

The Petz lite recovery map for the Hayden-Preskill channel

京都大学素粒子論研究室
中山 泰晶

宇賀神知紀氏(立教大)と宮田晃宏氏(中国科学院大KITS)との共同研究に基づく

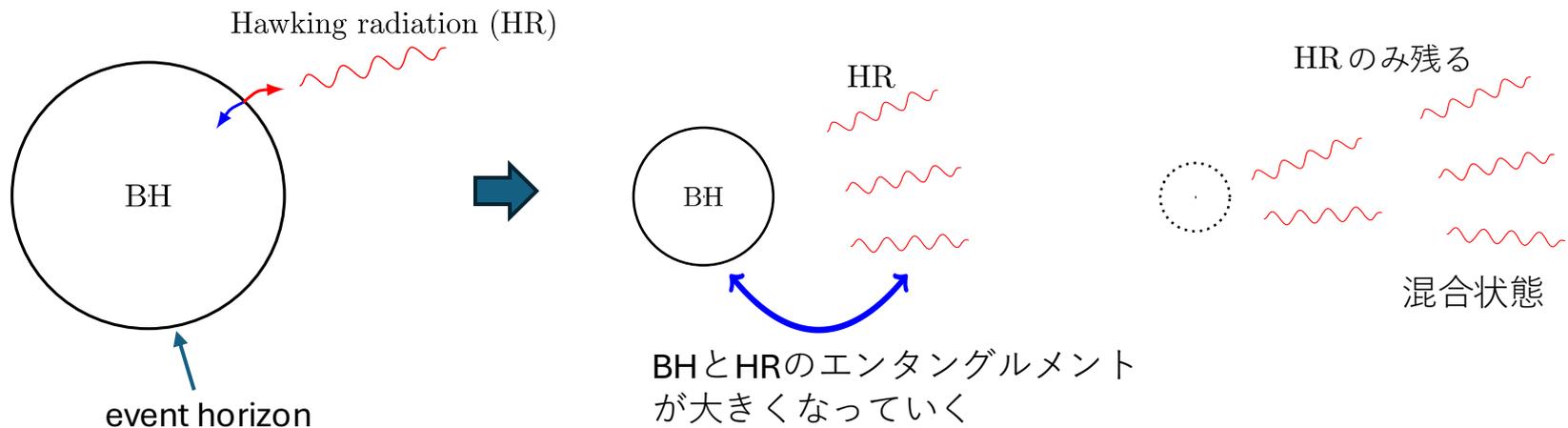
YN, Miyata and Ugajin, “The Petz (lite) recovery map for the scrambling channel”
[arXiv: 2310.18991, PTEP2023(2023)123B04]

イントロダクション

ブラックホール内部の物理・・・まだよくわかっていない(量子重力の難問)

ブラックホールの情報喪失問題

古典重力解であるブラックホールに場の量子論を適用 (Hawking 1975年)

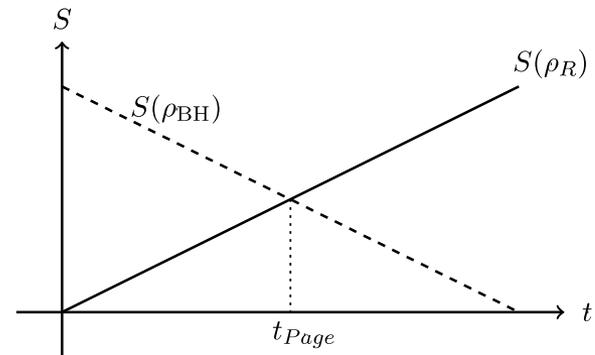


$$S(\rho) = -\text{tr} [\rho \log \rho]$$

HRに制限した密度行列

$$\rho_R = \text{tr}_{\text{BH}} [|\Psi\rangle \langle\Psi|]$$

$S(\rho_R)$ は増大し続け、有限で残る(情報喪失)

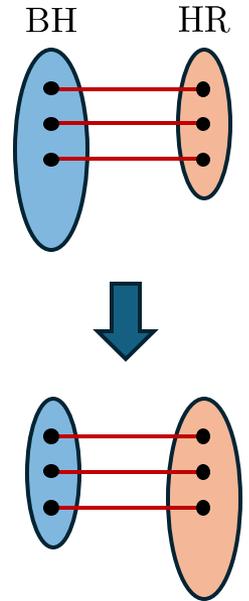


イントロダクション

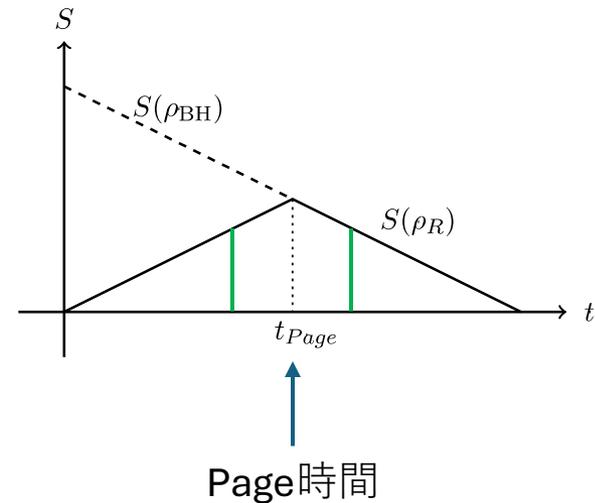
- ブラックホールは星などの物体(純粋状態)の重力崩壊でできる
- ユニタリー発展では全体系は純粋状態のまま

$$|\psi\rangle \longrightarrow U |\psi\rangle$$

- $S(\rho_R)$ は下降に転じ、最終的に 0 になるはず (Page 曲線)



元の物体の情報がHawking放射から回収できるはず

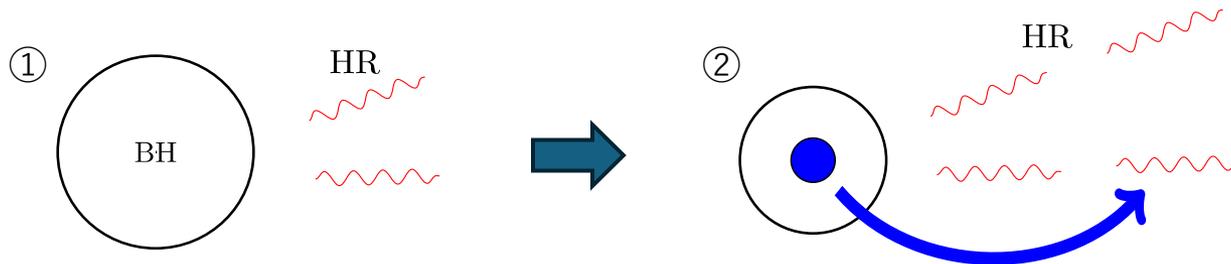


イントロダクション

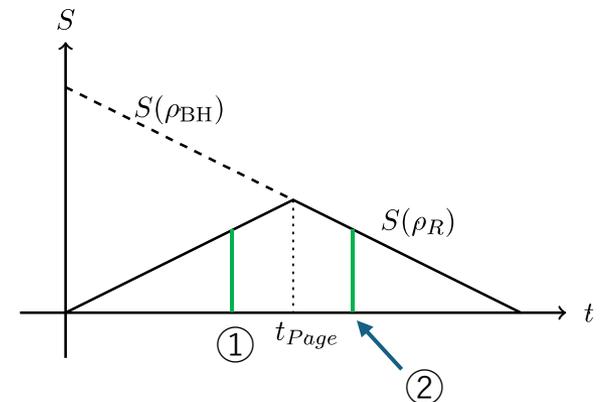
- 2019年、StanfordのチームとPrincetonのチームによって、AdS/CFT対応の文脈で、情報喪失の起こらない $S(\rho_R)$ の計算法が提案された

アイランド公式

$$S(\rho_R) = \min_I \text{ext} \left[\frac{\text{Area}(\partial I)}{4G_N} + S_{\text{bulk}}(I \cup R) \right]$$



アイランド公式の議論によると、
HRからBHの情報を回収できそうである。
情報を操作論的に復元する方法が知りたい！



イントロダクション

研究のモチベーション

Hawking放射にデコーダーをかけるなどの操作により、ブラックホール内部の情報を復元する方法が知りたい (ブラックホール内部についての理解を深めたい)

Hayden-Preskillの思考実験

ブラックホールのダイナミクスをランダム行列として、ブラックホールに投げ入れた量子状態をHawking放射から復元できる条件を調べた仕事 (モチベーションに合う)

我々の論文でやったこと

Hayden-Preskillのランダム行列のセットアップと、SYK模型を用いたセットアップについて、ブラックホールに投げ入れた情報をHawking放射から復元する操作論的方法を調べた。

具体的に、Petz (lite) 復元写像を使って復元できることを示した。

fast scrambling dynamics

調べる →

1. 復元できる条件
2. 復元する方法
3. 復元にかかる時間

目次

1. イントロダクション(済)
2. Hayden-Preskillの思考実験
3. 量子誤り訂正とPetz復元写像
4. ランダム行列によるノイズに対する復元
5. SYK模型によるノイズに対する復元

