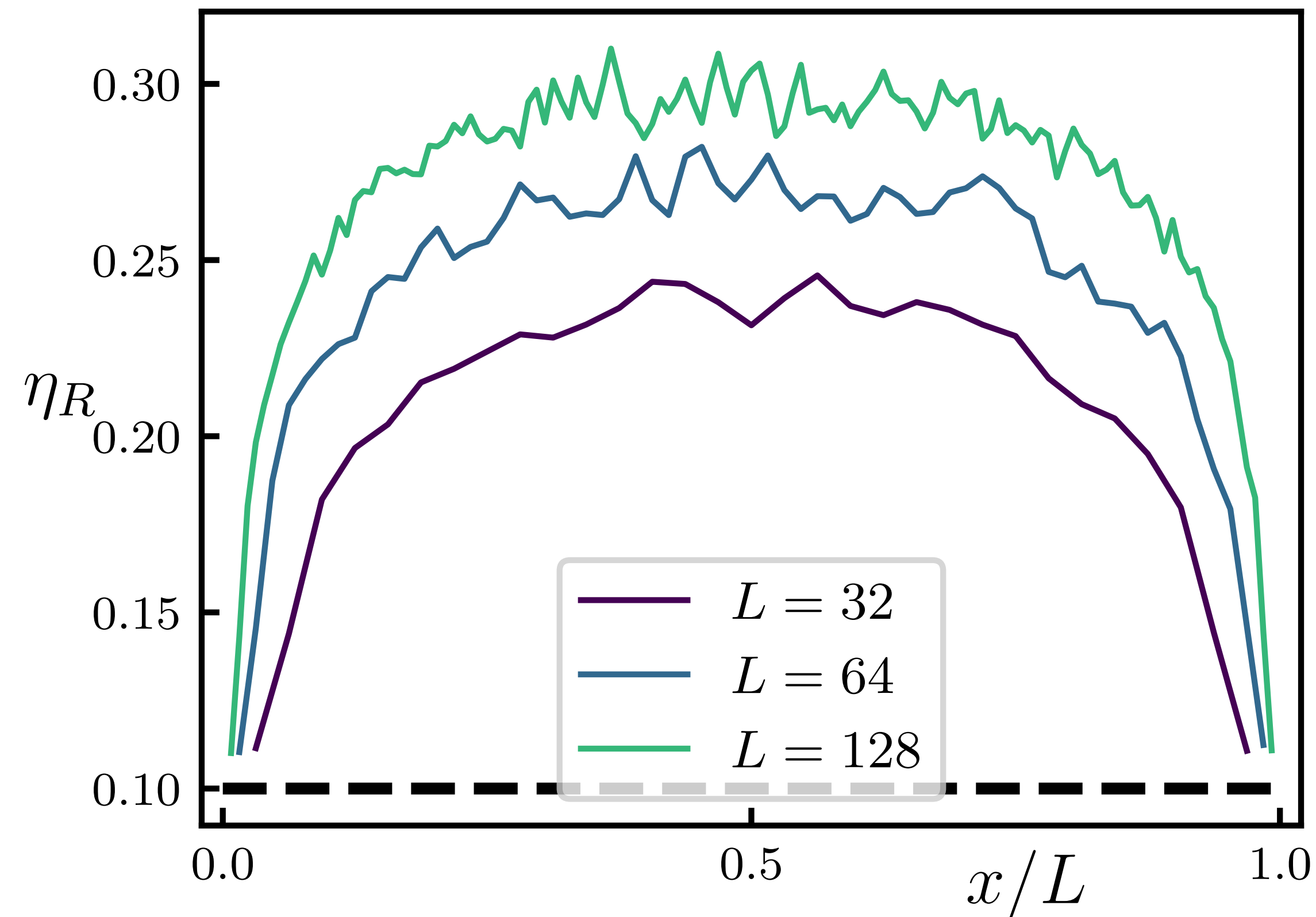
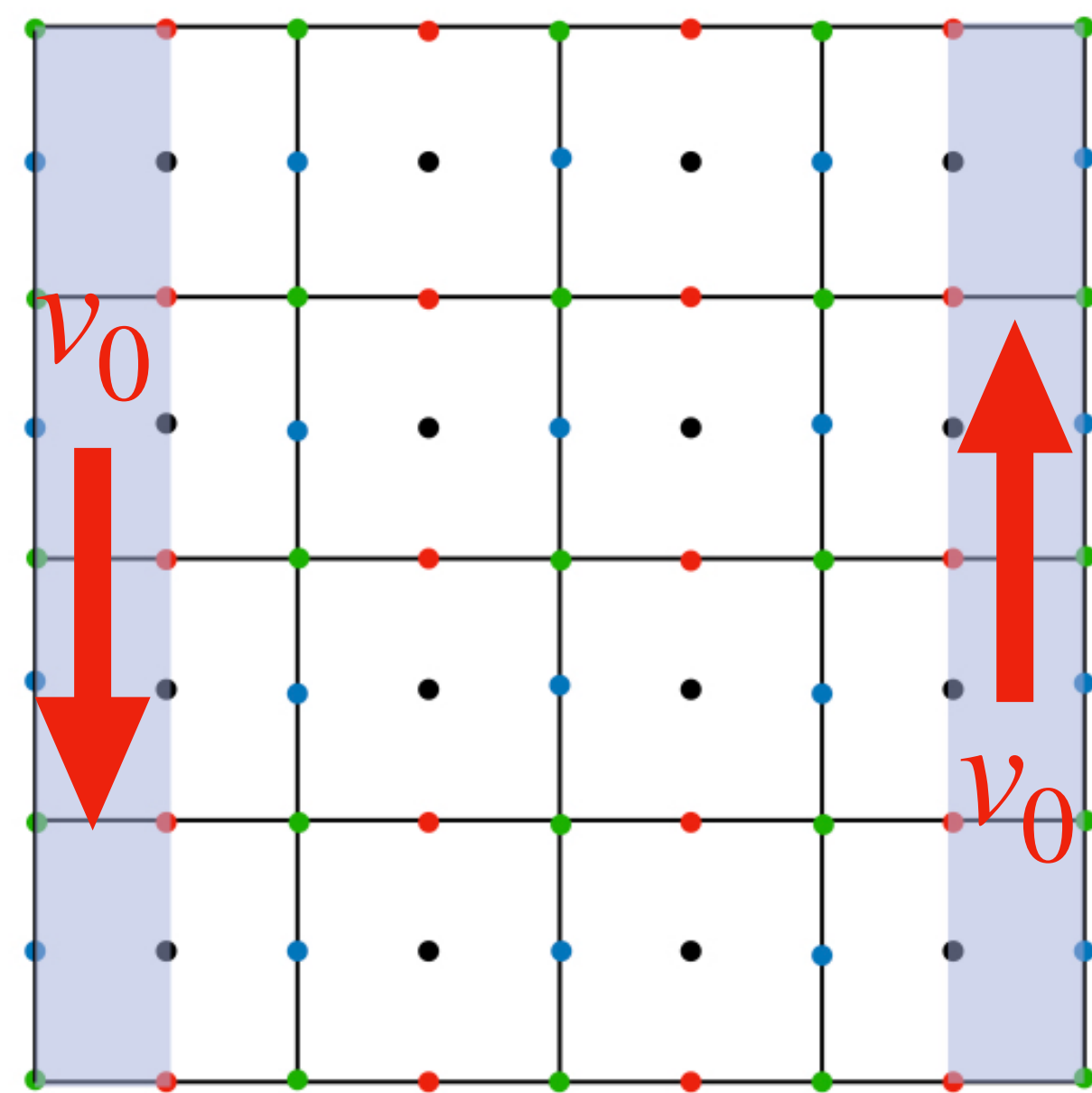


