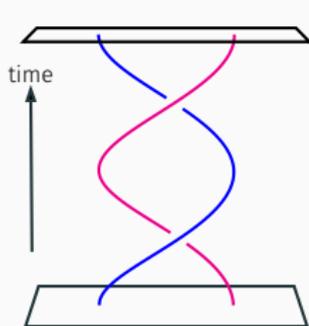


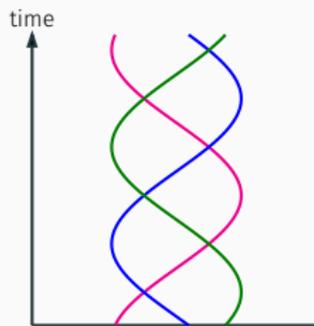
1次元3体相互作用とトポロジー

大谷 聡（日本大学量子科学研究所）
基研研究会「熱場の量子論とその応用」
2024年9月10日（火）

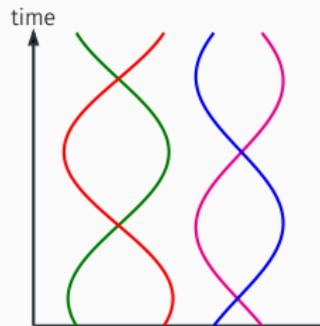
- 多体相互作用の中にはその効果が**多体配位空間 (多体波動関数の変数の空間) のトポロジー**で決まるものが存在する.
- その典型例は2次元系の2体相互作用だが, 最近になって1次元多体相互作用の中にもその効果がトポロジーで決まるものが存在することがわかってきた.
- 例えば下の多粒子世界線は (識別可能粒子に対しては) 全て**巻き付き数が1**で, この世界線に沿って時間発展した多粒子状態に対して **Aharonov-Bohm (AB) 位相**を与える多体相互作用が存在することがわかってきた.
- 今回はトポロジーで決まる多体相互作用の最近の発展についてレビューする.



(a) 2次元 2粒子世界線



(b) 1次元 3粒子世界線



(c) 1次元 2+2粒子世界線

多体配位空間とそのトポロジー

境界条件による相互作用の記述

背景ゲージ場による相互作用の記述

まとめと今後の課題

物理の論文

- N. L. Harshman and A. C. Knapp, “Coincidence Structures and Hard-Core Few-Body Interactions,” [arXiv:1801.08753](#).
- N. L. Harshman and A. C. Knapp, “Anyons from three-body hard-core interactions in one dimension,” [arXiv:1803.11000](#).
- N. L. Harshman and A. C. Knapp, “Topological exchange statistics in one dimension,” [arXiv:2108.05653](#).
- S. Ohya, “Topologically nontrivial three-body contact interaction in one dimension,” [arXiv:2310.16576](#).

経路積分の論文 [被覆空間の方法を導入した論文]

- J. S. Dowker, “Quantum mechanics and field theory on multiply connected and on homogeneous spaces,” *J. Phys. A* 5 (1972) 936.

数学の論文 [(純) ツイン群と (純) トリプレット群を導入した論文]

- M. Khovanov, “Real $K(\pi, 1)$ arrangements from finite root systems,” *Math. Res. Lett.* 3 (1996) 261.

多体配位空間とそのトポロジー

- 量子多体問題を扱う方法の1つとして**配位空間の方法** (configuration-space approach) と呼ばれるものがある.
- この方法の基本的な発想は

「 d 次元の n 体問題を dn 次元の 1 体問題とみなす」

というもの. ここで出てくる dn 次元空間は n 体波動関数 $\psi(x_1, \dots, x_n)$ の変数空間 $\{(x_1, \dots, x_n)\}$ のことで, これを **n 体配位空間** と呼ぶ.

- 歴史的にはこの n 体配位空間のトポロジーを考察することで**同種粒子** (識別不可能粒子) の統計性が分類されてきた.