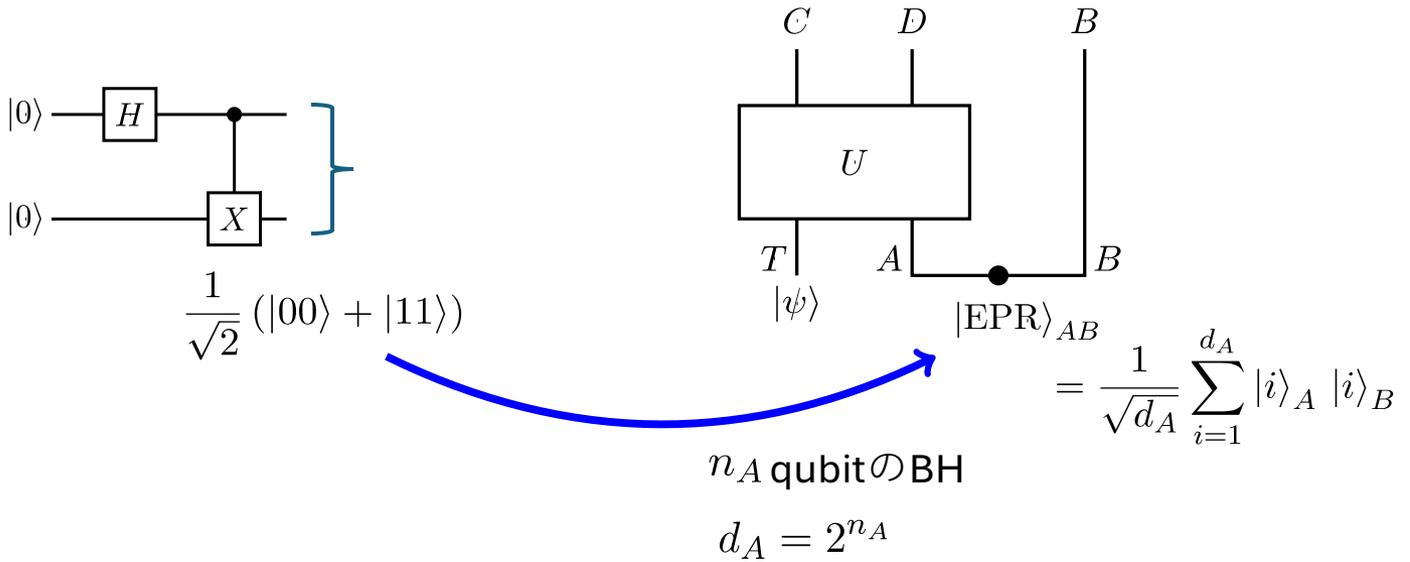
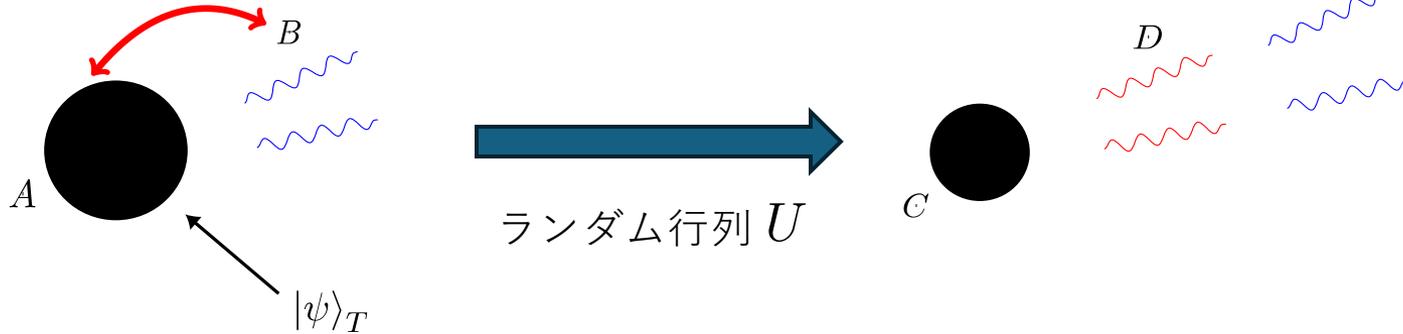
目次

1. イントロダクション
2. Hayden-Preskillの思考実験
 - ① セットアップ
 - ② デカップリング条件
 - ③ Yoshida-Kitaevのデコーダー
3. 量子誤り訂正とPetz復元写像
4. ランダム行列によるノイズに対する復元
5. SYKモデルによるノイズに対する復元

Hayden-Preskillのセットアップ

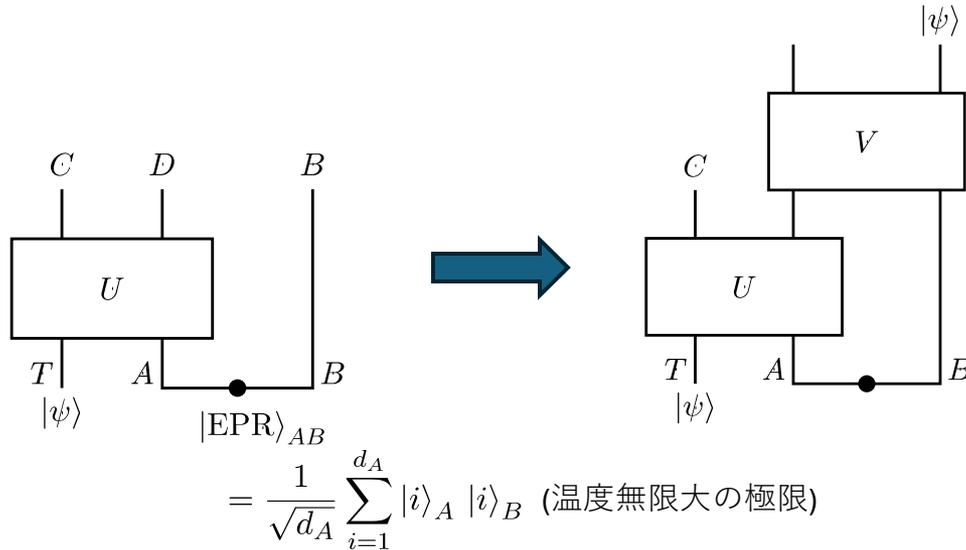
Hayden-Preskillの思考実験 [Hayden-Preskill \[arXiv: 0708.4025\]](https://arxiv.org/abs/0708.4025)

最大エンタングル (Page時間以降)



Hayden-Preskillのセットアップ

Page 時間以降に、ブラックホール A に量子状態 $|\psi\rangle$ を落とす。
Hawking 放射にデコーダー V をかけて $|\psi\rangle$ を復元できる条件は？



$|\psi\rangle_T$: original quantum state

A : old BH

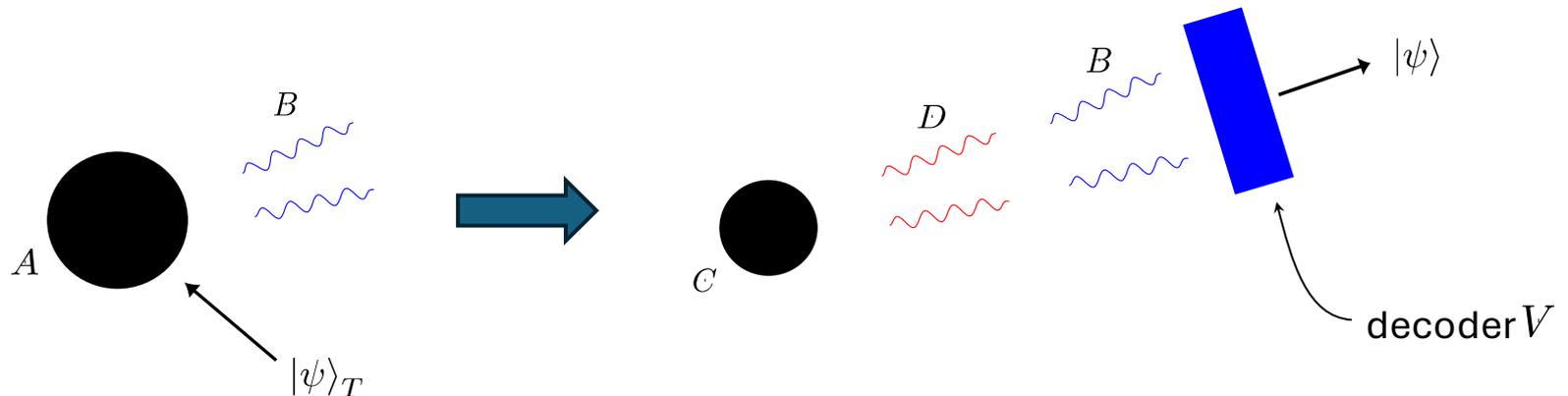
B : early Hawking radiation

U : Haar random unitary matrix

C : remaining BH

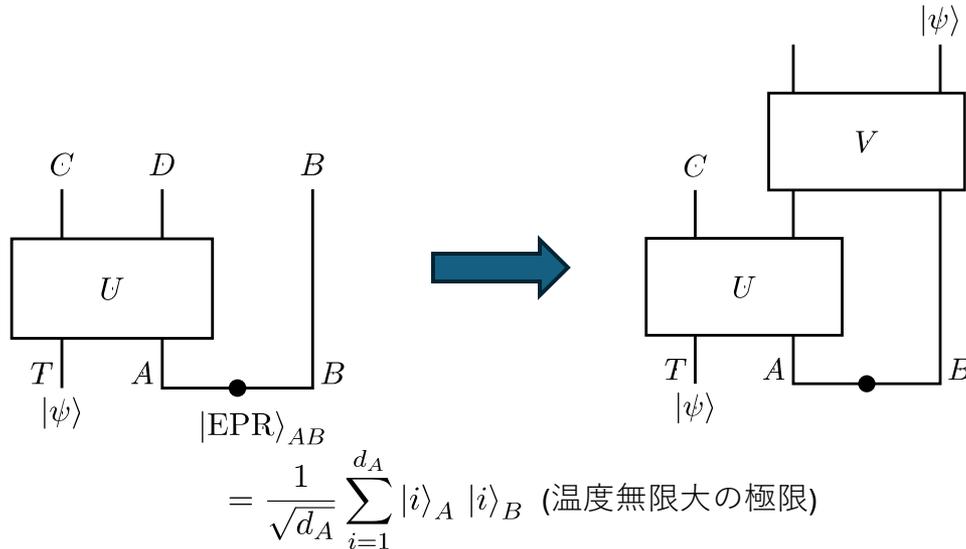
D : late radiation

d_D (late radiationの次元)が増える



Hayden-Preskillのセットアップ

Page 時間以降に、ブラックホール A に量子状態 $|\psi\rangle$ を落とす。
Hawking 放射にデコーダー V をかけて $|\psi\rangle$ を復元できる条件は？



- $|\psi\rangle_T$: original quantum state
- A : old BH
- B : early Hawking radiation
- U : Haar random unitary matrix
- C : remaining BH
- D : late radiation

d_D (late radiationの次元)が増える

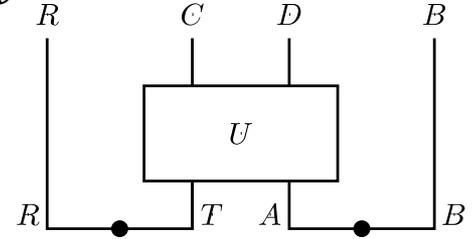
デカップリング条件 $d_T \ll d_D$ を満たせば、 DB から $\rho_T = |\psi\rangle_T \langle \psi|$ をただちに復元できる。
すなわち、 $\mathcal{R}_{DB \rightarrow T} [\mathcal{N}_{T \rightarrow DB} [\rho_T]] = \rho_T \quad \forall \rho_T \in \mathcal{H}_T$ なる復元写像 $\mathcal{R}_{DB \rightarrow T}$ が存在する。
ただし、TFDを考えるとスクランブリング時間 $t_{\text{scr}} \sim \beta \log S_A$ だけ余計にかかる。

$$|\text{TFD}\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{Z_\beta}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n\rangle_A |n\rangle_B \quad Z_\beta = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

デカップリング条件

T と最大エンタングルした reference system R を考える

$$|\Psi_{HP}\rangle = (I_R \otimes U_{TA \rightarrow CD} \otimes I_B) |\text{EPR}\rangle_{RT} \otimes |\text{EPR}\rangle_{AB} =$$