繰り込み補正の大きさは
固体壁からの距離に依存し
固体壁直上では0となる

境界（固体壁）の存在のために、複雑な繰り込み補正が現れる

測定される粘性係数のシステムサイズ依存性

低次元流体では、粘性係数の繰り込みにIR発散が見られる



固体壁から離れると
システムサイズ
とともに大きくなる

固体壁近傍では
システムサイズ依存性
はない

繰り込み補正のIR発散が実験的な観測量となる

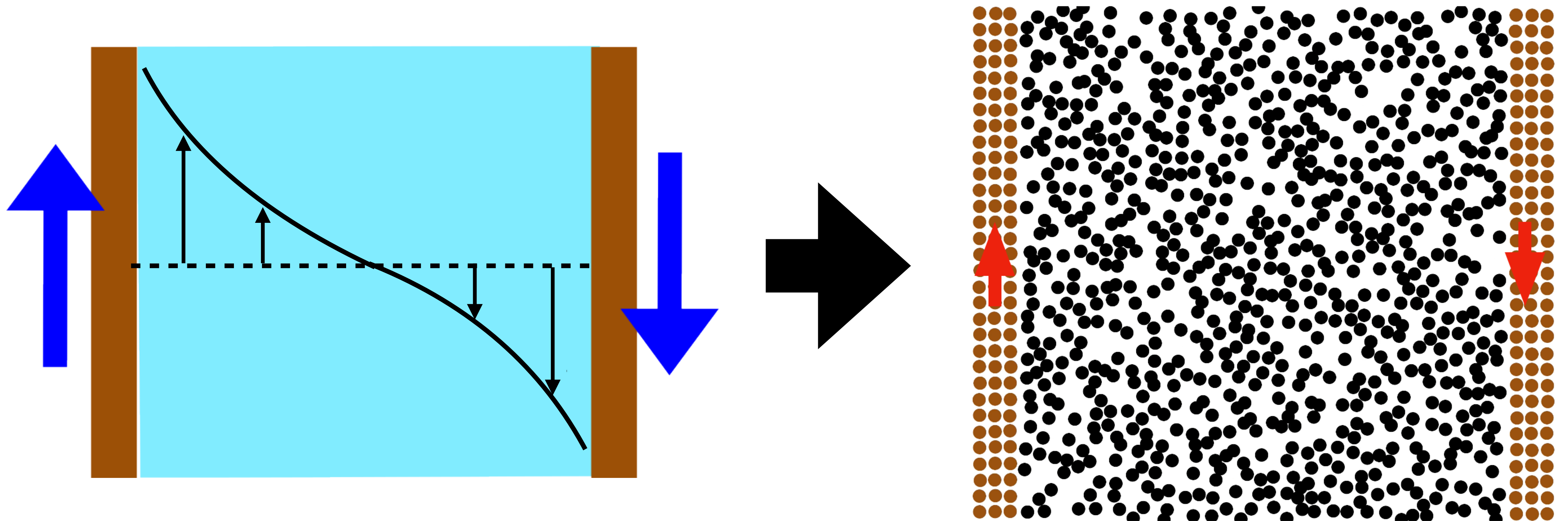