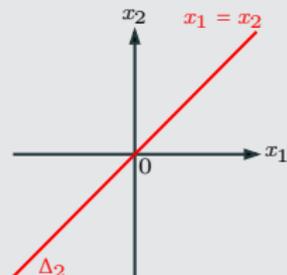
- 3次元以上: Bose 統計か Fermi 統計の 2 択のみ [Laidlaw-DeWitt '71]
- 2次元: ブレイド群統計 (エニオン) が存在可能 [Leinaas-Myrheim '77]
- 1次元: ツイン群統計とトリプレット群統計が存在可能 [Harshman-Knapp '18]

- 今回はこの配位空間の方法を用いて**非同種粒子** (識別可能粒子) に対するこれまで知られていなかった多体相互作用の存在を明らかにする.
- まずは n 体配位空間のトポロジーの話から始めよう.

多体波動関数の特異点

- ・ 一般に、配位空間には多体波動関数が well-defined にならない**特異点**が存在し得る。その典型例は多体接触相互作用を起源とする微分不可能な点。

例：1次元2体問題の2体 δ 関数相互作用



1次元の2体配位空間

- ・ 2体相互作用ポテンシャル

$$V(x_1, x_2) = g\delta(x_1 - x_2)$$

- ・ 2体衝突点の集合 $\Delta_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$ 近傍では2体波動関数は連続だが微係数は不連続になる。

$$\psi|_{x_1-x_2=0_+} = \psi|_{x_1-x_2=0_-}$$

$$\partial\psi|_{x_1-x_2=0_+} - \partial\psi|_{x_1-x_2=0_-} = g(\psi|_{x_1-x_2=0_+} + \psi|_{x_1-x_2=0_-})$$

ただし、 ∂ は Δ_2 に対する法線微分を表す。

- ・ 特異点は微分不可能な点以外にも色々あり得る。後でわかるが、今回重要になるのは**分岐点**。

配位空間の方法①

- さて、配位空間は多体波動関数の定義域とも言える。そこで相互作用の効果により特異点となる(であろう)点の集合 Δ_n を n 体配位空間から **予め除去する**。¹
- どのような相互作用により特異点となったのかは Δ_n 近傍での境界条件を調べることで **後で明らかにする**。
- 以下では1体配位空間を X とし、多体衝突点の集合 $\Delta_n \subset X^n$ に特異点をもつ n 体問題を考える。この場合、 n 体配位空間 $M_{n\text{-body}}$ は次の差集合となる。

$$M_{n\text{-body}} = X^n - \Delta_n \quad (1)$$

- 多くの場合、「ポテンシャル V による相互作用の記述」と「境界条件による相互作用の記述」は等価で、 Δ_n 近傍での境界条件を再現する V が存在する。
- しかし V では記述できない境界条件も存在する。その典型例が Δ_n を除去したことで配位空間に「穴」が空き、 $M_{n\text{-body}}$ が **多重連結** になる場合。つまり、

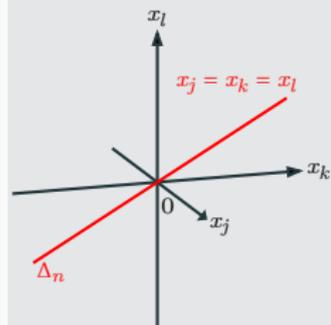
$$\pi_1(X^n - \Delta_n) \quad (2)$$

が非自明になる場合。

¹除去することの根拠や物理的解釈は人によって様々。ここでは単に「特異点を関数の定義域から除去する」という立場で進める。

配位空間の方法②

- $\pi_1(X^n - \Delta_n)$ が非自明になるのは Δ_n が余次元 2 の部分空間になる場合のみ。これは完全に分類できて、次の 3 つしかない [Harshman-Knapp '18].



1次元の3体衝突点集合 Δ_n

- 2次元 ($X = \mathbb{R}^2$) の2体衝突点集合

$$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n} : x_j = x_k\} \quad (3)$$

- 1次元 ($X = \mathbb{R}$) の3体衝突点集合

$$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = x_k = x_l\} \quad (4)$$

- 1次元 ($X = \mathbb{R}$) の2+2体衝突点集合

$$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = x_k \ \& \ x_l = x_m\} \quad (5)$$

- これら3つの場合の基本群 $\pi_1(X^n - \Delta_n)$ は全て**組み紐の成す群**と同じ。ただし、各々の場合で**紐の交差に対する制限**が異なる。次にこれを説明しよう。

