完全WKB解析を用いたブラックホール準固有振動の解析

D3 宮地大河（神戸大　素粒子宇宙理論研究室）

W/難波亮 (iTHEMS), 大下翔誉 (京大白眉セ), 大宮英俊 (京大理)

Based on : in progress work

2024/9/11 熱場の量子論とその応用 ＠YITP

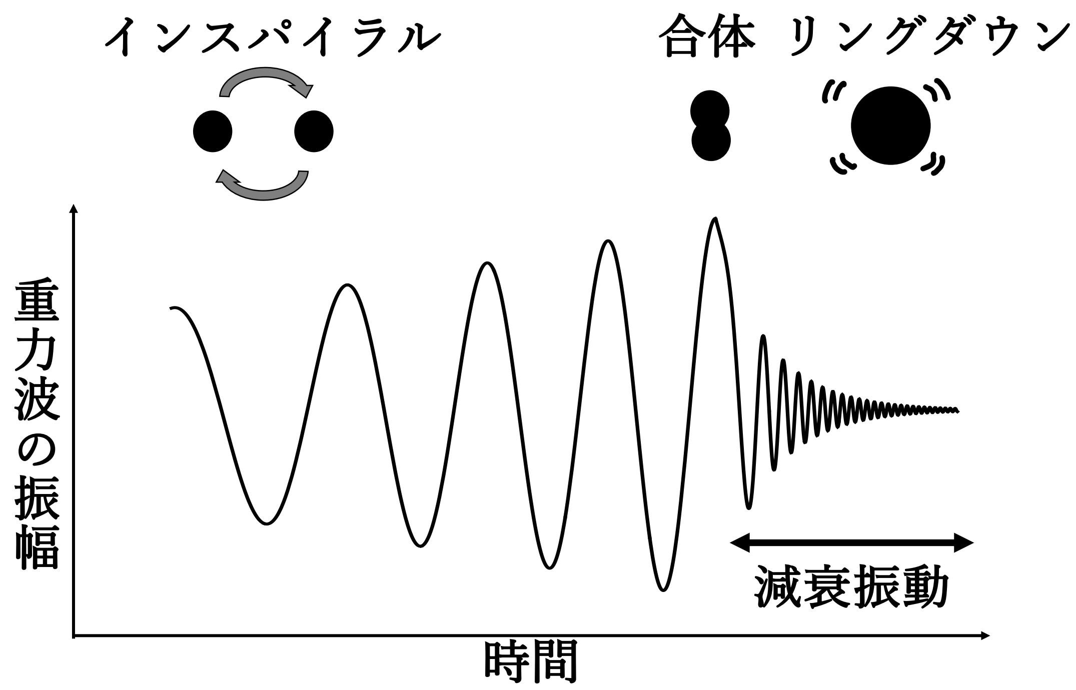
目次

1. ブラックホール準固有振動
2. 完全WKB解析
3. 一般相対論の場合 [Andersson, Howls (2003)]
4. 一般相対論を超えた重力理論の場合 (our work)
5. まとめと展望

目次

ブラックホール準固有振動

・ブラックホール同士の衝突で生じる重力波



・準固有振動：減衰振動を特徴付ける複素振動モード

$$\omega = \omega_{Re} - i\omega_{Im}$$ （BHの情報が埋め込まれている）

・ゲージ・重力対応（散逸系）

Regge-Wheeler 方程式

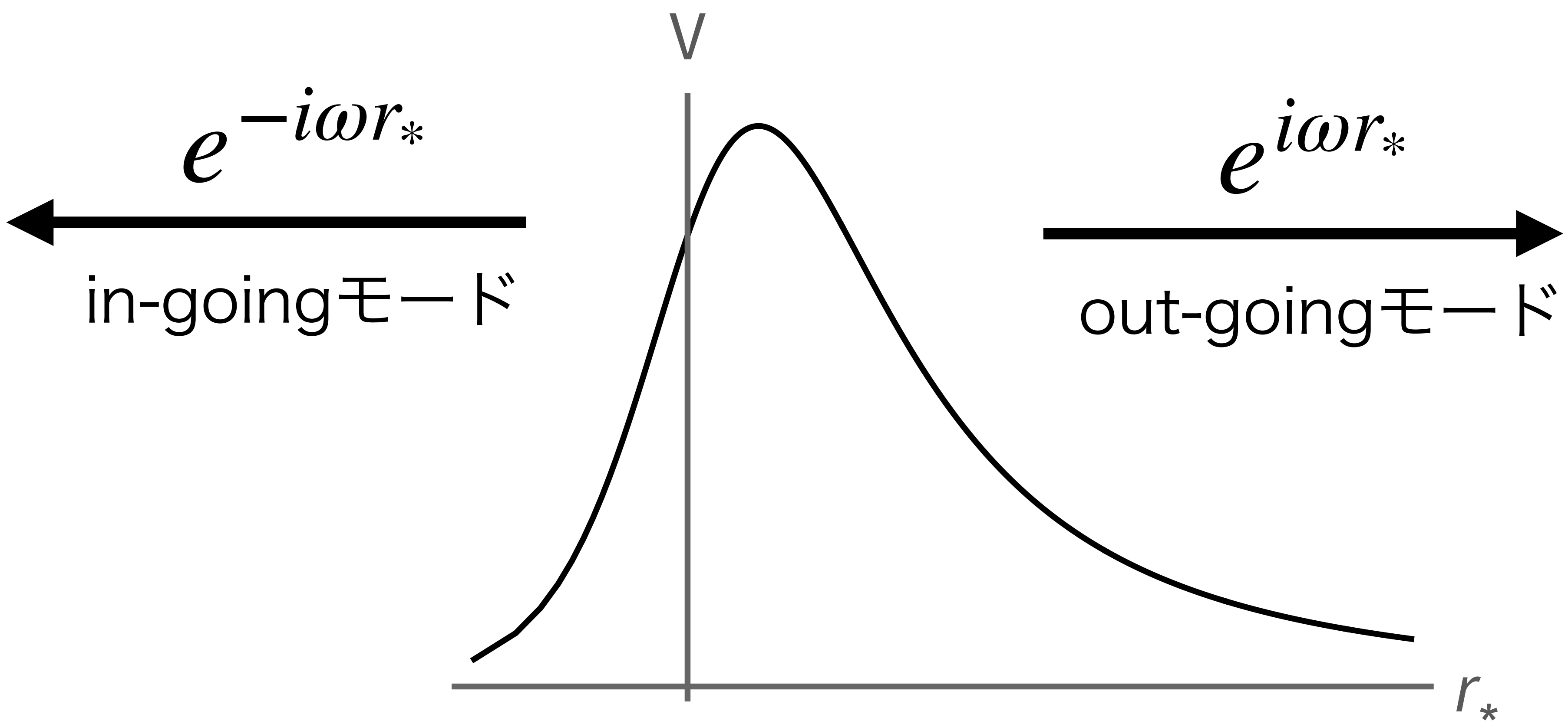
・球対称なBHにおける重力場の摂動方程式 (2GM=1)