低次元固体/流体の中心テーマ：IR発散の定量的予言

揺らぐ流体力学の精度

揺らぐ流体力学は正しいのか？

流体のミクロモデル

流体はミクロに見えると、原子からできている



分子動力学シミュレーション

流体の運動を原子や分子から再現

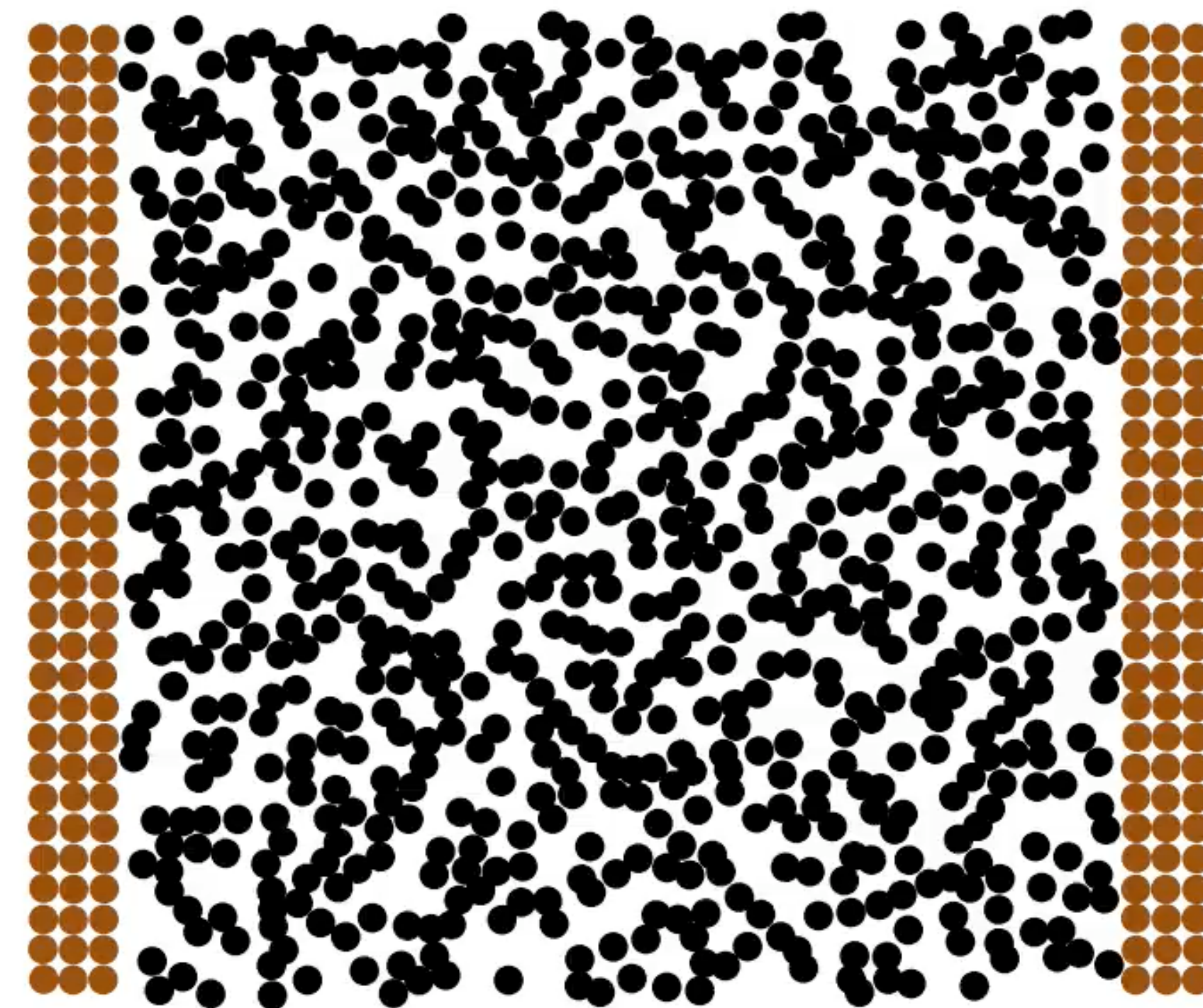
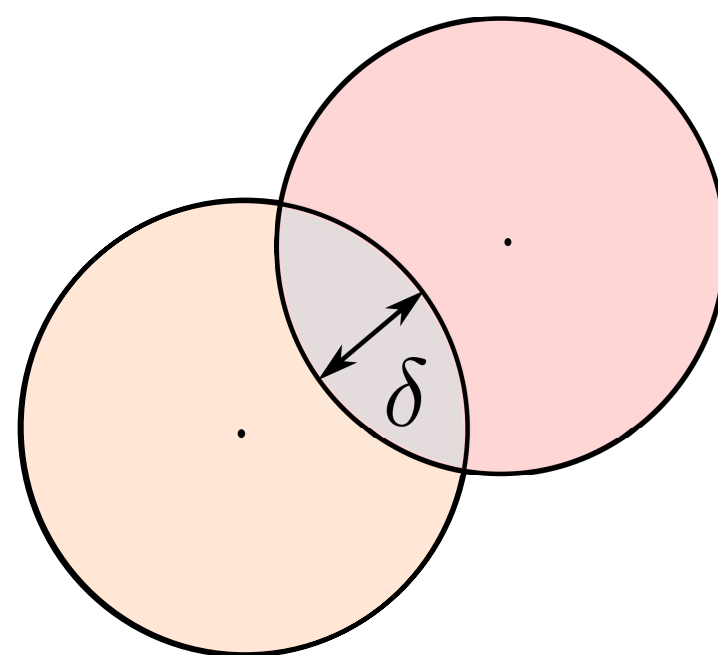
▷ ハミルトンの運動方程式（古典力学）