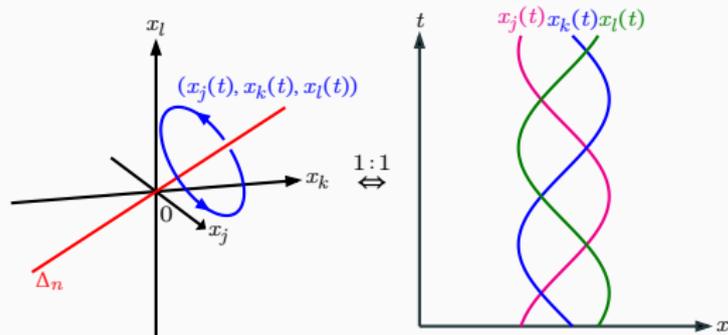
基本群 = 組み紐の成す群 ①

- まず一般に、 d 次元空間の n 個の点 x_1, \dots, x_n が与えられると、それらを元に dn 次元空間の 1 個の点 (x_1, \dots, x_n) が作れる. 逆に dn 次元空間の 1 個の点 (x_1, \dots, x_n) が与えられると、 d 次元空間の n 個の点 x_1, \dots, x_n が作れる.
- これから次の 1 対 1 対応が成り立つことがわかる.

$$\left(\begin{array}{c} dn \text{次元空間の 1 個の点} \\ (x_1, \dots, x_n) \end{array} \right) \overset{1:1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{c} d \text{次元空間の } n \text{ 個の点} \\ x_1, \dots, x_n \end{array} \right) \quad (6)$$

- 曲線は点の集合だから、次の 1 対 1 対応も成り立つ.

$$\left(\begin{array}{c} dn \text{次元空間の 1 本の曲線} \\ (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array} \right) \overset{1:1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{c} d \text{次元空間の } n \text{ 本の曲線} \\ x_1(t), \dots, x_n(t) \end{array} \right) \quad (7)$$



基本群は閉曲線の成す群。
 従って (7) より $X^n - \Delta_n$ の基本群は X の n 本の紐の成す群と同じ。ただし各紐の始点と終点は等しく、紐の交差に制限あり。この制限が 3 つの場合で異なる。

基本群 = 組み紐の成す群 ②

2体衝突点の特異点となる2次元 n 体問題

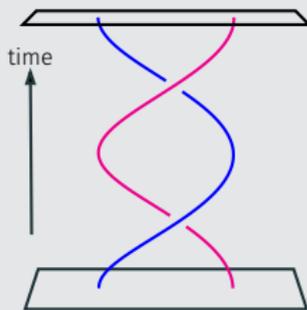


これはダメ

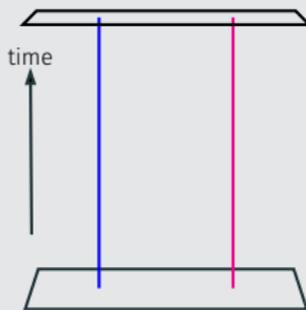
この場合の基本群は2本の紐は1点で交差してはならないという制限下での(始点と終点等しい)組み紐の成す群(純ブレイド群 PB_n).

$$\pi_1(M_{n\text{-body}}) \cong PB_n \quad (8)$$

この制限があるので、例えば左下の2粒子世界線は右下の2粒子世界線に連続変形で移れない。



\neq



基本群 = 組み紐の成す群 ③

3体衝突点の特異点となる1次元 n 体問題

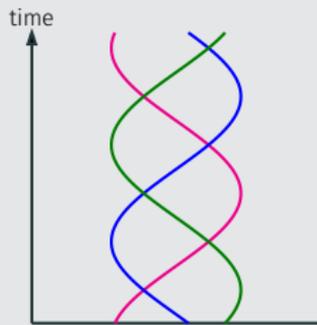


これはダメ

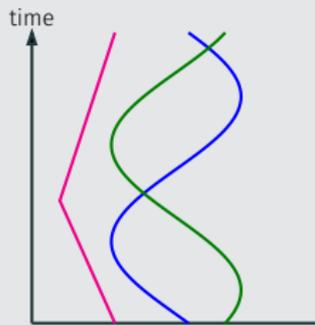
この場合の基本群は3本の紐は1点で交差してはならないという制限下での(始点と終点等しい)組み紐の成す群(純ツイーン群 PT_n) [Khovanov '96].