R が C とデカップルすれば、 R は DB とエンタングルするようになり、 T の情報は DB から回収できる:

$$\overline{\|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_1} = \int dU \|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_1 \ll 1$$

$$\rho_{RC} = \text{tr}_{DB} [|\Psi_{HP}\rangle \langle \Psi_{HP}|], \quad \rho_R = \text{tr}_{CDB} [|\Psi_{HP}\rangle \langle \Psi_{HP}|], \quad \rho_C = \text{tr}_{RDB} [|\Psi_{HP}\rangle \langle \Psi_{HP}|]$$

$$\begin{cases} \|M\|_1 = \text{tr} \sqrt{M^\dagger M} \\ \|M\|_2 = \sqrt{\text{tr}(M^\dagger M)} \end{cases}$$

$$\|M\|_2 \leq \|M\|_1 \leq \sqrt{d} \|M\|_2$$

$$\left(\overline{\|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_1} \right)^2 \leq \overline{\|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_1^2}$$

$$\leq d_R d_C \overline{\|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_2^2}$$

$$= d_R d_C \overline{\text{tr}[\rho_{RC}^2]} - 1 \quad \leftarrow \text{これが十分小さければ良い}$$

デカップリング条件

$$\left(\overline{\|\rho_{RC} - \rho_R \otimes \rho_C\|_1} \right)^2 \leq d_R d_C \overline{\text{tr} [\rho_{RC}^2]} - 1$$

$$\overline{\text{tr} [\rho_{RC}^2]} = \frac{1}{d_T^2 d_A^2} \overline{\sum U_{CD,TA} U_{T'A,C'D}^\dagger U_{C'D',T'A'} U_{TA^\dagger,CD'}}$$

Weingarten公式

$$\overline{U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2}^\dagger} = \frac{1}{d} \delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 i_2}$$

$$\begin{aligned} \overline{U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2}^\dagger U_{i_3 j_3} U_{i_4 j_4}^\dagger} &= \frac{1}{d^2 - 1} (\delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 i_2} \cdot \delta_{i_3 j_4} \delta_{j_3 i_4} + \delta_{i_1 j_4} \delta_{j_1 i_4} \cdot \delta_{i_3 j_2} \delta_{j_3 i_2}) \\ &\quad - \frac{1}{d(d^2 - 1)} (\delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 i_4} \cdot \delta_{i_3 j_4} \delta_{j_3 i_2} + \delta_{i_1 j_4} \delta_{j_1 i_2} \cdot \delta_{i_3 j_2} \delta_{j_3 i_4}) \end{aligned}$$

平均して典型的には右辺のようになる。
第2項は次元が大きければ無視できる。

$$d_R d_C \overline{\text{tr} [\rho_{RC}^2]} - 1 \approx \left(\frac{d_T}{d_D} \right)^2$$

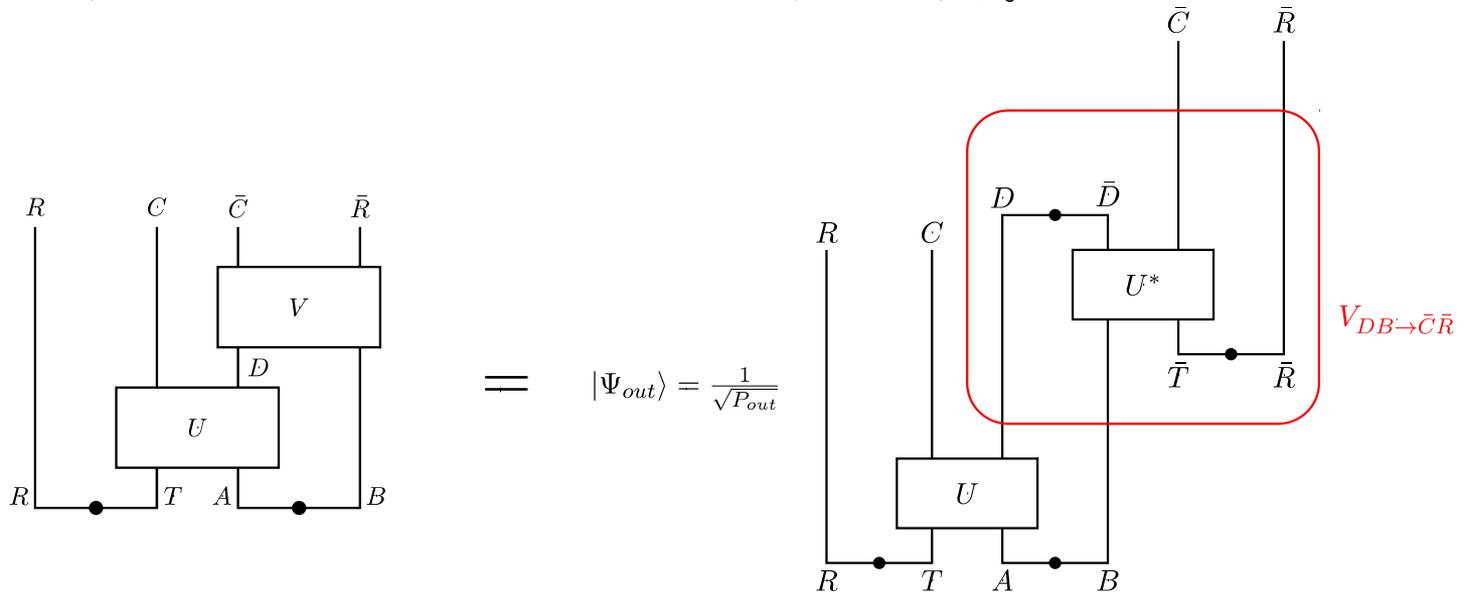


$d_T \ll d_D$ であればデカップルする

Yoshida-Kitaevのデコーダー

Yoshida-Kitaev [arXiv: 1710.03363]

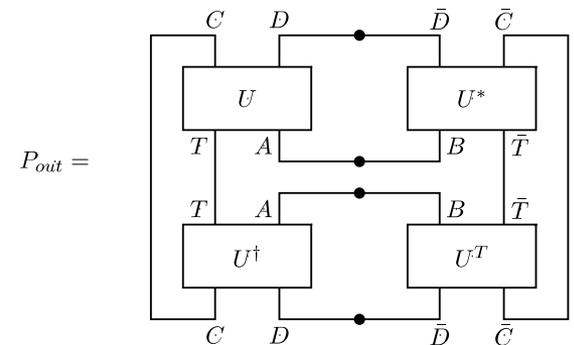
デカップリング条件を満たせば DB に作用するデコーダーを用いて $|\psi\rangle$ を復元できるが、有名なデコーダーの一つに **Yoshida-Kitaevのデコーダー** がある。



EPR pairを用意し逆時間発展させ射影測定するデコーダーで、**量子テレポーテーション**とみなせる。

デカップリング条件を満たせば $|EPR\rangle_{R\bar{R}}$ が実現する。

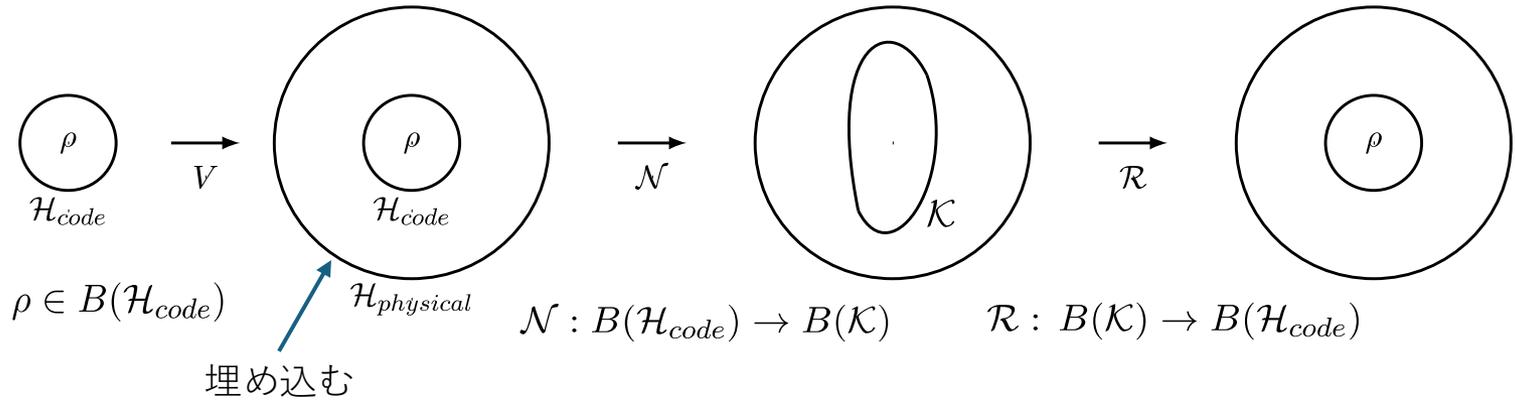
cf.) Gao-Jafferis-Wall [arXiv1608.05687]



目次

1. イントロダクション
2. Hayden-Preskillの思考実験
3. 量子誤り訂正と**Petz**復元写像
 - ① 量子誤り訂正できる条件
 - ② **Petz**復元写像
 - ③ **Petz lite**復元写像
4. ランダム行列によるノイズに対する復元
5. SYKモデルによるノイズに対する復元

量子誤り訂正とは



Hayden-Preskillのセットアップは**量子誤り訂正**の言葉で書くと理解が進む

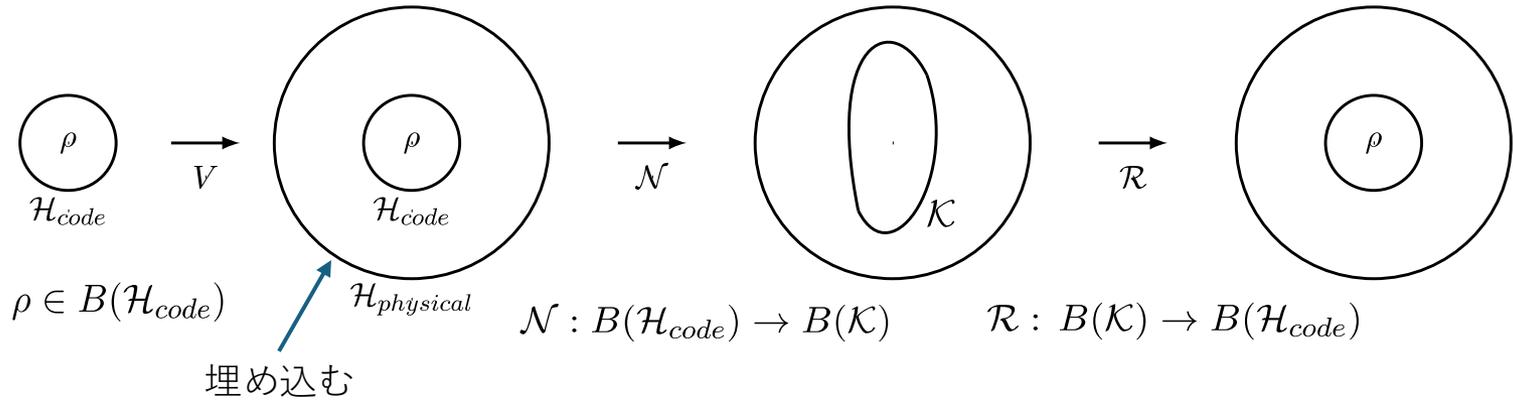
量子状態 ρ がノイズ \mathcal{N} にさらされたとして、 $\mathcal{R}[\mathcal{N}[\rho]] = \rho$ なる復元写像 \mathcal{R} が存在するか？を考える。 \mathcal{N} がかかる前により大きな Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{physical}$ に埋め込んでおくと復元しやすくなる