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\mathbf{p}_i}{m} \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}$$

▷ 非調和反発ポテンシャル

$$V(r) = \frac{k}{2}\delta^4 \quad \text{for } \delta > 0$$

$$V(r) = 0 \quad \text{for } \delta \leq 0$$



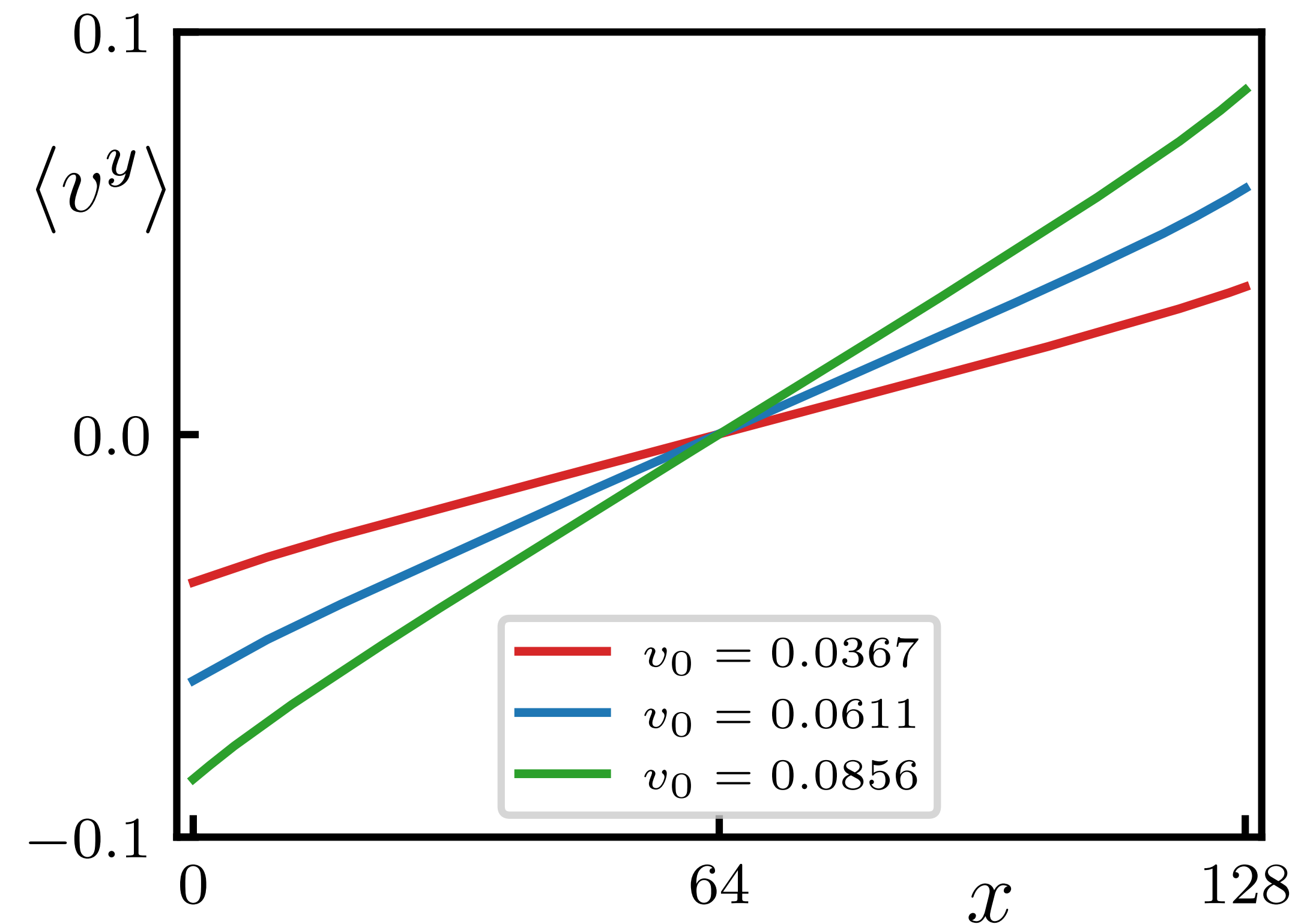
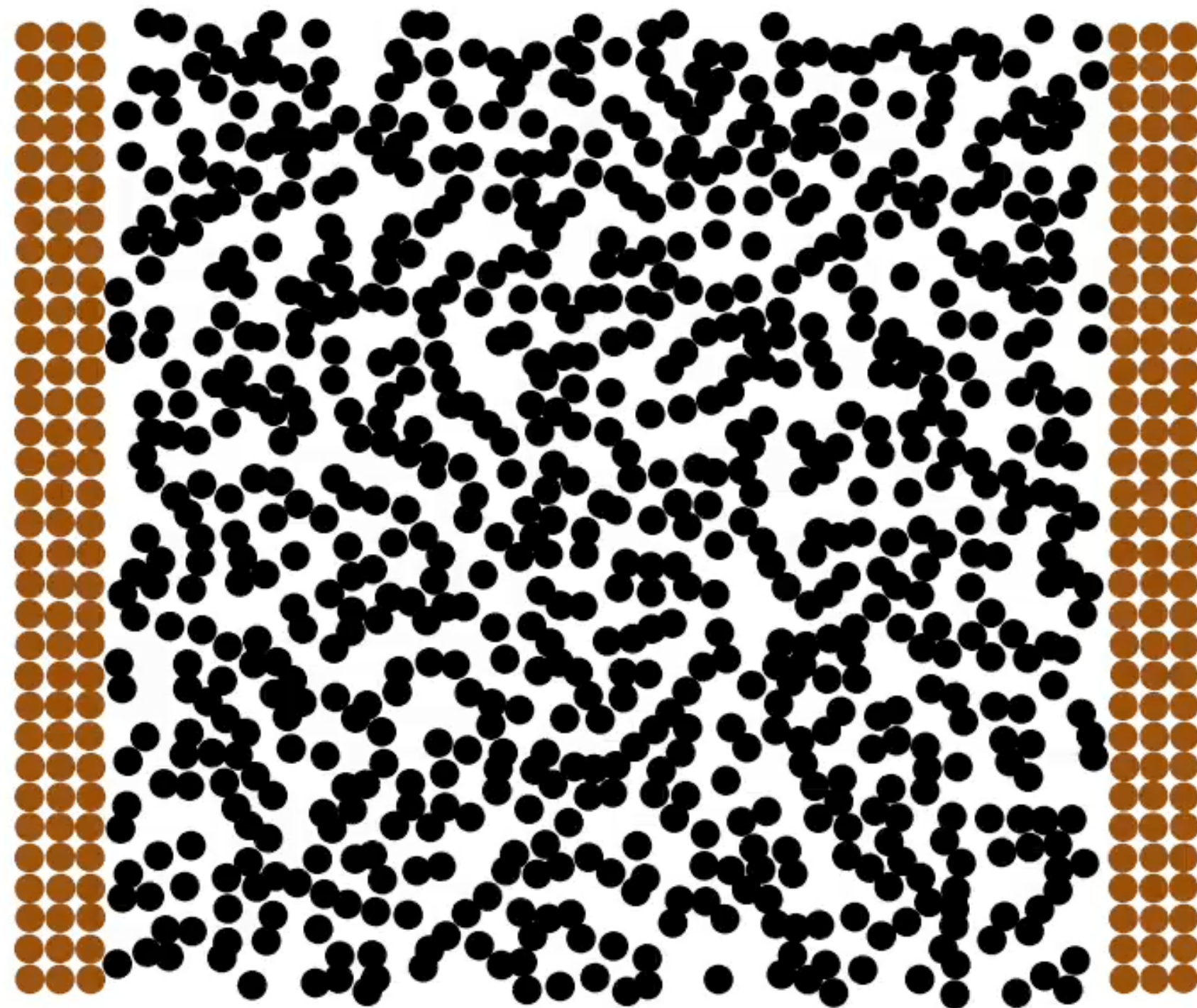
▷ 固体壁を構成する粒子