$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2}+V(r)\right)R=\omega^2 R, \quad \left(V=f\left[\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{3}{r^3}\right], \quad f(r)=1-\frac{1}{r}\right)$$

$$h_{\mu\nu}\sim e^{-i\omega t}R_l(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

亀座標： $r_* = r - \log(r-1)$

・境界条件



QNMの数値計算

Leaver (1985)

$Re[\omega]$ が有限の値に収束

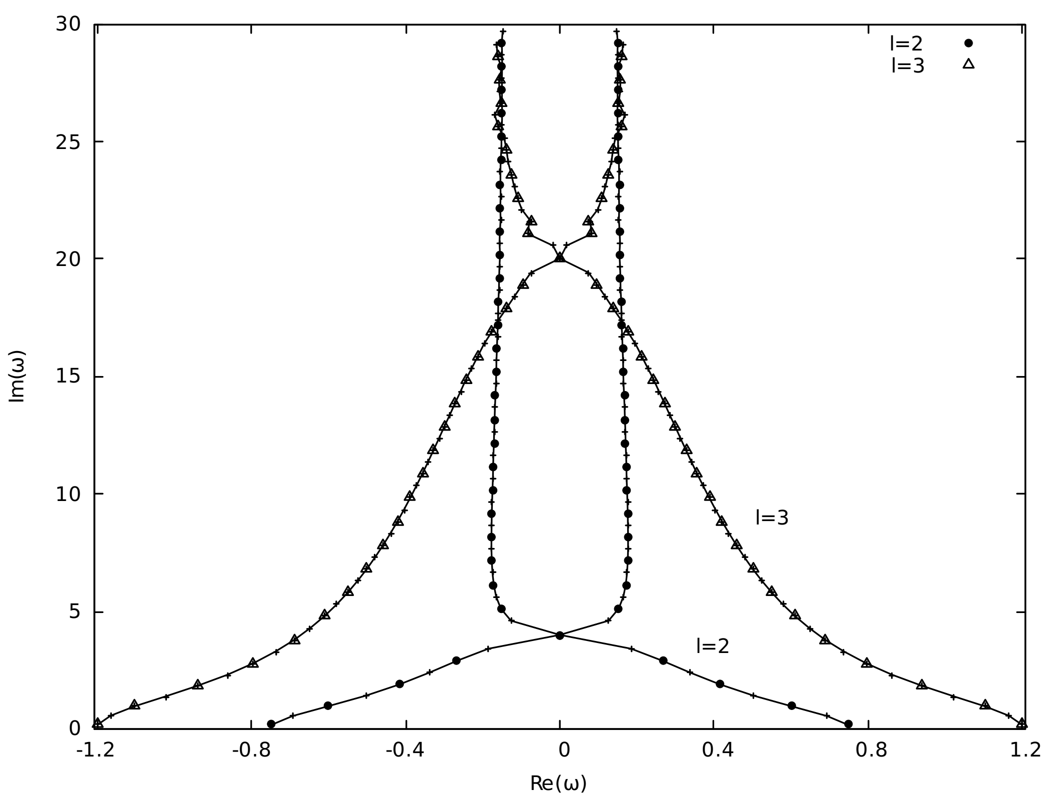


Figure 1. First 60 Schwarzschild gravitational quasi-normal frequencies for $l = 2$ and $l = 3$. The odd order frequencies are prominently marked; a few even-order frequencies are indicated as short bars perpendicular to the curves connecting the points.

・ω は次のような値になることが解析的に示されている。

[Andersson, Howls (2003)]

$$\omega = \frac{\log 3}{4\pi} - \frac{i}{4}(2N+1), \quad (\text{for large}\, N)$$

(Schwarzschild BH)

・一般相対論を超えた重力理論の場合に、大きなNに対してωはどのように振舞うのか？

目次

完全WKB解析

完全WKB解析：
(2階)常微分方程式の解の大域的挙動を近似なしで与える
数学的手法。特に固有値問題で有用。

利点:
特殊関数の知識を用いずに解析接続できる。

物理への応用例：
・粒子生成（Bogoliubov係数の導出）
・量子化条件の導出
・ブラックホール準固有振動 (today’s topic)
・etc

WKB解

・シュレディンガー型微分方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\eta^2 Q(x)\right)\psi=0$$

（η：大きい摂動パラメータ）

・$\psi = e^{\int^x S\,dx}$ とおいて摂動的に解くとWKB解が得られる

$$S=\eta S_{-1}+S_0+\eta^{-1}S_1+\eta^{-2}S_2+\cdots$$

$$\psi_{\pm}^{WKB}=\frac{1}{\sqrt{S_{odd}}}e^{\pm\int_{x_0}^{x} S_{odd}dx} \qquad \begin{cases} S_{odd}=\eta S_{-1}+\eta^{-1}S_1+\eta^{-3}S_3+\cdots \\ S_{-1}=\sqrt{Q} \end{cases}$$