具体例

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \xrightarrow{V_{code \rightarrow physical}} a|0_L\rangle + b|1_L\rangle = a|000\rangle + b|111\rangle$$

$$\left. \begin{aligned}
 P_0 &\equiv |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111| \\
 P_1 &\equiv |100\rangle\langle 100| + |011\rangle\langle 011| \\
 P_2 &\equiv |010\rangle\langle 010| + |101\rangle\langle 101| \\
 P_3 &\equiv |001\rangle\langle 001| + |110\rangle\langle 110|
 \end{aligned} \right\} \text{detect} \longrightarrow \text{bit flip (復元)}$$

量子誤り訂正できる条件



- 量子状態 ρ とノイズチャンネル \mathcal{N} に対して、 $\mathcal{R}[\mathcal{N}[\rho]] = \rho$ なる復元写像 $\mathcal{R} : B(\mathcal{K}) \rightarrow B(\mathcal{H}_{code})$ が存在するための必要十分条件(QEC条件):

① Knill-Laflamme条件

$$P_{code} E_i^\dagger E_j P_{code} = \alpha_{ij} P_{code}$$

α_{ij} はエルミート行列

$$\mathcal{N}[\rho] = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger$$

② Sufficiency条件

$$S(\rho || \sigma) = S(\mathcal{N}[\rho] || \mathcal{N}[\sigma]) \quad \rho, \sigma \in B(\mathcal{H}_{code})$$

相対エントロピー $S(\rho || \sigma) = \text{tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)]$ は
 CPTP写像に対して単調減少

Petz復元写像

\mathcal{N} の adjoint channel $\mathcal{N}^\dagger : B(\mathcal{K}) \rightarrow B(\mathcal{H}_{code})$ は、 $\rho \in B(\mathcal{H}_{code}), \mathcal{O} \in B(\mathcal{K})$ に対して

$$\text{tr}_{\mathcal{K}}[\mathcal{N}[\rho] \mathcal{O}] = \text{tr}_{\mathcal{H}}[\rho \mathcal{N}^\dagger[\mathcal{O}]]$$

で定義される。

QEC条件を満たす時、復元写像として、次の**Petz 復元写像**を構成できる:

$\forall \sigma \in B(\mathcal{H}_{code})$ として、Petz 復元写像 $\mathcal{R}_{\sigma, \mathcal{N}}^{Petz} : B(\mathcal{K}) \rightarrow B(\mathcal{H}_{code})$ は

$$\mathcal{R}_{\sigma, \mathcal{N}}^{Petz}[\mathcal{O}] = \sigma^{\frac{1}{2}} \mathcal{N}^\dagger \left[\mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{O} \mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}} \right] \sigma^{\frac{1}{2}}$$

で定義される。ここで $\mathcal{O} \in B(\mathcal{K}), \mathcal{N}[\sigma] \in B(\mathcal{K})$

- 各ノイズに対応する回転に対して、回し戻す操作になっている
- デカップリング条件がQEC条件に対応していて、Hayden-PreskillのセットアップでもPetz復元写像で情報復元できるのでは？
- Petz復元写像は、このままの形ではデコーダーとして解釈困難

Petz lite復元写像

ノイズチャンネル \mathcal{N} が最大カオス的なとき (scrambling channelのとき)

- ランダム行列 (Hayden-Preskillのオリジナルの議論)
- SYK模型
- \vdots

平坦なスペクトラムになる ($\mathcal{N}[\sigma] \propto I$) と期待できる

$$\mathcal{R}_{\sigma, \mathcal{N}}^{Petz}[\mathcal{O}] = \sigma^{\frac{1}{2}} \mathcal{N}^\dagger \left[\mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{O} \mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}} \right] \sigma^{\frac{1}{2}}$$



$$\mathcal{R}^{Lite}[\mathcal{O}] = c \mathcal{N}^\dagger[\mathcal{O}]$$

$\sigma \propto I_{code}$ としてよい
ことに注意

この adjoint channel の定数倍の形を Petz lite という。West Coast Paper [arXiv: 1911.11977]

ランダム行列と SYK 模型のそれぞれによるノイズチャンネルに対して、
Petz lite が実際に復元写像として機能することを示した！

目次

1. イントロダクション
2. Hayden-Preskillの思考実験
3. 量子誤り訂正とPetz復元写像
4. ランダム行列によるノイズに対する復元
 - ① ノイズチャンネルと**Petz lite**の構成
 - ② 相対エントロピーの計算と**Sufficiency**
 - ③ **Petz lite**で復元できることの確認
5. SYK模型によるノイズに対する復元

ノイズチャンネルと Petz lite の構成

Hayden-Preskillのランダム行列によるノイズチャンネル $\mathcal{N}^{\text{HP}} : B(T) \rightarrow B(DB)$ は、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{T \rightarrow DB}^{\text{HP}}[\rho_T] &= \text{tr}_C \left[(U_{T,A \rightarrow C,D} \otimes I_B)(\rho_T \otimes |\text{EPR}\rangle_{A,B}\langle \text{EPR}|)(U_{T,A \rightarrow C,D}^\dagger \otimes I_B) \right] \\ &= \frac{1}{d_B} \sum_{\tilde{D}, \tilde{D}'=1}^{d_D} \sum_{\tilde{B}, \tilde{B}'=1}^{d_B} |\tilde{D}\rangle_D \langle \tilde{D}'| \otimes |\tilde{B}\rangle_B \langle \tilde{B}'| \sum_{C=1}^{d_C} \sum_{\tilde{T}, \tilde{T}'=1}^{d_T} U_{C, \tilde{D}; \tilde{T}, \tilde{B}}(\rho_T) \tilde{T} \tilde{T}' U_{C, \tilde{D}'; \tilde{T}', \tilde{B}'}^\dagger \end{aligned}$$

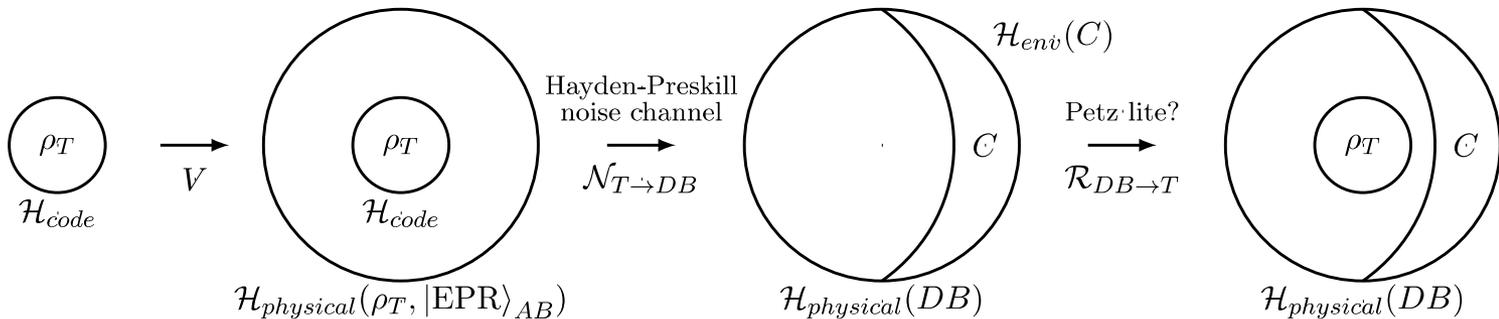
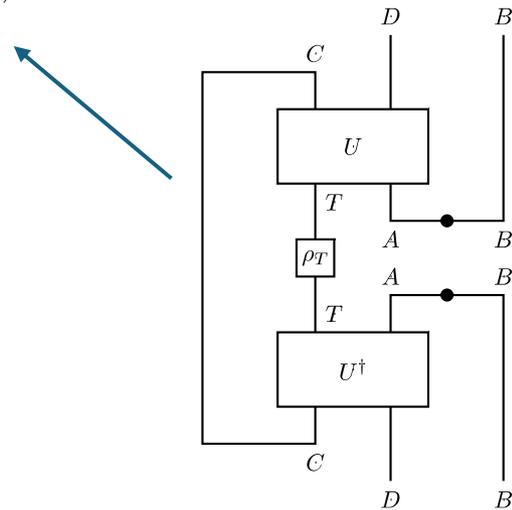
- CPTPである(チャンネルと言って良い)

$$\langle \psi | \mathcal{N}[\rho] | \psi \rangle \geq 0, \text{tr}[\rho_T] = \text{tr}[\mathcal{N}^{\text{HP}}[\rho_T]]$$



$$\mathcal{R}_{DB \rightarrow T}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}_{T \rightarrow DB}^{\text{HP}}[\rho_T]] = \rho_T \quad \forall \rho_T \in B(T)$$

が成り立つかを考える。



ノイズチャンネルと Petz lite の構成

$$\mathrm{tr}_{D,B} [\mathcal{N}_{T \rightarrow D,B} [\rho_T] \mathcal{O}_{DB}] = \mathrm{tr}_T [\rho_T \mathcal{N}_{D,B \rightarrow T}^\dagger [\mathcal{O}_{DB}]] \text{ より、}$$

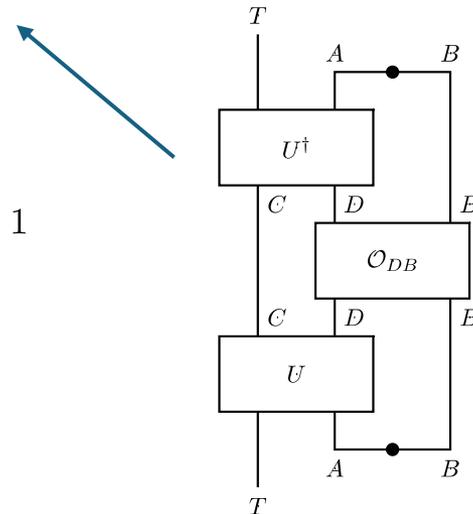
$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{D,B \rightarrow T}^\dagger [\mathcal{O}_{DB}] &= \mathrm{tr}_{A,B} \left[|\mathrm{EPR}\rangle_{A,B} \langle \mathrm{EPR}| (U_{T,A \rightarrow C,D}^\dagger \otimes I_B) \mathcal{O}_{DB} (U_{T,A \rightarrow C,D} \otimes I_B) \right] \\ &= \frac{1}{d_B} \sum_{\tilde{T}, \tilde{T}'=1}^{d_T} |\tilde{T}\rangle_T \langle \tilde{T}'| \sum_{C=1}^{d_C} \sum_{\tilde{B}, \tilde{B}'=1}^{d_B} \sum_{\tilde{D}, \tilde{D}'=1}^{d_D} U_{\tilde{T}\tilde{B}, C\tilde{D}}^\dagger \mathcal{O}_{\tilde{D}\tilde{B}, \tilde{D}'\tilde{B}'} U_{C\tilde{D}', \tilde{T}'\tilde{B}'} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{O}] = c \mathcal{N}^\dagger[\mathcal{O}]$ の係数を