正方格子 + ランジュバン熱浴

▷ 単位

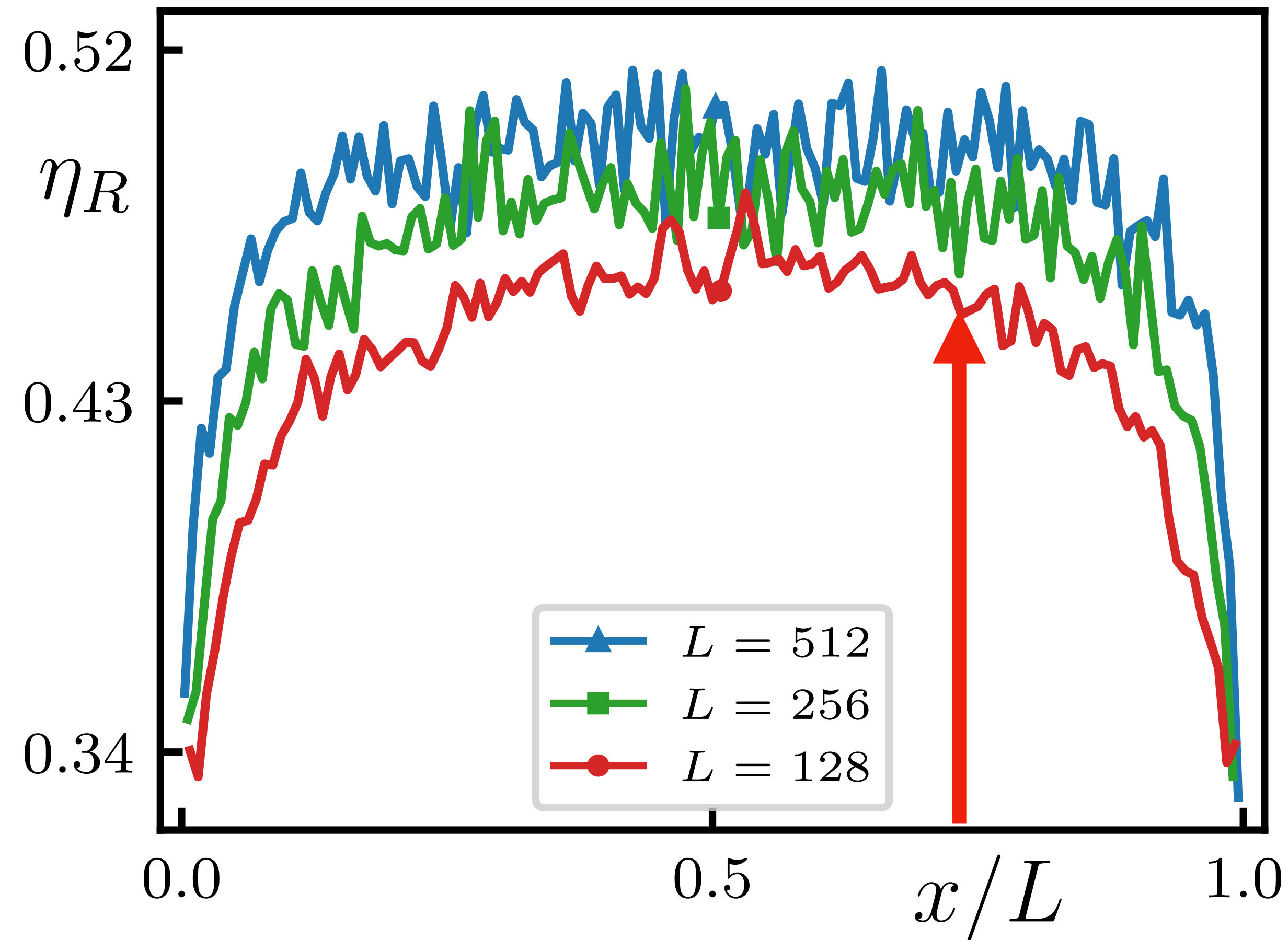
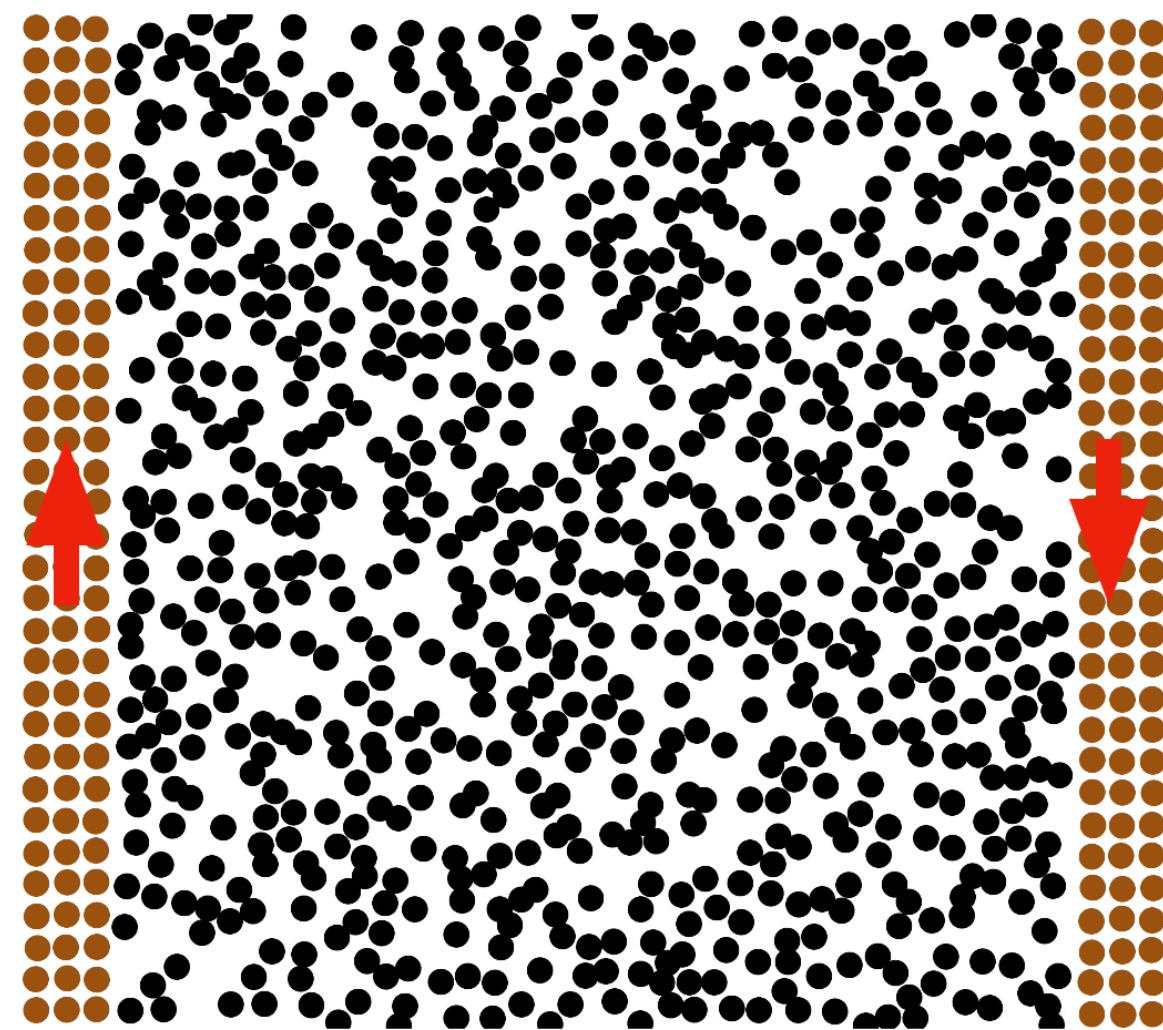
$$m = \sigma = k_B T = 1.0$$