・$S_{odd}\sim\eta\sqrt{Q(x)}$ まで取るのがよくあるWKB近似

・このWKB級数は無限に足し上げるとn!程度で発散する

Borel 総和法

・形式級数 $f = e^{\eta s}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \eta^{-n-\alpha}$ (s, f_n, α は η に依存しない定数)

・Borel 変換 $f_B(y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma(n+\alpha)}(y+s)^{n+\alpha-1}$

・Borel和 $F(\eta) := \int_s^{\infty} e^{-\eta s} f_B(y)dy$

$F(\eta)$ が収束する時、形式級数 f はBorel総和可能。

・このBorel総和法をWKB解に適用し、解析的な意味を持たせるのが、完全WKB解析の骨子。[Voros(1983), 青木, 河合, 竹井]

$$\psi_{\pm}^{WKB} = \frac{1}{\sqrt{S_{odd}}} e^{\pm\int_{x_0}^{x} S_{odd}dx} = e^{\pm\eta\int_{x_0}^{x}\sqrt{Q(x)}dx}\sum_{n=0}^{\infty} f_{\pm,n}(x)\,\eta^{-n-1/2}$$

Stokes曲線と接続公式

・Stokes曲線：$Im\sqrt{Q(x)}dx = 0$ で定義される複素平面上の曲線

・Stoke曲線を横切ると、以下のStokes現象が起こる

- ψ_+ is dominant

$$\begin{cases} \psi_+ \to \psi_+ + i\psi_- \\ \psi_- \to \psi_- \end{cases}, \quad \left(Re\int_{x_0}^{x} \sqrt{Q(x)} > 0 \right)$$

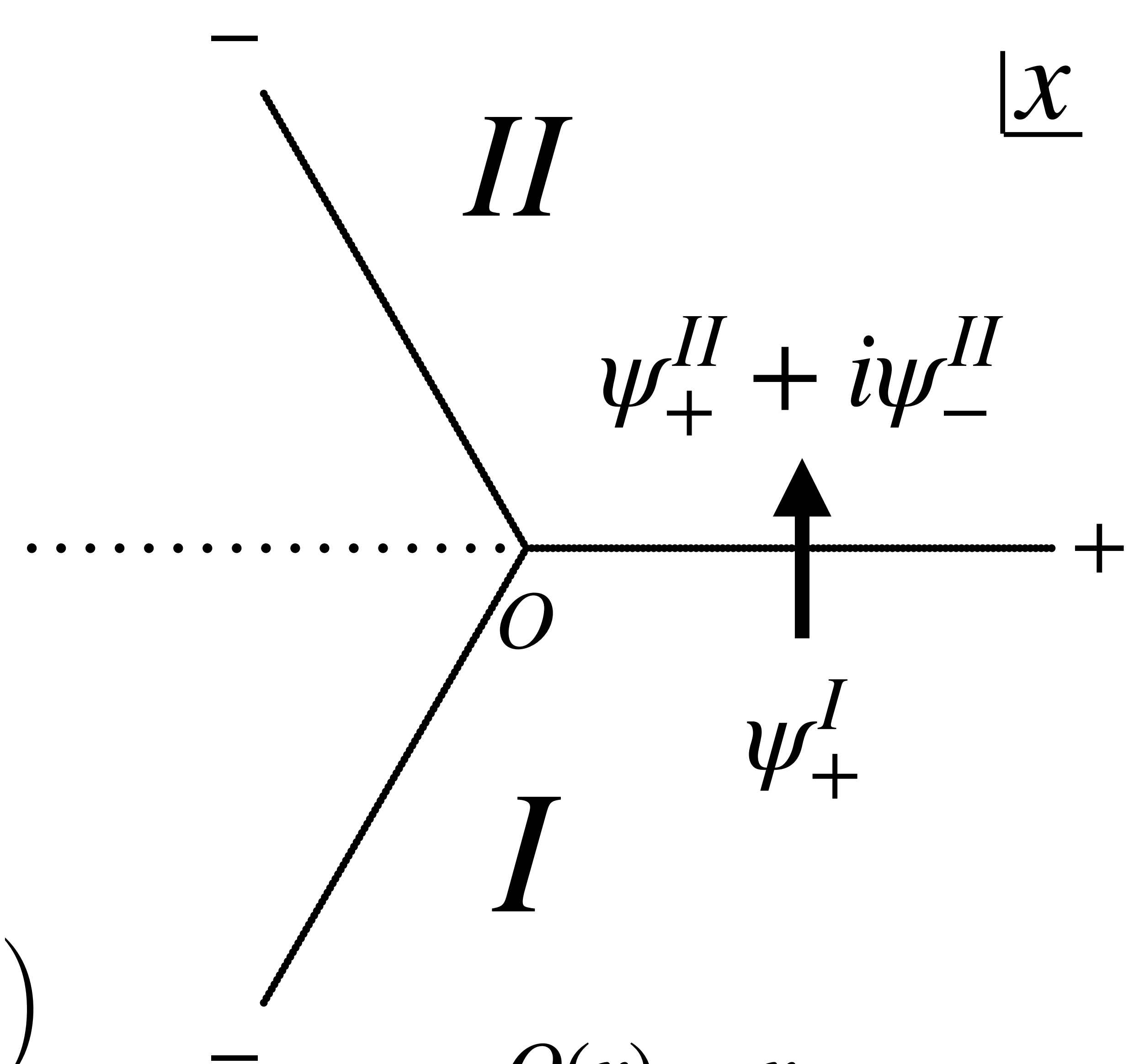
- ψ_- is dominant

$$\begin{cases} \psi_+ \to \psi_+ \\ \psi_- \to \psi_- + i\psi_- \end{cases}, \quad \left(Re\int_{x_0}^{x} \sqrt{Q(x)} < 0 \right)$$