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{D,B \rightarrow T}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{O}_{DB}] &:= \frac{1}{N} \cdot \frac{d_B d_D}{d_T} \mathcal{N}_{D,B \rightarrow T}^\dagger [\mathcal{O}_{DB}] & N &= \left(\frac{d_D}{d_T} \right)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{d_T}{d_D} \right)^2} \cdot d_C \mathcal{N}_{D,B \rightarrow T}^\dagger [\mathcal{O}_{DB}] \end{aligned}$$

とする。

$$\left(\begin{array}{l} \overline{\mathrm{tr} [\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{N}^{\mathrm{HP}}[\rho_T]]]} = \mathrm{tr} [\mathcal{N}^{\mathrm{HP}}[\rho_T]] = 1 \text{ から決めた。} \\ \text{典型的には CPTP であると言える。} \\ \mathrm{tr} [\mathcal{R}^{\mathrm{Lite}}[\mathcal{O}_{DB}]] = \mathrm{tr} [\mathcal{O}_{DB}] \text{ が言えると、より嬉しい} \end{array} \right)$$



相対エントロピーの計算と Sufficiency

Sufficiency条件

$$S(\rho||\sigma) = \text{tr} [\rho(\log \rho - \log \sigma)]$$

$$S(\rho||\sigma) = \overline{S(\mathcal{N}[\rho]||\mathcal{N}[\sigma])}$$
$$\approx \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-1} \left(\log \overline{\text{tr} [\mathcal{N}[\rho]^n]} - \log \overline{\text{tr} [\mathcal{N}[\rho]\mathcal{N}[\sigma]^{n-1}]} \right)$$

replica trick ($n \in \mathbb{Z}$ として解析接続)

Hilbert空間の次元が大きいときの近似

2n個のユニタリ行列の積に対するWeingarten公式を使えばできるが...

West Coast Paper [[arXiv: 1911.11977](https://arxiv.org/abs/1911.11977)]のReplica wormholeの方法に似せて、
diagrammaticに平均の計算を実行しよう！

相対エントロピーの計算と Sufficiency

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{T \rightarrow D, B}[\rho_T] &= \frac{1}{d_B} \sum_{\tilde{D}, \tilde{D}'=1}^{d_D} \sum_{\tilde{B}, \tilde{B}'=1}^{d_B} |\tilde{D}\rangle_D \langle \tilde{D}'| \otimes |\tilde{B}\rangle_B \langle \tilde{B}'| \sum_{C=1}^{d_C} \sum_{\tilde{T}, \tilde{T}'=1}^{d_T} U_{C, \tilde{D}; \tilde{T}, \tilde{B}} (\rho_T)_{\tilde{T}\tilde{T}'} U_{C, \tilde{D}'; \tilde{T}', \tilde{B}'}^\dagger \\ &= \frac{1}{kd_C} \sum_{i, j=1}^k |i\rangle\langle j| \cdot \sum_{\tilde{T}, \tilde{T}'=1}^{d_T} \langle \psi_j^{\tilde{T}'} | \psi_i^{\tilde{T}} \rangle (\rho_T)_{\tilde{T}\tilde{T}'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\psi_i^T\rangle_C &:= \sqrt{d_C d_D} \sum_{C=1}^{d_C} |C\rangle U_{C, T; i} \\ \langle \psi_i^T | \psi_j^{T'} \rangle &= d_C d_D \sum_{C=1}^{d_C} U_{i; C, T}^\dagger U_{C, T'; j} \\ k &= d_D d_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{D, B \rightarrow T}[\mathcal{O}_{DB}] &= \frac{1}{d_B} \sum_{\tilde{T}, \tilde{T}'=1}^{d_T} |\tilde{T}\rangle_T \langle \tilde{T}'| \sum_{C=1}^{d_C} \sum_{\tilde{B}, \tilde{B}'=1}^{d_B} \sum_{\tilde{D}, \tilde{D}'=1}^{d_D} U_{\tilde{T}\tilde{B}, C\tilde{D}}^\dagger \mathcal{O}_{\tilde{D}\tilde{B}, \tilde{D}'\tilde{B}'} U_{C\tilde{D}', \tilde{T}'\tilde{B}'} \\ &= \frac{1}{kd_C} \sum_{T, T'=1}^{d_T} |T'\rangle\langle T| \cdot \sum_{i, j=1}^k \langle \psi_j^{T'} | \psi_i^T \rangle \langle j | \mathcal{O}_{DB} | i \rangle \end{aligned}$$

$$\overline{\langle \psi_i^T | \psi_j^{T'} \rangle} = \left(\begin{array}{c} T \quad i \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ T' \quad j \end{array} \right) Z_1 = d_C \delta_{ij} \delta_{TT'}$$

$$\begin{aligned} \overline{U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2}^\dagger} &= \frac{1}{d} \delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 i_2} \\ \overline{U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2}^\dagger U_{i_3 j_3} U_{i_4 j_4}^\dagger} &= \frac{1}{d^2 - 1} (\delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 i_2} \cdot \delta_{i_3 j_4} \delta_{j_3 i_4} + \delta_{i_1 j_4} \delta_{j_1 i_4} \cdot \delta_{i_3 j_2} \delta_{j_3 i_2}) \\ &\quad - \frac{1}{d(d^2 - 1)} (\delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 i_4} \cdot \delta_{i_3 j_4} \delta_{j_3 i_2} + \delta_{i_1 j_4} \delta_{j_1 i_2} \cdot \delta_{i_3 j_2} \delta_{j_3 i_4}) \end{aligned}$$

$$\overline{\langle \psi_i^{T_1} | \psi_j^{T_1'} \rangle \cdot \langle \psi_j^{T_2'} | \psi_i^{T_2} \rangle} = \left(\begin{array}{c} T_1 \quad i_1 \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ T_1' \quad j_1 \end{array} \right) Z_1 + \left(\begin{array}{c} i_2 \quad T_2 \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ j_2 \quad T_2' \end{array} \right) Z_1 + \left(\begin{array}{c} T_1 \quad i_1 \quad i_2 \quad T_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ T_1' \quad j_1 \quad j_2 \quad T_2' \end{array} \right) Z_2$$

$$Z_n \propto e^{S_{BH} \cdot \chi} = (d_C)^{\chi D}$$

$$\approx (d_C)^2 \delta_{ij} \delta_{T_1 T_1'} \cdot \delta_{ji} \delta_{T_2' T_2} + d_C \delta_{ii} \delta_{T_1 T_2} \cdot \delta_{jj} \delta_{T_2' T_1'}$$

large d

典型的には右辺のようになる

相対エントロピーの計算と Sufficiency

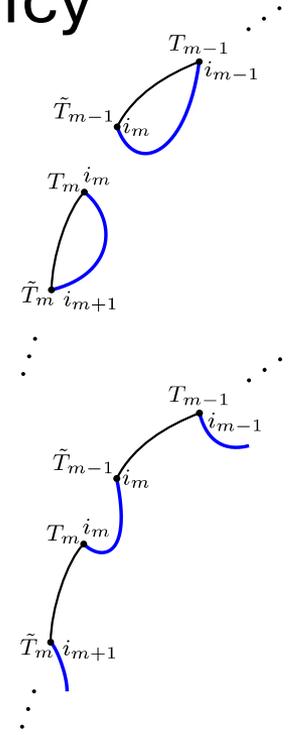
$$\text{tr} [\mathcal{N}[\rho]^n] = \frac{1}{(k d_C)^n} \sum_{\mathbf{T}} \sum_{\tilde{\mathbf{T}}=1}^{d_T} \prod_{m=0}^{n-1} \left(\langle \psi_{i_m}^{\tilde{T}_m} | \psi_{i_{m+1}}^{T_m} \rangle \rho_{T_m \tilde{T}_m} \right)$$

early time ($d_D \ll d_T$) では fully disconnected saddle が支配的

$$\overline{\text{tr} [\mathcal{N}[\rho]^n]} \Big|_{\text{fully discon}} = \frac{1}{(k d_C)^n} \cdot k (d_C)^n \sum_{T=1}^{d_T} \rho_{T_1 T_1} \rho_{T_2 T_2} \cdots \rho_{T_n T_n} = \frac{1}{(k)^{n-1}} (\text{tr} [\rho])^n$$

late time ($d_D \gg d_T$) では fully connected saddle が支配的

$$\overline{\text{tr} [\mathcal{N}[\rho]^n]} \Big|_{\text{fully conn}} = \frac{1}{(k d_C)^n} \cdot (k)^n d_C \sum_{T=1}^{d_T} \rho_{T_n T_{n-1}} \cdots \rho_{T_2 T_1} \rho_{T_1 T_n} = \frac{1}{(d_C)^{n-1}} \text{tr} [\rho^n]$$



$$\overline{\text{tr} [\mathcal{N}[\rho]^n]} = \frac{1}{(k)^{n-1}} (\text{tr} [\rho])^n + \frac{1}{(d_C)^{n-1}} \text{tr} [\rho^n] + \cdots,$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{(k)^{n-1}} & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ \frac{1}{(d_C)^{n-1}} \text{tr} [\rho^n] & d_C d_T \ll k \Leftrightarrow \left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1 \end{cases}$$



$$\overline{S(\mathcal{N}[\rho] || \mathcal{N}[\sigma])} = \begin{cases} 0 & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ S(\rho || \sigma) & k \gg d_C d_T \Leftrightarrow \left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1 \end{cases}$$