$$\pi_1(M_{n\text{-body}}) \cong PT_n \quad (9)$$

この制限があるので、例えば左下の3粒子世界線は右下の3粒子世界線に連続変形で移れない。



\neq



基本群 = 組み紐の成す群 ④

2+2 体衝突点の特異点となる 1次元 n 体問題

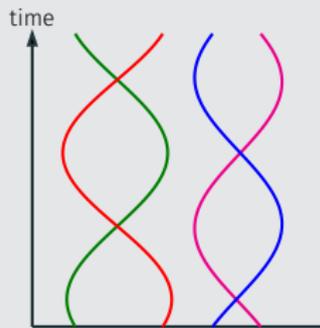


これはダメ

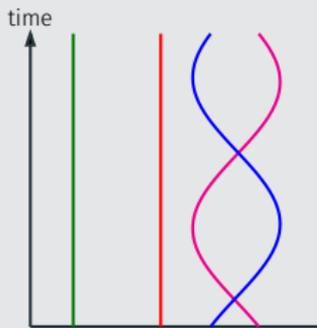
この場合の基本群は **2+2 本の紐は同時刻で交差してはならない**という制限下での (始点と終点が等しい) 組み紐の成す群 (純トリプレット群 PF_n) [Khovanov '96].

$$\pi_1(M_{n\text{-body}}) \cong PF_n \quad (10)$$

この制限があるので、例えば左下の 2+2 粒子世界線は右下の 2+2 粒子世界線に連続変形で移れない。



\neq



同種粒子の場合

- ・ 今回の主対象は非同種粒子だが、同種粒子の場合についても簡単に述べる。
- ・ 量子論では同種粒子は**原理的に識別不可能**。これより、同種粒子の配位空間は非同種粒子の配位空間を対称群で割った商空間として定義される。²

$$M_{n\text{-body}} = \frac{X^n - \Delta_n}{S_n} \quad (\text{同種粒子の場合}) \quad (11)$$

- ・ ところで $X^n - \Delta_n$ が多重連結の場合、この空間自身も普遍被覆空間 $\widetilde{M}_{n\text{-body}}$ を基本群 $\pi_1(X^n - \Delta_n)$ で割った商空間として表される。

$$X^n - \Delta_n \cong \frac{\widetilde{M}_{n\text{-body}}}{\pi_1(X^n - \Delta_n)} \quad (12)$$

- ・ この場合、(11) は $\widetilde{M}_{n\text{-body}}$ を対称群 S_n と基本群 $\pi_1(X^n - \Delta_n)$ (の半直積) で割った商空間として表すことが可能。

$$M_{n\text{-body}} \cong \frac{\widetilde{M}_{n\text{-body}}}{\pi_1(X^n - \Delta_n) \rtimes S_n} \quad (\text{同種粒子の場合}) \quad (13)$$

- ・ $\pi_1(X^n - \Delta_n) \rtimes S_n$ が (11) の **(オービフォルド) 基本群** $\pi_1^{\text{orb}}(M_{n\text{-body}})$ で、これが同種粒子の統計性を決定。これの非自明なものはブレイド群 $B_n \cong PB_n \rtimes S_n$, ツイン群 $T_n \cong PT_n \rtimes S_n$, トリプレット群 $F_n \cong PF_n \rtimes S_n$ の3つのみ。

²(11) は一般にオービフォルドで、2 体衝突点を除去していない場合 S_n の固定点を持つ。

この節のまとめ

- X を 1 体配位空間, Δ_n を多体波動関数が well-defined とならない多体衝突点の集合とすると, n 体配位空間は一般に次で与えられる.

$$M_{n\text{-body}} = \begin{cases} X^n - \Delta_n & (\text{非同種粒子の場合}) \\ (X^n - \Delta_n)/S_n & (\text{同種粒子の場合}) \end{cases} \quad (14)$$

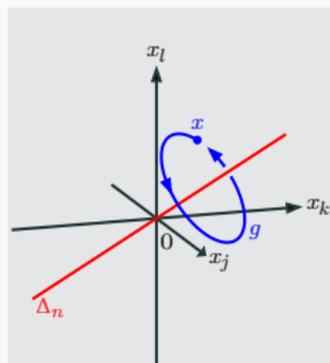
- Δ_n が余次元 2 となる場合, n 粒子世界線の集合は連続変形で互いに移り合えないセクターに分かれる. これは (14) の (オービフォールド) 基本群で記述され, 非自明なものは次の 6 つしかない.