注）積分の下端は変わり点に取る

・行列で表すと便利

$$V_+ = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \to V_\pm \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$



$Q(x) = x$

目次

方程式の書き直し

・Regge-Wheeler 方程式 ($\psi = f^{1/2}R$)

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2}+\eta^2 Q(r)\right)\psi = 0, \quad Q = Q_0 + \eta^{-2}Q_2$$

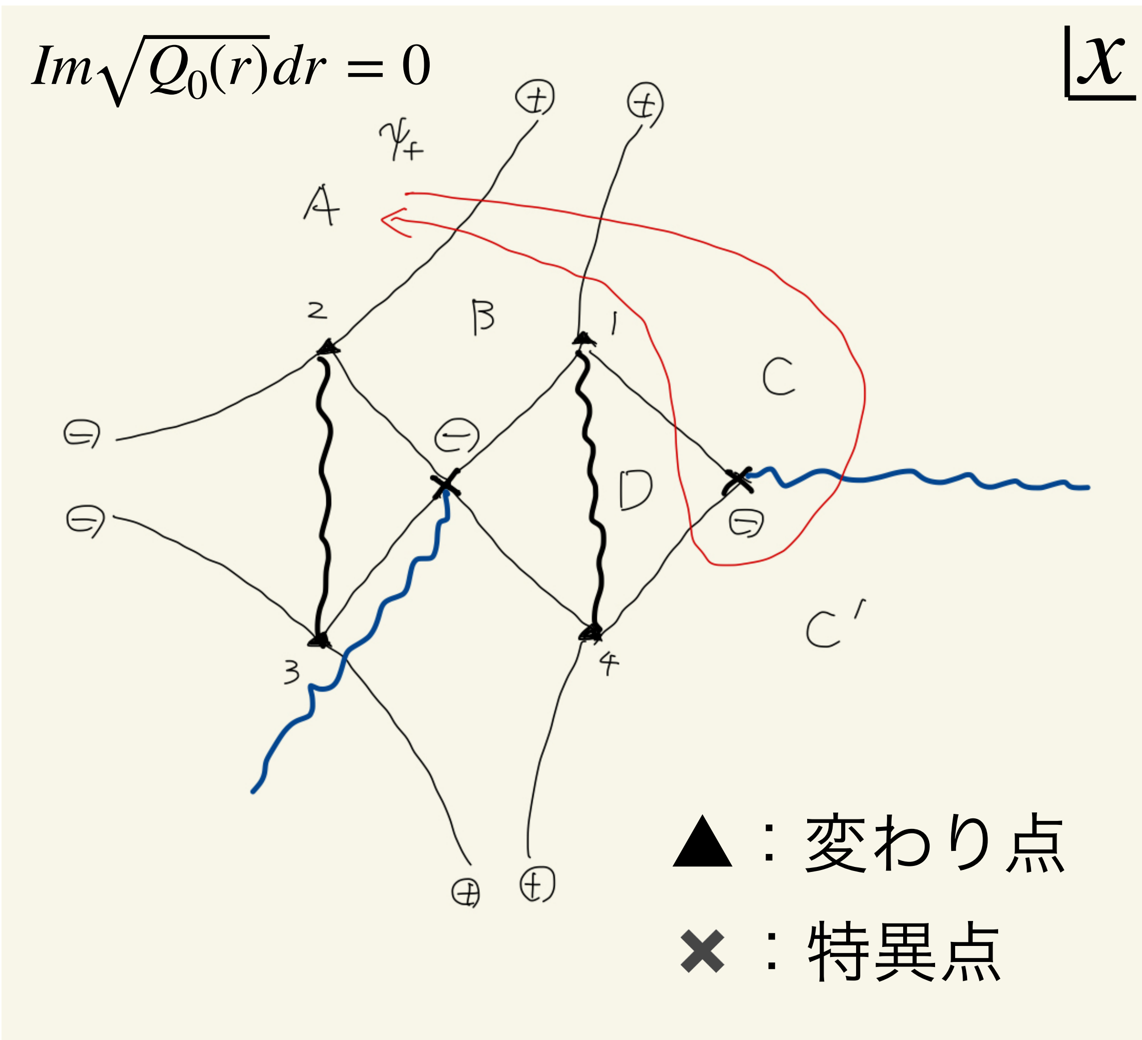
$$Q_0(r) = -\frac{\Omega^2 r^4 - (r-1)(l(l+1)r-4)}{r^2(r-1)^2}, \quad Q_2(r) = -\frac{1/4}{r^2(r-1)^2}$$

・η は大きな摂動パラメータ（あとで $\eta = 1$ にとる）

・Q_0 はWKB解の漸近形がLeadingで正しくなるように取る。

$$R = f^{-1/2}\psi \sim \begin{cases} e^{-i\omega r_*} & (r_* \to -\infty) \\ e^{i\omega r_*} & (r_* \to \infty) \end{cases} \sim \begin{cases} (r-1)^{-i\omega} & (r \to 1) \\ e^{i\omega r} r^{i\omega} & (r \to \infty) \end{cases}$$

Stokes曲線 (Schwarzschild)



・黒い波線は$\sqrt{Q_0}$の分岐線

・青い波線は$Q_0^{1/4}$の分岐線

（実は先行研究では触れてない）

・赤線に沿って解析接続すると

$$\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}^A \to M\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}^A$$

$$M = V_+^{-1}\Gamma_{21}V_+^{-1}D_1^{-1}\Gamma_{14}V_-\Gamma_{41}V_-V_+\Gamma_{12}V_+$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{pmatrix}u_{ij} & 0\\ 0 & u_{ij}^{-1}\end{pmatrix},\quad u_{ij} = \exp\left(\int_{r_i}^{r_j} S_{odd}\,dr\right)$$