$\overline{\text{tr} [\mathcal{N}[\rho] \mathcal{N}[\sigma]^{n-1}]}$ も同様に計算できる

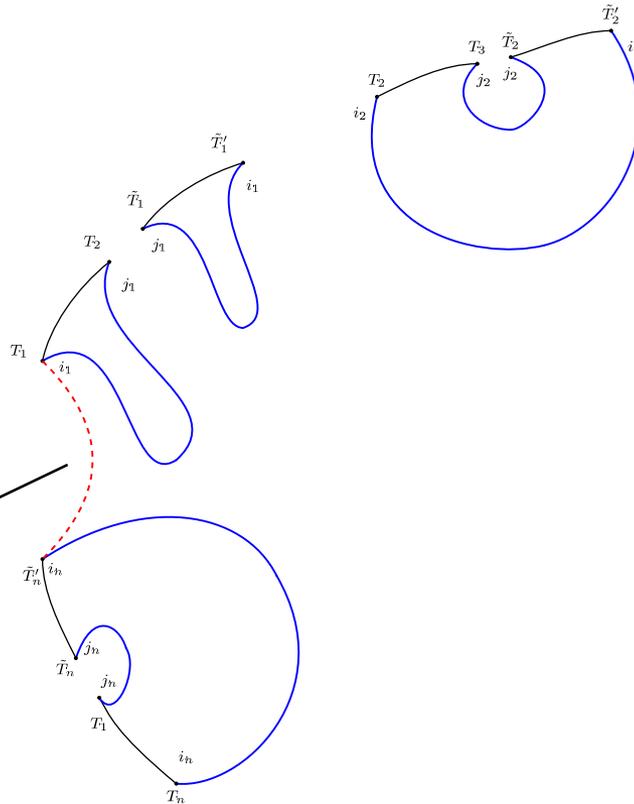
デカップリング条件を満たす時、Sufficiency条件を満たすことが示された

Petz liteで復元できることの確認

$d_T \ll d_D$ を満たす時、 $\overline{S(\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho_T]] \parallel \rho_T)} = 0$ は成り立つか、調べる。

$$\overline{S(\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho_T]] \parallel \rho_T)} \approx \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-1} \left(\log \overline{\text{tr}(\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]^n)} - \log \overline{\text{tr}(\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]] \rho^{n-1})} \right)$$

➔ $\overline{\text{tr}(\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]^n)} = \frac{1}{(Nkd_C^2 d_T)^n} \sum_{T, T'=1}^{d_T} \sum_{\tilde{T}, \tilde{T}'=1}^{d_T} \sum_{i, j=1}^k \prod_{m=1}^n \left(\overline{\langle \psi_{i_m}^{T_m} | \psi_{j_m}^{T_{m+1}} \rangle \langle \psi_{j_m}^{\tilde{T}_m} | \psi_{i_m}^{\tilde{T}'_m} \rangle} \rho_{\tilde{T}_m \tilde{T}'_m} \right)$ を計算する



k のfactorだけ
小さくなる。
($k \gg d_C, d_T$)

$$\overline{\text{tr}(\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]^n)} = \text{tr} \left(\overline{\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]} \right)^n$$

Petz liteで復元できることの確認

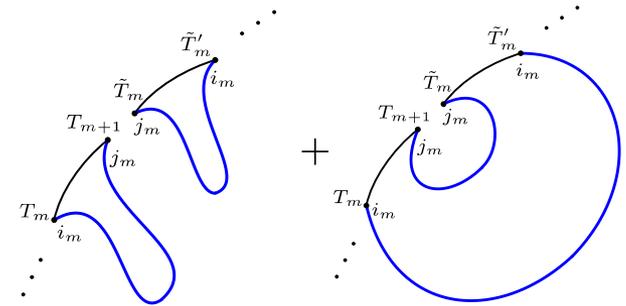
$$\overline{\text{tr}(\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]])^n} = \text{tr}(\overline{\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho]]})^n \text{ として良く、}$$

2つ以上のreplicaを考慮する必要があるところが重要(2乗の平均)

$$\overline{S(\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho_T]] \parallel \rho_T)} = S(\overline{\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho_T]]} \parallel \rho_T) \text{ を計算すれば良い (self averaging という)}$$

$$\overline{\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho_T]]} = \frac{1}{N} \frac{1}{kd_C^2 d_T} (kd_C^2 I_T + k^2 d_C \rho_T)$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2} \left(\left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2 \cdot \frac{I_T}{d_T} + \rho_T \right) =$$

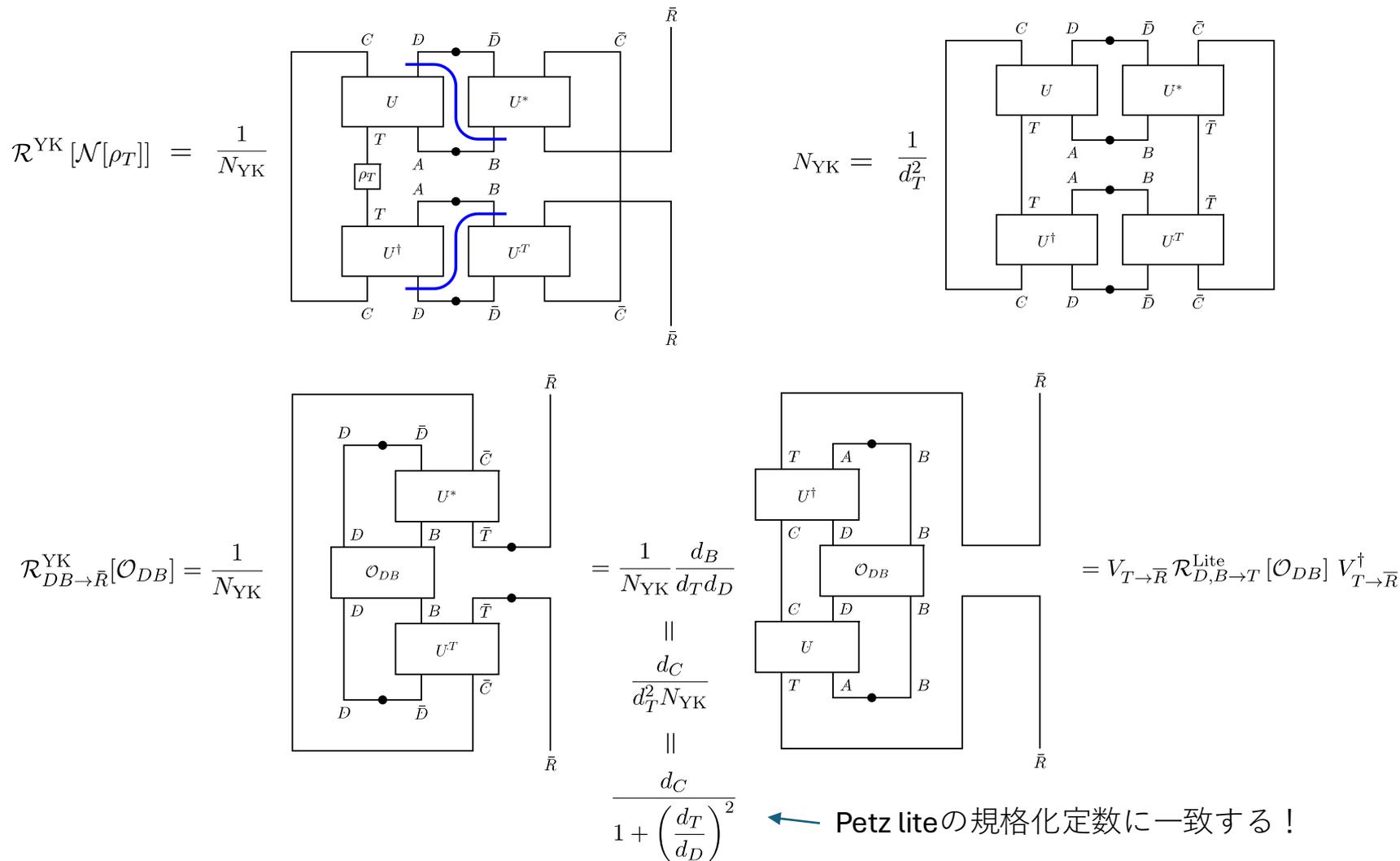


$$\overline{S(\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho_T]] \parallel \rho_T)} \approx S(\overline{\mathcal{R}^{\text{Lite}}[\mathcal{N}[\rho_T]]} \parallel \rho_T)$$

$$= \begin{cases} S\left(\rho \parallel \frac{I_T}{d_T}\right) & k \ll d_C \Leftrightarrow d_T \ll \left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2 \\ 0 & k \gg d_C d_T \Leftrightarrow \left(\frac{d_T}{d_D}\right)^2 \ll 1 \end{cases}$$

Hayden-PreskillのノイズチャンネルがPetz liteで復元できることが示された

Petz liteで復元できることの確認



Yoshida-KitaevのデコーダーをHayden-PreskillにおけるPetz liteと同一視できた

目次

1. イントロダクション
2. Hayden-Preskillの思考実験
3. 量子誤り訂正とPetz復元写像
4. ランダム行列によるノイズに対する復元
5. SYKモデルによるノイズに対する復元
 - ① ノイズチャンネルとPetz liteの構成
 - ② 復元可能性を表す行列要素
 - ③ Petz liteによる復元可能性と復元にかかる時間

ノイズチャンネルとPetz liteの構成

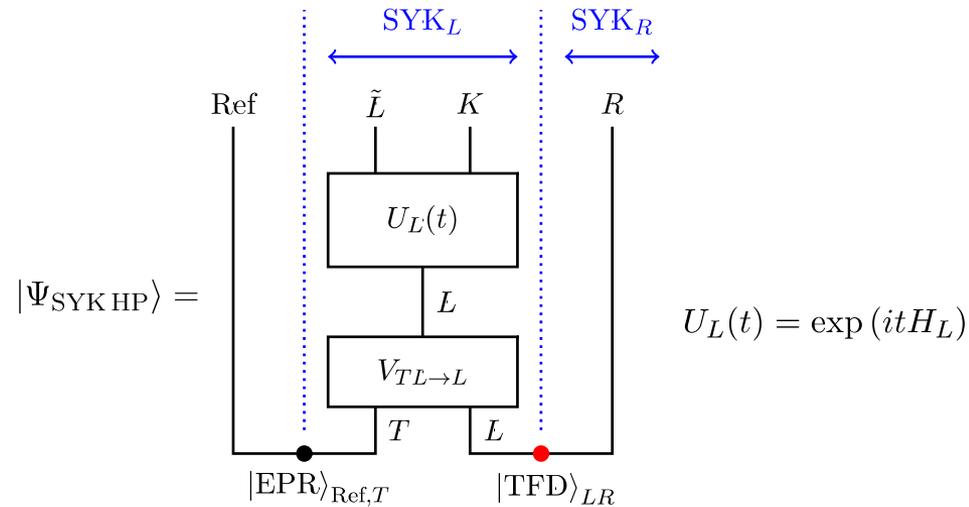
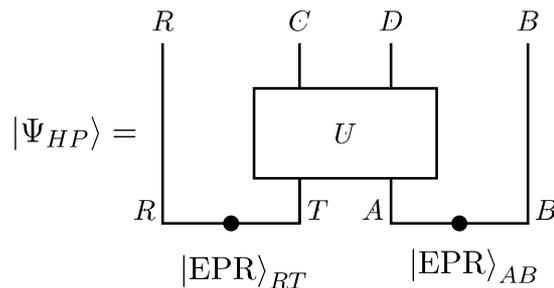
物理としてより具体的なSYK模型によるノイズでもPetz liteで情報復元できるか？