定常状態での速度場



分子動力学シミュレーションでは、速度場やせん断応力を観測できる

分子動力学シミュレーションの結果



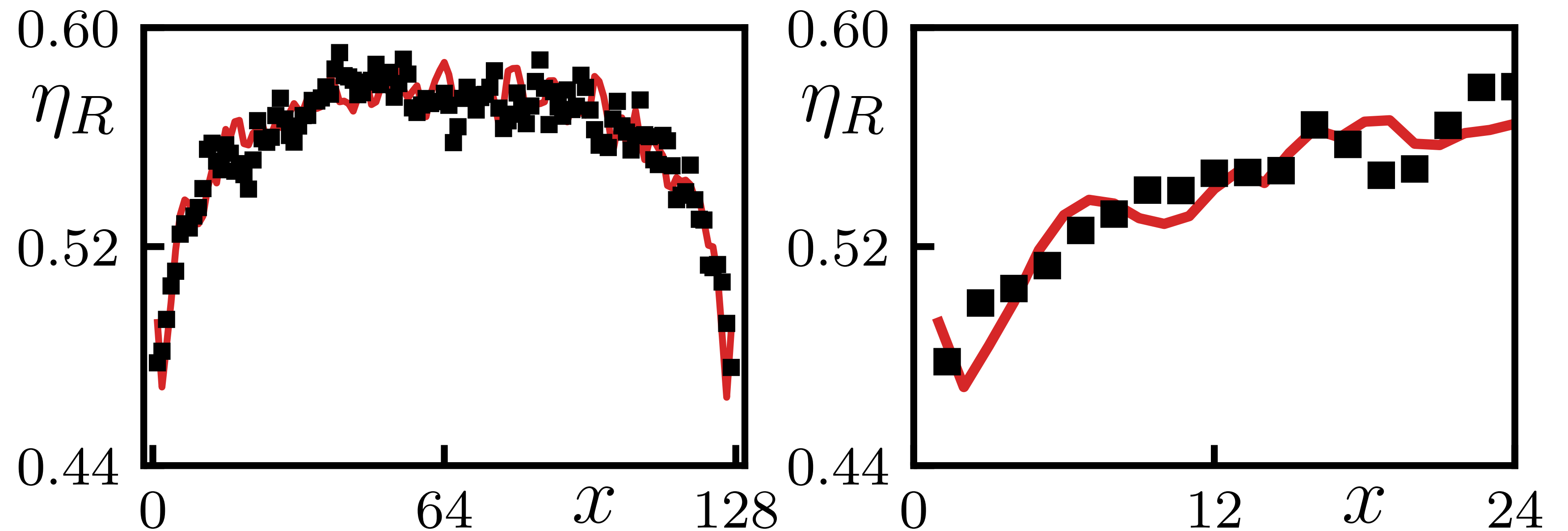
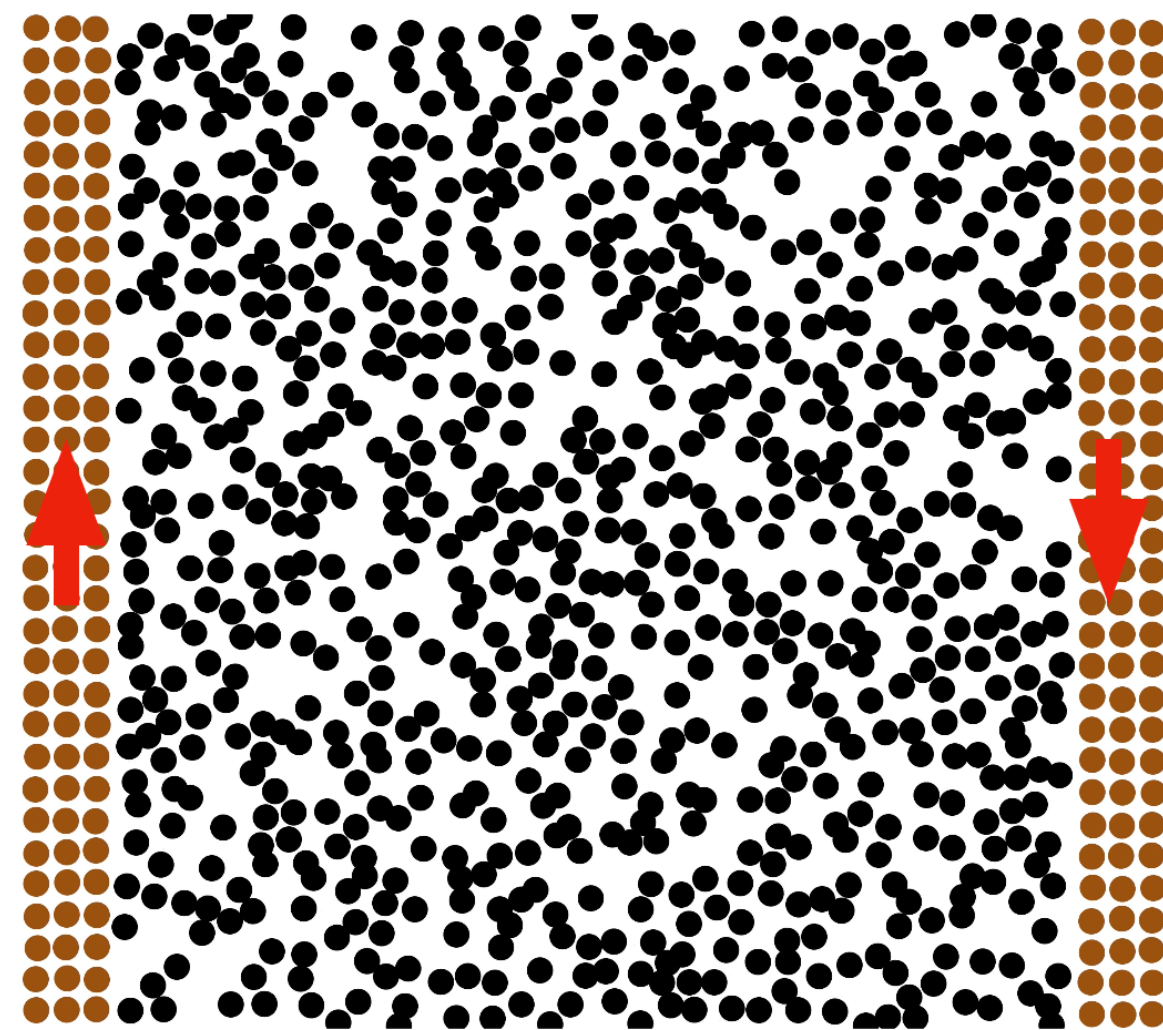
固体壁から離れると
システムサイズ
とともに大きくなる

固体壁近傍では
システムサイズ依存性
はない

システムサイズに依存する粘性係数はIR発散する繰り込み補正の存在を示す

古典力学に従う原子による記述でも、測定される粘性係数の繰り込み補正が観測される

揺らぐ流体力学の定量的記述能力



赤線：分子動力学

黒点：揺らぐ流体

揺らぐ流体力学のパラメータ η_0 をフィッティングパラメータとして、精度良く一致する

揺らぐ流体力学は固体壁近傍の挙動まで含めて、定量的予言を与える理論

まとめ

1. 古典流体には、原子・分子の運動から生じる熱揺らぎの効果が必ず存在するため、揺らぐ流体力学という枠組みが自然に存在する
2. 揺らぐ流体力学は低次元流体を定量的に議論する上で必須の枠組みであり、特に固体壁の存在などが複雑な繰り込み補正を導く
3. 場の量子論の知見を用いることで、新しいことがわかるかも？

(おまけ)

1. 決定論的流体力学は3次元でUVカットオフ長を十分に大きく取った時に、揺らぎの効果が小さくなっていくことで正当化される
2. UVカットオフ長の自然な下限が存在するかが未解決問題である。非平衡統計力学的には、連続体記述が破綻するスケールを明確に定めて、そこをUVカットオフ長の自然な下限としたい