基準点の切り替え

$$D_1 = \begin{pmatrix}\nu_i^+ & 0\\ 0 & \nu_i^-\end{pmatrix},\quad \nu_i^{\pm} = \exp\left(i\pi(1 \pm 2\operatorname*{Res}_{\rho=1} S_{odd})\right) = e^{i\pi(1\pm 2i\eta\omega)}$$

青い分岐線の寄与

準固有振動の条件式

・無限遠点でのout-going modeに対応するψ_+^A について

$$\psi_+^A \to M_{11}(\omega)\psi_+^A + M_{12}(\omega)\psi_-^A$$

・out-going 境界条件を考慮すると

$M_{12}(\omega) = 0$ 準固有振動の条件式！

・具体的に書き下すと次のようになる（ここまでは近似無し）

$$\omega = \frac{1}{4\pi}\log\left(u_{41}^2 + u_{12}^2(u_{41}^2 + 1)\right) - \frac{i}{4}(2N+1)$$

・$|Im\,\omega| \gg 1$の仮定の下で $u_{12}^2 \sim u_{41}^2 \sim 1$ なので $\left(u_{ij} = e^{\int_{r_1}^{r_2} S_{odd}\,dr} \sim e^{\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{Q_0}\,dr}\right)$

$$\omega \sim \frac{\log 3}{4\pi} - \frac{i}{4}(2N+1)$$

数値計算の結果を再現！

[Andersson, Howls (2003)]

目次

1. ブラックホール準固有振動
2. 完全WKB解析
3. 一般相対論の場合 [Andersson, Howls (2003)]
4. 一般相対論を超えた重力理論の場合 (our work)
5. まとめと展望

Parametrized BH

・強重力下(BH近傍)では一般相対論に補正が必要かもしれない。

・Parametrized BH [Cardoso, Kimura, Maselli, Berti (2019)]

$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2}+V(r)\right)R=\omega^2 R \qquad V=V_{RW}+\delta V$$

$$V_{RW}=f\left(\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{3}{r^3}\right), \quad \delta V=\sum_{j=0}^{\infty}\delta V_j=f\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_j}{r^j} \qquad \alpha_j：定数$$

・α_j の取り方で色々な重力理論を再現する。

・この重力理論でLarge N の ω はどうなっているだろうか。

・今回は δV_3 を考えてみる。

$V_{RW} + \delta V_3$ の場合

$$Q_0(r) = -\frac{\Omega^2 r^4 - (r-1)(l(l+1)x - 4 + \alpha_3)}{r^2(r-1)^2}$$

単に$4 \to 4 - \alpha_3$ の置き換え

・Stokes構造は$\alpha_3 < 4$ならら変わらないので、Schwarzschildとほぼ同じ条件式が出る。

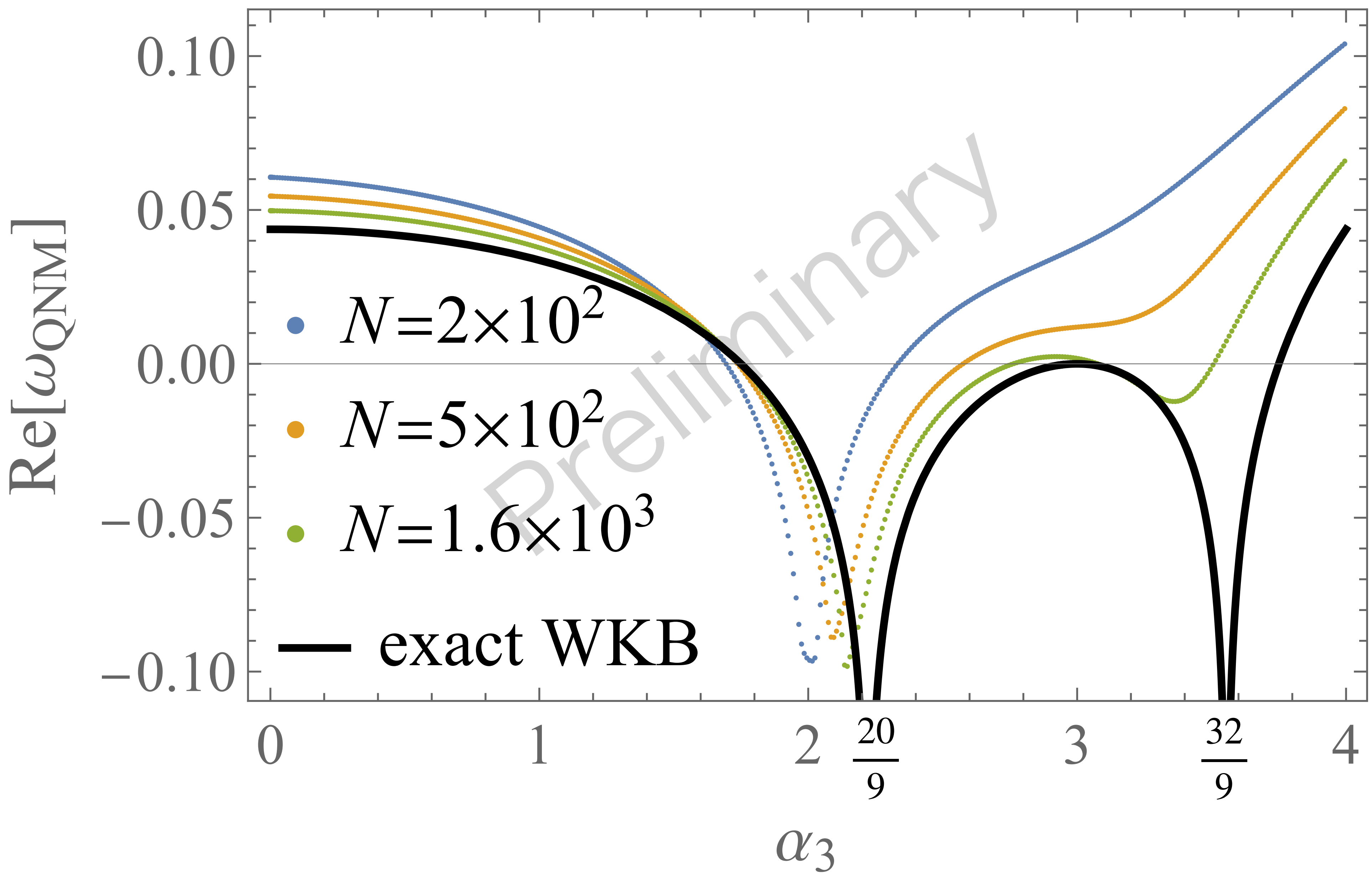
（$\alpha_3 \geq 4$ はStokes曲線の縮退が起こって計算が難しいので今回は考えない。）