SYK模型

- ランダムカップリングの場の理論
- OTOCが最も速く小さくなる最大カオス(scrambling)の性質を示す
- JT重力模型とholographic dual

$$H = (i)^{q/2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq N} j_{i_1 i_2 \dots i_q} \psi_{i_1} \psi_{i_2} \dots \psi_{i_q} \quad q \in 2\mathbb{N} (q > 2)$$

$$\langle j_{i_1 i_2 \dots i_q}^2 \rangle = J^2 (q-1)! / N^{q-1}$$



$$N \gg 1, \quad K \gg 1, \quad \frac{K}{N} \ll 1 \quad \text{とする}$$

(large $N \rightarrow$ classical SD eq.)

$$|TFD\rangle_{L,R} = Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta(H_L+H_R)/4} |0\rangle_{L,R}$$

$$[\psi_{j,L}(0) + i\psi_{j,R}(0)] |0\rangle_{L,R} = 0 \quad \text{for } \forall j$$

ノイズチャンネルと Petz lite の構成

SYK Hayden-Preskill setup Chandrasekaran-Levine [arXiv: 2203.05058]

SYK Hayden-Preskill noise channel と その adjoint channel

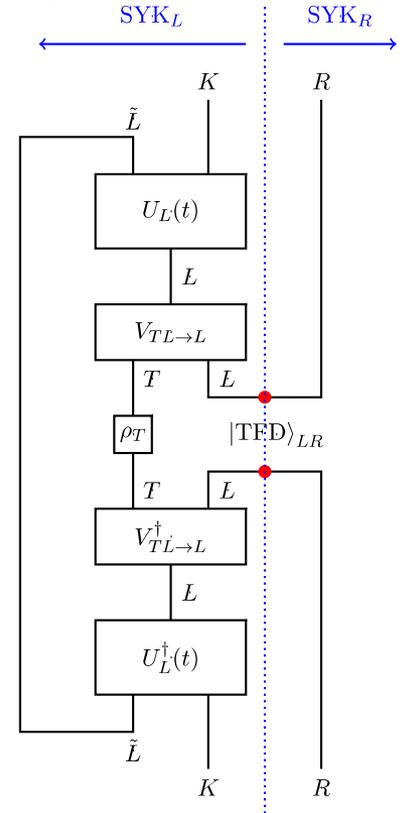
$$\mathcal{N}_{T \rightarrow K, R}^{\text{SYK}}[\rho_T] := \text{tr}_{\tilde{L}} \left[U_L V_{T, L \rightarrow L} \left(\rho_T \otimes |\text{TFD}\rangle_{L, R} \langle \text{TFD}| \right) V_{T, L \rightarrow L}^\dagger U_L^\dagger \right]$$

$$\mathcal{N}_{K, R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger}[\mathcal{O}_{KR}] := \text{tr}_{L, R} \left[|\text{TFD}\rangle_{L, R} \langle \text{TFD}| \left(V_{L \rightarrow T, L}^\dagger U_L^\dagger \mathcal{O}_{KR} U_L V_{L \rightarrow T, L} \right) \right]$$

2次元の code subspace への埋め込み

$$(V_{T, L \rightarrow L} \otimes I_R) \left(|T\rangle_T \otimes |\text{TFD}\rangle_{L, R} \right) := \begin{cases} |\text{TFD}\rangle_{L, R} & \text{for } T = 0 \\ \frac{1}{(Z_\delta)^{\frac{1}{2}}} \psi_{i, L}(i\delta) |\text{TFD}\rangle_{L, R} & \text{for } T = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_{i, L}(i\delta) = e^{-\delta H_L} \psi_{i, L}(0) e^{\delta H_L} \\ Z_\delta = \frac{1}{N-K} \sum_{i=1}^{N-K} \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} \left[e^{-\beta H_L} \psi_{i, L}(-i\delta) \psi_{i, L}(i\delta) \right] = G_\beta(2\delta) \end{cases}$$



Petz lite は次のようになる

$$\mathcal{R}_{K, R \rightarrow T}^{\text{Lite, SYK}}[\mathcal{O}_{KR}] = \frac{\langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_\beta}{1 + \langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_\beta} \langle 1 | \mathcal{N}_{K, R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} \left[\mathcal{N}_{T \rightarrow K, R}^{\text{SYK}}[|0\rangle_T \langle 0|] \right] | 1 \rangle \mathcal{N}_{K, R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger}[\mathcal{O}_{KR}]$$

$$\langle 0 | \mathcal{N}_{K, R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} \left[\mathcal{N}_{T \rightarrow K, R}^{\text{SYK}}[|0\rangle_T \langle 0|] \right] | 0 \rangle = \text{tr}_{KR} \left[(\rho_{KR})^2 \right] = \text{tr}_{\tilde{L}} \left[(\rho_{\tilde{L}})^2 \right] =: \frac{1}{\langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_\beta}$$

復元可能性を表す行列要素

$$\langle T | \mathcal{R}_{K,R \rightarrow T}^{\text{Lite, SYK}} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}}[\rho_T]] | T' \rangle \stackrel{?}{\approx} \langle T | \rho_T | T' \rangle \quad \text{for } \forall \rho_T$$

$j_{i_1 i_2 \dots i_q}$ について非線形

$$\langle T | \mathcal{R}_{K,R \rightarrow T}^{\text{Lite, SYK}} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [| \tilde{T} \rangle_T \langle \tilde{T}' |]] | T' \rangle \stackrel{?}{\approx} \langle T | \tilde{T} \rangle \langle \tilde{T}' | T' \rangle, \quad \forall T, T', \tilde{T}, \tilde{T}'$$

の16個の行列要素を調べれば良い。

例えば次の2つの行列要素を考える：

$$0 \stackrel{?}{\approx} \langle 1 | \mathcal{R}_{K,R \rightarrow T}^{\text{Lite, SYK}} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [| 0 \rangle_T \langle 0 |]] | 1 \rangle = \frac{\langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_{\beta} \cdot \langle 1 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [| 0 \rangle_T \langle 0 |]] | 1 \rangle}{1 + \langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_{\beta} \cdot \langle 1 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [| 0 \rangle_T \langle 0 |]] | 1 \rangle}$$

$$1 \stackrel{?}{\approx} \langle 0 | \mathcal{R}_{K,R \rightarrow T}^{\text{Lite, SYK}} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [| 0 \rangle_T \langle 1 |]] | 1 \rangle = \frac{\langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_{\beta} \cdot \langle 0 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [| 0 \rangle_T \langle 1 |]] | 1 \rangle}{1 + \langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_{\beta} \cdot \langle 1 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [| 0 \rangle_T \langle 0 |]] | 1 \rangle}$$

$$\langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_{\beta} \cdot \langle 1 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [| 0 \rangle_T \langle 0 |]] | 1 \rangle \stackrel{?}{\approx} 0$$

$$\langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_{\beta} \cdot \langle 0 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [| 0 \rangle_T \langle 1 |]] | 1 \rangle \stackrel{?}{\approx} 1$$

} 確かめる

Petz liteによる復元可能性と復元にかかる時間

調べるべき行列要素は次のようなmodular flowed correlator (MFC)に変形できる(論文のappendix参照)

$$\langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_{\beta} \cdot \langle 1 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [|0\rangle_T \langle 0|]] | 1 \rangle = \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot \frac{\langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(t-i\delta) (I_{\tilde{L}} \otimes \rho_{KR}) \psi_{i,L}(t+i\delta) | \text{TFD} \rangle}{\text{tr}_{KR} [(\rho_{KR})^2]}$$

$$\langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_{\beta} \cdot \langle 0 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [|0\rangle_T \langle 1|]] | 1 \rangle = \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot \frac{\langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(t-i\delta) (\rho_{\tilde{L}} \otimes I_{KR}) \psi_{i,L}(t+i\delta) | \text{TFD} \rangle}{\text{tr}_{KR} [(\rho_{KR})^2]}$$

$$\rho_{\tilde{L}} = \text{tr}_{KR} [|\text{TFD}\rangle_{LR} \langle \text{TFD}|], \quad \rho_{KR} = \text{tr}_{\tilde{L}} [|\text{TFD}\rangle_{LR} \langle \text{TFD}|]$$

$\psi_{i,L}$ が \tilde{L} ($N-K$ sites) に挿入されるとし、またlarge N より次のようにMFCの平均を取る

$$\frac{1}{Z_{\delta}} \cdot \frac{\langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(t-i\delta) (I_{\tilde{L}} \otimes \rho_{KR}) \psi_{i,L}(t+i\delta) | \text{TFD} \rangle}{\text{tr}_{KR} [(\rho_{KR})^2]} \rightarrow \frac{1}{N-K} \sum_{i=1}^{N-K} \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot \frac{\langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(t-i\delta) (I_{\tilde{L}} \otimes \rho_{KR}) \psi_{i,L}(t+i\delta) | \text{TFD} \rangle}{\text{tr}_{KR} [(\rho_{KR})^2]}$$

$$\frac{1}{Z_{\delta}} \cdot \frac{\langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(t-i\delta) (\rho_{\tilde{L}} \otimes I_{KR}) \psi_{i,L}(t+i\delta) | \text{TFD} \rangle}{\text{tr}_{KR} [(\rho_{KR})^2]} \rightarrow \frac{1}{N-K} \sum_{i=1}^{N-K} \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot \frac{\langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(t-i\delta) (\rho_{\tilde{L}} \otimes I_{KR}) \psi_{i,L}(t+i\delta) | \text{TFD} \rangle}{\text{tr}_{KR} [(\rho_{KR})^2]}$$

SYK模型のMFCの計算方法は [Chandrasekaran-Levine \[arXiv: 2203.05058\]](https://arxiv.org/abs/2203.05058) で研究されている