X	Δ_n	粒子	π_1 (4 と 6 番目は π_1^{orb})
\mathbb{R}^2	2 体	非同種	PB_n
		同種	$B_n \cong PB_n \rtimes S_n$
\mathbb{R}	3 体	非同種	PT_n
		同種	$T_n \cong PT_n \rtimes S_n$
\mathbb{R}	2+2 体	非同種	PF_n
		同種	$F_n \cong PF_n \rtimes S_n$

境界条件による相互作用の記述

境界条件による相互作用の記述

- ・ ここまでは**仮に**多体波動関数に特異点があったとして、その場合多体波動関数の定義域 (配位空間) のトポロジーはどうなるかを調べてきた。
- ・ ここからはどのような相互作用により特異点が生じたのかを明らかにしたい。まずは Δ_n 近傍での境界条件を調べることでこれを行う。
- ・ 結論を先に言うと、非同種粒子に対しては次が成り立つ。



任意の時刻 t , 位置 x で多体波動関数 $\psi_t(x)$ は次の等式 (**ツイストされた境界条件**) を満たす。

$$\psi_t(gx) = D(g)\psi_t(x), \quad \forall g \in \pi_1(M_{n\text{-body}}) \quad (15)$$

ただし, D は基本群の **1次元ユニタリー表現**.

$$D : \pi_1(M_{n\text{-body}}) \rightarrow U(1) \quad (16)$$

- ・ 数学的には (15) は $\psi_t(x)$ が多価関数で Δ_n が分岐点であることを表す. 物理的には Δ_n が「磁束」の台 (support) で $D(g)$ が AB 位相であることを表す。
- ・ 以下では**被覆空間の方法** (鏡像法) [Dowker '72] を用いて上の結果を説明する。

被覆空間の方法 (鏡像法) ①

- 非同種粒子の場合, n 体配位空間はその普遍被覆空間と基本群を用いて商空間 $M_{n\text{-body}} \cong \widetilde{M}_{n\text{-body}}/\pi_1(X^n - \Delta_n)$ として表せた.
- そこで以下では配位空間 M が商空間

$$M = \widetilde{M}/G \quad (17)$$

となる場合を一般に考える. ただし G は離散群で, G の \widetilde{M} への作用 $x \mapsto gx$ ($x \in \widetilde{M}, g \in G$) は固定点を持たないとする.³

- このような系での時間発展演算子 U_t を考えよう. Hamiltonian H がわかっている場合, これは

$$U_t = e^{-iHt} \quad (18)$$

で与えられるが, 以下では H はあってもなくても良い. 次の条件だけが重要.

$$\text{(掛け算則)} \quad U_{t_1} U_{t_2} = U_{t_1+t_2} \quad (19a)$$

$$\text{(ユニタリー性)} \quad U_t^\dagger = U_{-t} \quad (19b)$$

$$\text{(初期条件)} \quad U_0 = 1 \quad (19c)$$

- 以下ではこの演算子の行列要素 $U_t(x, y) = \langle x|U_t|y \rangle$ を考えていく.

³固定点がある場合は注意が必要.

被覆空間の方法 (鏡像法) ②

- ・ 行列要素 $U_t(x, y) = \langle x|U_t|y \rangle$ に対しては上の条件は次のように表される.

- ・ 条件 1 (掛け算則)

$$\int_M dz U_{t_1}(x, z)U_{t_2}(z, y) = U_{t_1+t_2}(x, y), \quad \forall x, y \in M \quad (20a)$$

- ・ 条件 2 (ユニタリー性)

$$\overline{U_t(x, y)} = U_{-t}(y, x), \quad \forall x, y \in M \quad (20b)$$

- ・ 条件 3 (初期条件)

$$U_0(x, y) = \delta(x - y), \quad \forall x, y \in M \quad (20c)$$

- ・ 実はこの 3 条件は解くことが可能. 解は次で与えられる [cf. Ohya '23].

$$U_t(x, y) = \sum_{g \in G} D(g) \tilde{U}_t(x, gy) \quad (21)$$

- ・ ただし $D : G \rightarrow U(1)$ は群 G の 1 次元ユニタリー表現, $\tilde{U}_t(x, y)$ は \tilde{M} 上の G 不変なユニタリー行列で次の仮定を満たす.