・$|Im\,\omega| \gg 1$の仮定の下でωの実部が以下のように変更される。

$$\omega \sim \frac{1}{4\pi}\log(1 + 2\cos\pi\sqrt{4-\alpha_3}) - \frac{i}{4}(2N+1)$$

・特に $\alpha_3 = \frac{20}{9}, \frac{32}{9}$ の時 $\log 0$ になって発散する。

数値計算との比較



・Large NでExact WKBの予言に近づいている。

・ずれはsub-leading で$N^{-1/2}$の寄与があるため。

まとめと展望

まとめ

・完全WKB解析を用いると、ブラックホール準固有振動の条件式を導出できる。

・Parametrized BHの場合(δV_3)、特定のパラメータで $Re\,\omega$ の発散が見られた。

展望と課題

・$j \geq 4$のδV_jの場合 (in progress)

・small N への適用

・回転ブラックホールへの適用

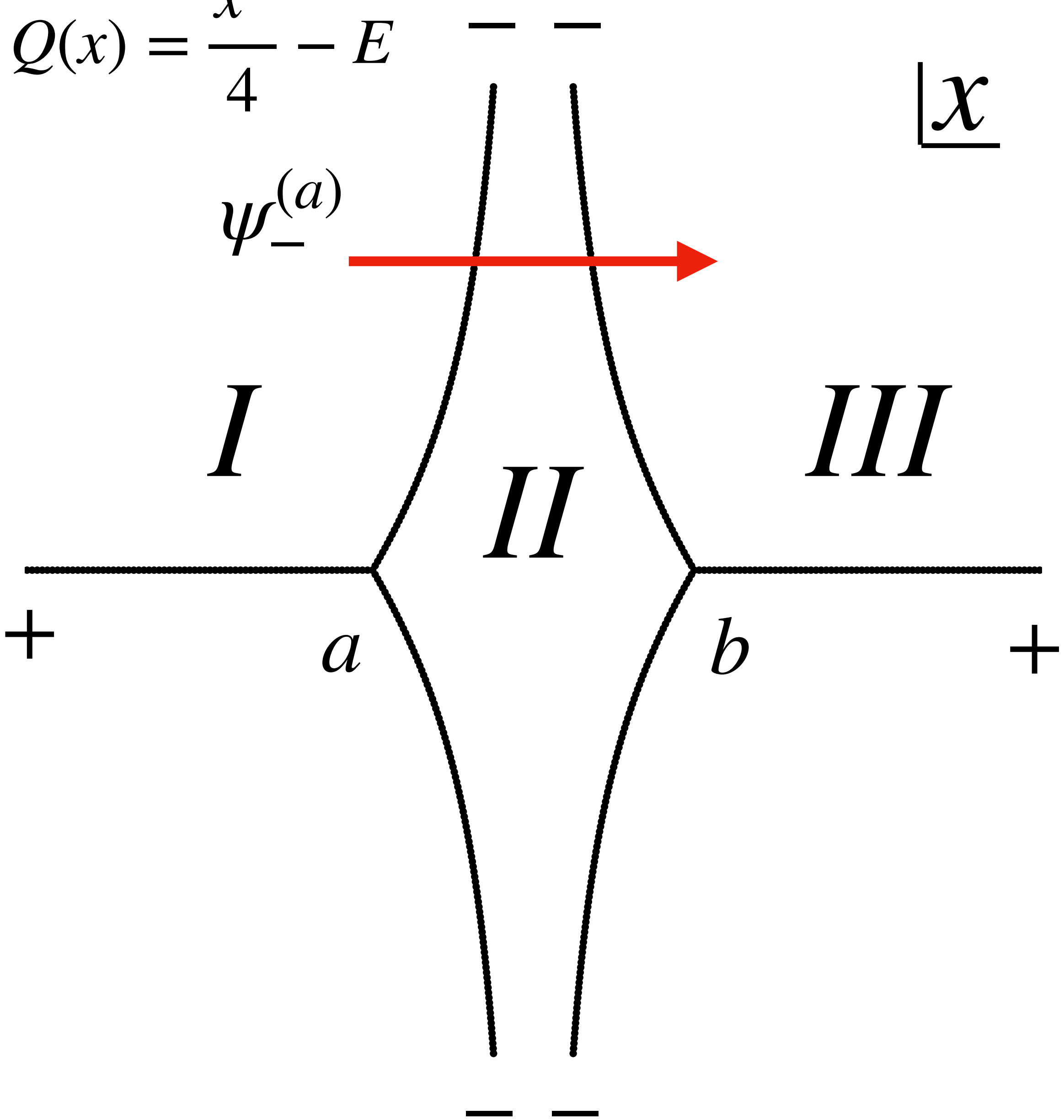
・ゲージ・重力対応への応用

・in-going boundary condition との整合性

Back up

Ex) 調和振動子ポテンシャル

$$Q(x) = \frac{x^2}{4} - E$$



・出発点

$$\psi_-^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{S_{odd}}} e^{\pm \int_a^x S_{odd} dx}$$