Petz liteによる復元可能性と復元にかかる時間

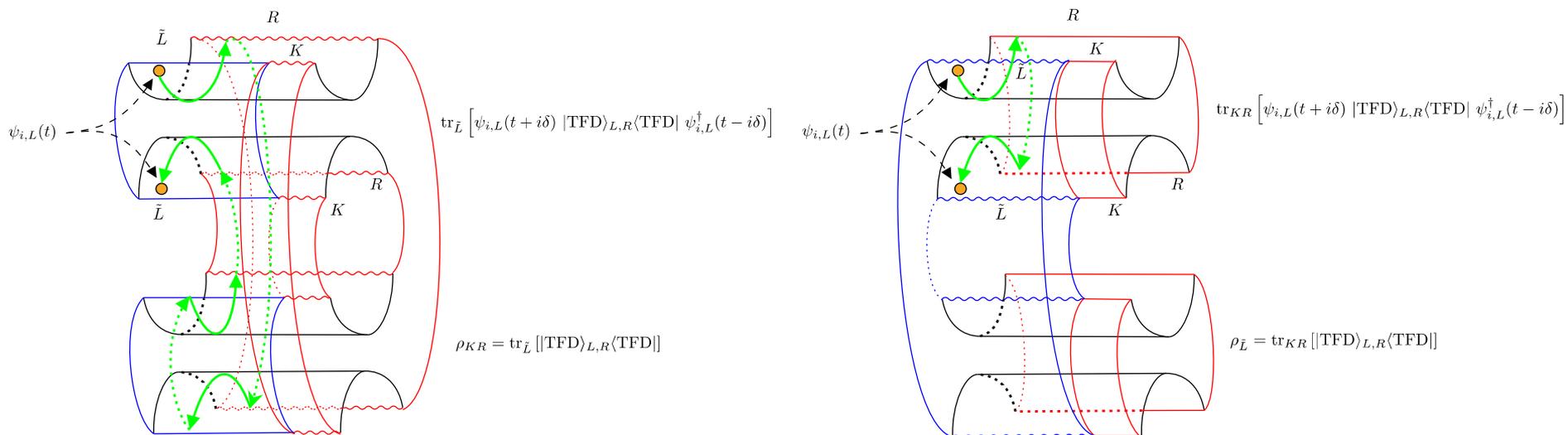
SD eq.を解くと $\frac{K}{N} \ll 1$ 展開でEuclidean timeで次のように求められる ($1 \ll \beta J \ll N/K$)

$$\frac{1}{N-K} \sum_{i=1}^{N-K} \frac{\langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(\tau) (I_{\tilde{L}} \otimes \rho_{KR}) \psi_{i,L}(\tau') | \text{TFD} \rangle}{\text{tr}_{KR} [(\rho_{KR})^2]} \longrightarrow \text{分子は } \text{tr}_{KR} \left[\text{tr}_{\tilde{L}} \left[\psi_{i,L}(t+i\delta) | \text{TFD} \rangle_{L,R} \langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(t-i\delta)^\dagger \right] \rho_{KR} \right]$$

$$= G_{2\beta}(\tau + 2\beta - \tau') + 2\frac{K}{N} (\mathcal{F}(\tau + 2\beta, \tau'; \beta, 0) - \mathcal{F}_0(\tau + 2\beta, \tau'; \beta, 0)) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{K}{N} \right)^2 \right) \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{1}{N-K} \sum_{i=1}^{N-K} \frac{\langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(\tau) (\rho_{\tilde{L}} \otimes I_{KR}) \psi_{i,L}(\tau') | \text{TFD} \rangle}{\text{tr}_{KR} [(\rho_{KR})^2]} \longrightarrow \text{分子は } \text{tr}_{\tilde{L}} \left[\text{tr}_{KR} \left[\psi_{i,L}(t+i\delta) | \text{TFD} \rangle_{L,R} \langle \text{TFD} | \psi_{i,L}(t-i\delta)^\dagger \right] \rho_{\tilde{L}} \right].$$

$$= G_{2\beta}(\tau + \beta - \tau') + 2\frac{K}{N} (\mathcal{F}(\tau + \beta, \tau'; \beta, 0) - \mathcal{F}_0(\tau + \beta, \tau'; \beta, 0)) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{K}{N} \right)^2 \right) \quad \text{--- ②}$$



Petz liteによる復元可能性と復元にかかる時間

SYKの4点関数の計算 : Maldacena-Stanford [arXiv: 1604.07818]
Trunin [arXiv: 2002.12187]

$\tau \rightarrow -it - \delta, \tau' \rightarrow -it + \delta$ と解析接続すると

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{F}(-it - \delta + 2\beta, -it + \delta; \beta, 0) = 2G_{2\beta}(2\beta - 2\delta)G_{2\beta}(\beta) \cdot \frac{2\beta J}{q^2\pi C} \left[1 - \frac{\pi \cosh\left(\frac{\pi}{\beta}t\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi\delta}{\beta}\right)} \right] \quad (\text{OTOC}) \quad G_\beta(\tau) = b \left[\frac{\pi}{\beta \sin \frac{\pi\tau}{\beta}} \right]^{\frac{2}{q}}$$

➡ $0 \stackrel{?}{\approx} \langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_\beta \cdot \langle 1 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [|0\rangle_T \langle 0|]] | 1 \rangle \approx \frac{G_{2\beta}(2\beta - 2\delta)}{G_\beta(2\delta)} \left[1 - \frac{G_{2\beta}(\beta)}{\sin\left(\frac{\pi\delta}{\beta}\right)} \cdot \frac{2\beta J}{q^2 C} \cdot \frac{K}{N} \exp\left(\frac{\pi}{\beta}t\right) \right]$

$$\frac{K}{N} \exp\left(\frac{\pi}{\beta}t_*\right) \sim 1 \quad \Rightarrow \quad t_* = \frac{\beta}{\pi} \log\left(\frac{N}{K}\right) = 2t_{\text{Scram}}$$

$$t_{\text{Scram}} = \frac{\beta}{2\pi} \log\left(\frac{N}{K}\right) \quad (\text{scrambling time})$$

$$= \exp\left(\frac{\lambda_L}{2}(t - 2t_{\text{Scram}})\right)$$

$$\lambda_L = \frac{2\pi}{\beta} \quad (\text{Lyapunov指数})$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{F}(-it - \delta + \beta, -it + \delta; \beta, 0) = -2G_{2\beta}(\beta - 2\delta)G_{2\beta}(\beta) \cdot \frac{2\beta J}{q^2\pi C} \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\delta}{\beta}\right) \tan\left(\frac{\pi\delta}{\beta}\right) \right] \quad J^2 b^q \pi = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \tan \frac{\pi}{q}$$

➡ $1 \stackrel{?}{\approx} \langle \hat{d}_{\tilde{L}} \rangle_\beta \cdot \langle 0 | \mathcal{N}_{K,R \rightarrow T}^{\text{SYK}\dagger} [\mathcal{N}_{T \rightarrow K,R}^{\text{SYK}} [|0\rangle_T \langle 1|]] | 1 \rangle \approx \frac{G_{2\beta}(\beta - 2\delta)}{G_\beta(2\delta)} \left[1 - G_{2\beta}(\beta) \cdot \frac{8\beta J}{q^2\pi C} \cdot \frac{K}{N} \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\delta}{\beta}\right) \tan\left(\frac{\pi\delta}{\beta}\right) \right] \right]$

スクランブリング時間の2倍だけ待てば復元に成功する！
スクランブリングと復元に、それぞれスクランブリング時間だけかかる

まとめ

結論

Hayden-Preskillの $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ ランダム行列} \\ \textcircled{2} \text{ SYK模型} \end{array} \right\}$ によるセットアップに対して、
スクランブリングチャンネル

どちらもPetz 復元写像の簡略版である **Petz lite** 復元写像で情報復元できることを示した。

- ① Haar測度での平均の計算をレプリカワームホールのような計算に帰着させて
相対エントロピーを評価 \longrightarrow デカップリング条件を満たすとき、Petz liteで復元可能
- ② 復元できているかを表す行列要素を modular flowed correlator に帰着させて評価
 $\longrightarrow 1 \ll \beta J \ll N/K$ のとき、スクランブリング時間の2倍待てば、Petz liteで復元可能

展望

- SYK模型の $\beta J \ll 1$ の領域での解析
- カオス的でない相互作用での解析
- 2次元CFTなどへの拡張
- bulk側での直接計算 など

ブラックホール内部の物理の解明に向けた研究に、Hayden-Preskillのセットアップや、Petz 復元写像の方法を用いるのは有効である。
場の理論による解析も合わせて、このテーマのさらなる発展が期待される。

[補足] Petz復元写像の構成

Knill-Laflamme条件 $P_{code} E_i^\dagger E_j P_{code} = \alpha_{ij} P_{code}$ を仮定して、復元写像が構成できることを示す。

α はエルミートなので、対角化できる: $d = u^\dagger \alpha u$

このユニタリ一行列を用いて $\{E_i\}$ と等価な Kraus 演算子 $F_k \equiv \sum_i E_i u_{ik}$ を作ると、Knill-Laflamme条件は

$$P_{code} F_k^\dagger F_l P_{code} = d_{kl} P_{code}$$

と対角化できる。 $F_k P_{code}$ を極分解すると

$$\begin{aligned} F_k P_{code} &= U_k \sqrt{P_{code} F_k^\dagger F_k P_{code}} \\ &= \sqrt{d_{kk}} U_k P_{code} \\ &= \sqrt{d_{kk}} U_k P_{code} U_k^\dagger U_k \\ &= \sqrt{d_{kk}} P_k U_k \equiv \sqrt{p_k} w_k \end{aligned}$$

ユニタリ一行列 U_k で回して P_k で射影している U_k^\dagger で回し直せば復元できる

$$d_{kl} = p_k \delta_{kl}$$

$$P_k \equiv U_k P_{code} U_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{d_{kk}}} F_k P_{code} U_k^\dagger \text{ とおいた。}$$

$$\mathcal{R} : B(\mathcal{K}) \rightarrow B(\mathcal{H}) \text{ として } \mathcal{R}[\mathcal{O}] \equiv \sum_k U_k^\dagger P_k \mathcal{O} P_k U_k = \sum_j w_j^\dagger \mathcal{O} w_j$$

というようにとれば $\mathcal{R}[\mathcal{N}[\rho]] = \rho$ となる。

[補足] Petz復元写像の構成

σ を $B(\mathcal{H}_{code})$ に含まれる任意の演算子として、

$$w_j^\dagger = \sigma^{\frac{1}{2}} F_j^\dagger \mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}}$$

と表せる。これを用いて

$$w_j = \mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}} F_j \sigma^{\frac{1}{2}}$$

となる。これらを前頁の復元写像の表式に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\mathcal{O}] &= \sum_j w_j^\dagger \mathcal{O} w_j \\ &= \sum_j \sigma^{\frac{1}{2}} F_j^\dagger \mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{O} \mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}} F_j \sigma^{\frac{1}{2}} \\ &= \sigma^{\frac{1}{2}} \mathcal{N}^\dagger \left[\mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{O} \mathcal{N}[\sigma]^{-\frac{1}{2}} \right] \sigma^{\frac{1}{2}} \equiv \mathcal{R}_{\sigma, \mathcal{N}}^{Petz}[\mathcal{O}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\rho] &= \mathcal{N}[P_{code} \rho P_{code}] \\ &= \sum_i F_i P_{code} \rho P_{code} F_i^\dagger \\ &= \sum_i p_i w_i \rho w_i^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (rhs) &= \sigma^{\frac{1}{2}} P_{code} F_j^\dagger \left(\sum_i p_i w_i \sigma w_i^\dagger \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sigma^{\frac{1}{2}} w_j^\dagger \sqrt{p_j} \left(\sum_i \frac{1}{\sqrt{p_i}} w_i \sigma^{-\frac{1}{2}} w_i^\dagger \right) \\ &= \sigma^{\frac{1}{2}} P_{code} \sigma^{-\frac{1}{2}} w_j^\dagger \\ &= w_j^\dagger \end{aligned}$$

adjoint channelのKraus表現

$$\mathcal{N}^\dagger[\mathcal{O}] = \sum_i E_i^\dagger \mathcal{O} E_i \text{ を用いた}$$

となる。最後の表式をPetz復元写像という。

復元写像として、Petz復元写像より一般のものも知られている。 [Wilde \[arXiv: 1106.1445\]](#) を参照