被覆空間の方法 (鏡像法) ③

- ・ 仮定 1 (掛け算則)

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad (22a)$$

- ・ 仮定 2 (ユニタリー性)

$$\overline{D(g)} = D(g)^{-1} = D(g^{-1}), \quad \forall g \in G \quad (22b)$$

- ・ 仮定 1 (掛け算則)

$$\int_{\widetilde{M}} dz \widetilde{U}_{t_1}(x, z) \widetilde{U}_{t_2}(z, y) = \widetilde{U}_{t_1+t_2}(x, y), \quad \forall x, y \in \widetilde{M} \quad (23a)$$

- ・ 仮定 2 (ユニタリー性)

$$\overline{\widetilde{U}_t(x, y)} = \widetilde{U}_{-t}(y, x), \quad \forall x, y \in \widetilde{M} \quad (23b)$$

- ・ 仮定 3 (初期条件)

$$\widetilde{U}_0(x, y) = \delta(x - y), \quad \forall x, y \in \widetilde{M} \quad (23c)$$

- ・ 仮定 4 (G 不変性)

$$\widetilde{U}_t(gx, gy) = \widetilde{U}_t(x, y), \quad \forall g \in G, \quad \forall x, y \in \widetilde{M} \quad (23d)$$

被覆空間の方法 (鏡像法) ④

- ・このようにして「大きい空間 \widetilde{M} の理論に同一視を入れて小さい空間 M の理論を作る」のが被覆空間の方法. これは本質的に鏡像法と同じ.
- ・さて, このように構成された $U_t(x, y) = \sum_{g \in G} D(g) \widetilde{U}_t(x, gy)$ は次を満たす.

$$U_t(gx, y) = D(g) U_t(x, y), \quad \forall g \in G \quad (24)$$

- ・ところで波動関数 $\psi(x)$ の時間発展は一般に次で与えられる.

$$\psi(x) \mapsto \psi_t(x) = \int_M dy U_t(x, y) \psi(y) \quad (25)$$

- ・これより時刻 t , 位置 x の波動関数 $\psi_t(x)$ は次を満たす.

$$\psi_t(gx) = D(g) \psi_t(x), \quad \forall g \in G \quad (26)$$

これが波動関数に対する境界条件. ポイントは「境界条件は表現論で決まる」という点. 逆に言うと, どの表現が選ばれるかは境界条件で決まる.

- ・以上の一般論を n 体配位空間 $M_{n\text{-body}} = \widetilde{M}_{n\text{-body}} / \pi_1(X^n - \Delta_n)$ に適用すると, 非同種粒子 n 体問題に対する所望の結果が得られる.

- ・ここまでの結果は U_t がユニタリー演算子であるということだけに基いたものだが、Lagrangian の存在を仮定すると商空間上の経路積分も構成できる。
- ・まず L を \widetilde{M} 上の G 不変な Lagrangian とする。すると、4つの仮定を満たす \widetilde{M} 上の行列要素 $\widetilde{U}_t(x, y)$ は通常の Feynman 経路積分で構成できる。

$$\widetilde{U}_t(x, y) = \int_{q(0)=y}^{q(t)=x} [dq] \exp \left(i \int_0^t d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) \right) \quad (27)$$

- ・これより、行列要素 $U_t(x, y)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} U_t(x, y) &= \sum_{g \in G} D(g) \widetilde{U}_t(x, gy) \\ &= \sum_{g \in G} D(g) \int_{q(0)=gy}^{q(t)=x} [dq] \exp \left(i \int_0^t d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

これが商空間 $M = \widetilde{M}/G$ 上の経路積分の**一般的表式**。⁴

⁴ M と \widetilde{M} の違いは大局的な構造だけで、局所的には違いはない。したがって局所相互作用だけからなる理論であれば、 M 上の Lagrangian と \widetilde{M} 上の Lagrangian は同じだと思って良い。