・$I \to II$

$$\psi_-^{(a)} \to \psi_-^{(a)} - i\psi_+^{(a)}$$

・基点の切り替え

$$\psi_\pm^{(a)} = e^{\pm \int_a^b S_{odd} dx}\, \psi_\pm^{(b)}$$

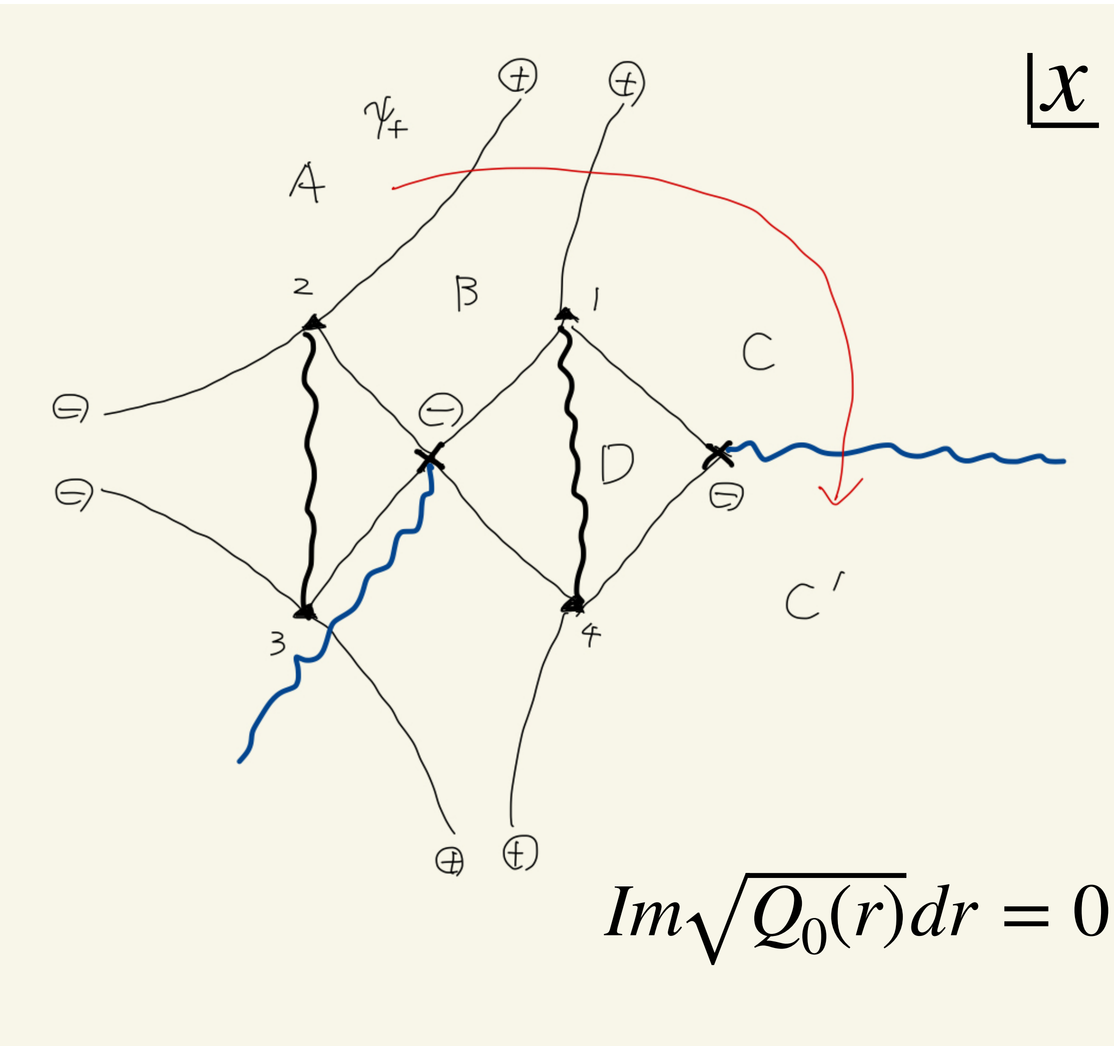
・$II \to III$

$$\psi_-^{(a)} - i\psi_+^{(a)} \to \psi_-^{(a)} - i\underbrace{\left(1 + e^{-2\int_a^b S_{odd} dx}\right)}_{=0}\psi_+^{(a)}$$

＝0：量子化条件

$$\longrightarrow \quad E = \eta^{-1}(N + 1/2) \qquad \left(\because 2\int_a^b S_{odd} dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{x=\infty} S_{odd} = 2\pi i \eta E \right)$$

無限遠点からホライゾンへの解析接続



- Monodromy matrix

$$M = V_+^{-1}\Gamma_{21}V_+^{-1}D_1^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{21}\nu_+^{-1} & -iu_{21}(1+u_{12}^2) \\ 0 & u_{12}\nu_- \end{pmatrix}$$

- From boundary condition

$$\psi_+ \to \underbrace{u_{21}\nu_+^{-1}}_{=0}\psi_+ - iu_{21}(1+u_{12}^2)\,\psi_-$$

- $u_{21}\nu_+^{-1} \neq 0$ なので上手くいかない

- Voros係数を考慮する必要？

u_{ij} の計算 ([Andersson, Howls (2003)]とは別の計算方法)

・以下のように展開して不定積分を実行

$$\log u_{ij} = I_{ij} = \int_i^j S_{odd} dx \sim \int_i^j \sqrt{Q_0} = i\omega \int_i^j \sqrt{1-f} = i\omega \int_i^j \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^n$$

・変わり点を$1/\omega$で展開

$$\rho_j = \theta^{j-1}\sqrt{\frac{s}{\omega}} - \theta^{2(j-1)}\frac{l(l+1)+s^2}{4s\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^{3/2}}\right), \quad \theta = e^{i\pi/2}$$