蛇足だが、被覆空間の方法で行列要素が構成できる演算子は時間発展演算子 $U_t = e^{-iHt}$ 以外にもある。以下はその一例。

- ・ 例 1. レゾルベント演算子 (U_t の Laplace 変換)

$$G_E = (E - H)^{-1} = \frac{1}{i} \int_0^{\infty} d\tau U_{\tau} e^{iE\tau} \quad (\text{Im } E > 0) \quad (29a)$$

- ・ 例 2. エネルギー状態密度演算子 ($\lim_{\text{Im } E \rightarrow 0_+} G_E$ の虚部)

$$\rho_E = \delta(E - H) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G_E \quad (\text{Im } E \rightarrow 0_+) \quad (29b)$$

- ・ 例 3. Gibbs 演算子

$$U_{-i\beta} = e^{-\beta H} \quad (29c)$$

Gibbs 演算子に対する結果を用いると、商空間 $M = \widetilde{M}/G$ 上のカノニカル分配関数 $Z(\beta)$ は一般に次で与えられることも言える。

$$Z(\beta) = \text{tr } U_{-i\beta} = \int_M dx U_{-i\beta}(x, x) = \sum_{g \in G} D(g) \int_M dx \widetilde{U}_{-i\beta}(x, gx) \quad (30)$$

この節のまとめ

一般に商空間 $M = \widetilde{M}/G$ 上の経路積分は「一旦大きい空間に持ち上げ、そして小さい空間に落とす」ことで構成される。具体的には次の3ステップから成る。

- ・ まず \widetilde{M} 上の G 不変な行列要素 $\widetilde{U}_t(x, y)$ を1つ持ってくる。

$$\widetilde{U}_t(gx, gy) = \widetilde{U}_t(x, y), \quad \forall g \in G \quad (31a)$$

- ・ 次に始点 $y \in \widetilde{M}$ に離散群 G で同一視を入れる。

$$y \sim gy, \quad \forall g \in G \quad (31b)$$

- ・ 最後に同一視したものは全て足す。

$$\begin{aligned} U_t(x, y) &= \sum_{g \in G} D(g) \widetilde{U}_t(x, gy) \\ &= \sum_{g \in G} D(g) \int_{q(0)=gy}^{q(t)=x} [dq] \exp \left(i \int_0^t d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) \right) \end{aligned} \quad (31c)$$

ただし、足すときの重み D は離散群 G の1次元ユニタリー表現。どの表現が選ばれるかは境界条件 $U_t(gx, y) = D(g)U_t(x, y)$ で決まる。

背景ゲージ場による相互作用の記述

ゲージ変換 ①

- ・ここまでの議論をまとめると,
 - ・配位空間の基本群 $\pi_1(X^n - \Delta_n)$ が非自明になるのは Δ_n が余次元 2 の場合;
 - ・この場合, Δ_n は多体波動関数の分岐点で, この点回りの境界条件は基本群 $\pi_1(X^n - \Delta_n)$ の 1 次元ユニタリー表現で決まる.
- ・したがって, 適当な多体 Schrödinger 方程式をこの境界条件の下で解けば, トポロジ的に非自明な多体相互作用を取り入れることが可能.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_t(x) = \left(- \sum_{j=1}^n \frac{1}{2m_j} \nabla_j^2 + V(x_1, \dots, x_n) \right) \psi_t(x) \quad (32a)$$

$$\psi_t(gx) = D(g) \psi_t(x) \quad (32b)$$

- ・量子力学の問題としてはこれで問題ないが, 相互作用はやはり Lagrangian や Hamiltonian で表したい.
- ・以下ではこの系をゲージ変換することで境界条件から相互作用の効果を取り除き, 代わりに Lagrangian や Hamiltonian に背景ゲージ場を入れる.

ゲージ変換 ②

- まず以下の例では1次元ユニタリー表現 D は次の Wilson ループで書ける.

$$D(g) = \exp\left(i \oint_g A\right), \quad \forall g \in \pi_1(X^n - \Delta) \quad (33)$$

ただし A は 1-form で, これから作られる 2-form $F = dA$ は Δ_n に台を持つ.