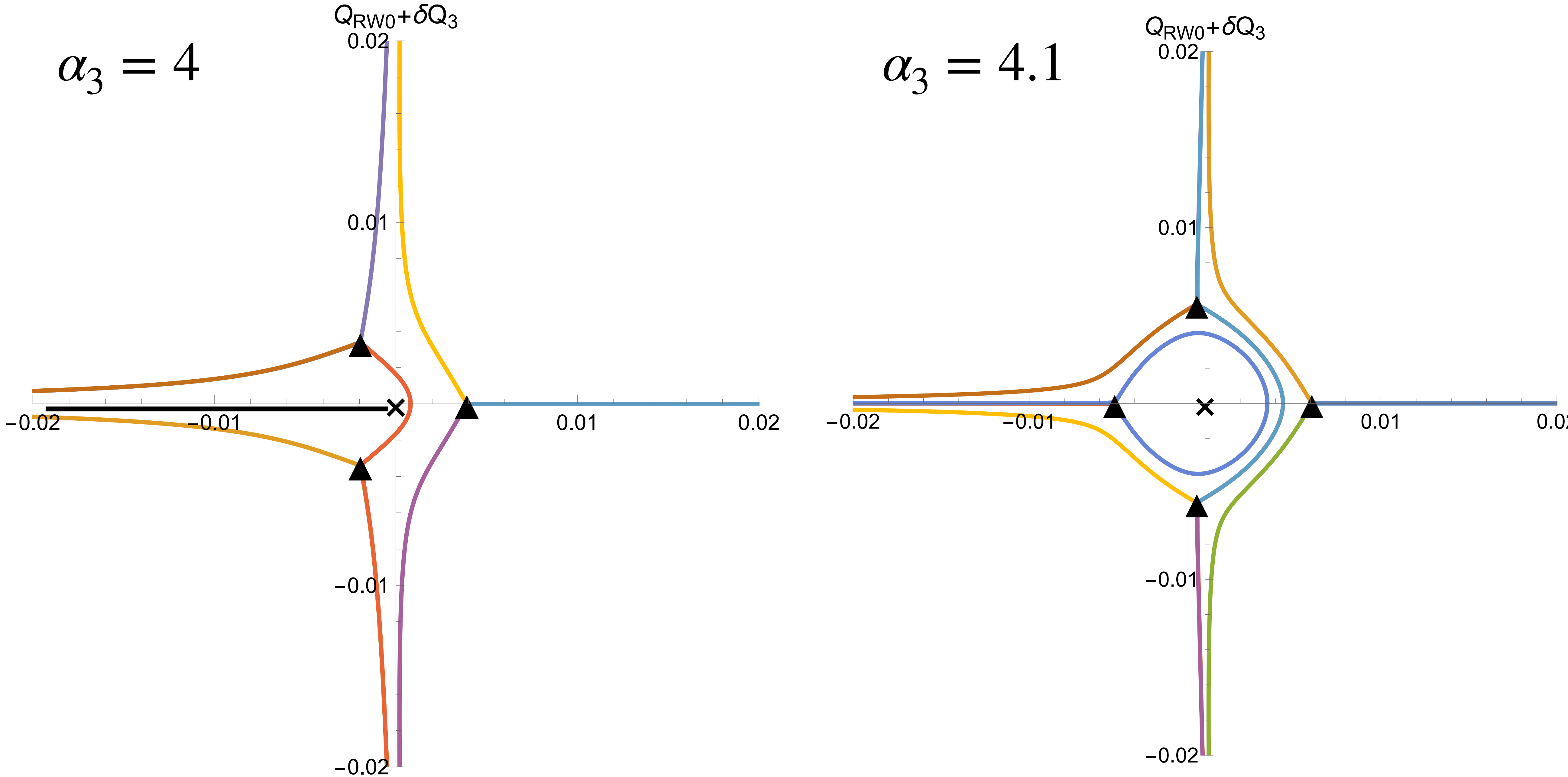
・この変わり点をu_{ij}に代入して各$1/\omega$の係数について無限和を実行

$$I_{ij} = -i\pi s(\theta^{2(j-1)} - \theta^{2(i-1)}) + O(\omega^{-1/2})$$

$$\therefore u_{12} = u_{41}^{-1} \sim e^{2i\pi} = 1 \quad \text{(for s=2)}$$

$\alpha_3 \geq 4$ の時のStokes曲線

・For large Im ω



Scalar Gauss Bonnet gravity

[M. B. Green, J. H. Schwarz (1984)]

$$\mathcal{L} = \frac{M_{pl}^2}{2}R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{b_1}{\Lambda}\phi(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma})$$

$$\alpha_0 = \frac{4}{15}b_1^2\epsilon^2 r_H^2\omega^2, \quad \alpha_1 = -\frac{584}{15}b_1^2\epsilon^2 r_H^2\omega^2, \quad \alpha_2 = -\frac{1052}{15}b_1^2\epsilon^2 r_H^2\omega^2$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{5}b_1^2\epsilon^2(-196 + 49l + 49l^2 - 80r_H^2\omega^2)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{15}b_1^2\epsilon^2(-783 + 174l + 174l^2 + 392r_H^2\omega^2)$$

$$\alpha_5 = \frac{2}{15}b_1^2\epsilon^2(5475 - 663l - 663l^2 + 680r_H^2\omega^2)$$

$$\alpha_6 = -\frac{1}{15}b_1^2\epsilon^2(674 + 646l + 646l^2)$$

$$\alpha_7 = -\frac{676}{15}b_1^2\epsilon^2(-6 + l + l^2)$$

$$\alpha_8 = \frac{2}{3}b_1^2\epsilon^2(-6601 + 218l + 218l^2)$$

$$\alpha_9 = 3760b_1^2\epsilon^2$$

$$\begin{cases} r_H = 2M\left(1 - \epsilon^2 b_1^2 \frac{98}{5}\right) \\ \epsilon = \frac{1}{4\Lambda M_{pl} M^2} \end{cases}$$

Stokes Line gallery for $\delta V_{j\geq 4}$