- この 1-form を使って次のようにゲージ変換をする.

$$U'_t(x, y) = W_{x, x_0}^{-1} U_t(x, y) W_{y, x_0}, \quad W_{x, x_0} = \exp\left(i \int_{x_0}^x A\right) \quad (34)$$

すると, 境界条件は周期的境界条件 $U'_t(gx, y) = U'_t(x, y)$ になる.

- しかし代わりに Lagrangian に背景ゲージ場が³入る.

$$U'_t(x, y) = \sum_{g \in \pi_1(X^n - \Delta_n)} \int_{q(0)=gy}^{q(t)=x} [dq] \exp\left(i \int_0^t d\tau \left[L(q, \dot{q}) - \sum_j \dot{q}_j A_j \right] \right) \quad (35)$$

ゲージ変換 ③

- また波動関数 $\psi'_t(x) = W_{x,x_0}^{-1} \psi_t(x)$ に対する Schrödinger 方程式と境界条件は次のようになる.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi'_t(x) = \left[- \sum_{j=1}^n \frac{1}{2m_j} (\nabla_j + iA_j)^2 + V(x_1, \dots, x_n) \right] \psi'_t(x) \quad (36a)$$

$$\psi'_t(gx) = \psi'_t(x) \quad (36b)$$

- 最後に現時点で判明している背景ゲージ場の具体例を挙げる.

例 1. 2次元非同種粒子 $n(\geq 2)$ 体問題の2体相互作用

- 2体衝突点の集合

$$\Delta_n = \{(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{2n} : \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_k \quad (1 \leq j < k \leq n)\} \quad (37)$$

- 2-form

$$F = \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \alpha_{jk} \delta^2(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) (dx_j - dx_k) \wedge (dy_j - dy_k) \quad (38)$$

ただし $\{\alpha_{jk}\}$ は実パラメータで、その個数は $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$.

- 1-form

$$A = \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \alpha_{jk} d\theta_{jk}, \quad \theta_{jk} = \arctan\left(\frac{y_j - y_k}{x_j - x_k}\right) \quad (39)$$

- ゲージ場 [cf. Jo-Lee '96]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \alpha_{jk} \nabla_i \theta_{jk} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq j < i} \alpha_{ji} \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j \leq n} \alpha_{ij} \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \end{aligned} \quad (40)$$

例 2. 1次元非同種粒子 $n(\geq 3)$ 体問題の 3 体相互作用

• 3 体衝突点の集合

$$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = x_k = x_l \quad (1 \leq j < k < l \leq n)\} \quad (41)$$

• 2-form の一例 (一般的表式はわかっていない) [Ohya '23]

$$F = 2\pi \sum_{1 \leq j < k < l \leq n} \alpha_{jkl} \delta(x_j - x_k) \delta(x_k - x_l) \\ \times (dx_j \wedge dx_k + dx_k \wedge dx_l + dx_l \wedge dx_j) \quad (42)$$

ただし $\{\alpha_{jkl}\}$ は実パラメータで, その個数は $\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$.

• 1-form

$$A = \sum_{1 \leq j < k < l \leq n} \alpha_{jkl} d\theta_{jkl} \quad (43a)$$

$$\theta_{jkl} = \arctan \left(\sqrt{\frac{m_j m_k m_l}{m_j + m_k + m_l}} \frac{m_j(x_j - x_l) + m_k(x_k - x_l)}{m_j m_k (x_j - x_k)} \right) \quad (43b)$$

• ゲージ場

$$A_i = - \sum_{1 \leq j < k < l \leq n} \frac{\alpha_{jkl} \sqrt{m_j m_k m_l (m_j + m_k + m_l)} ((x_k - x_l) \delta_{ij} + (x_l - x_j) \delta_{ik} + (x_j - x_k) \delta_{il})}{m_j m_k (x_j - x_k)^2 + m_k m_l (x_k - x_l)^2 + m_l m_j (x_l - x_j)^2} \quad (44)$$

まとめと今後の課題

まとめ

- ・ 一般に多体相互作用の中にはポテンシャル V では記述できないものが存在する.
- ・ その代表例は多体衝突点の集合 Δ_n が余次元 2 の部分空間になる場合.
- ・ 非同種粒子系の場合, そのような多体相互作用は次の 3 つしかない.

空間次元	相互作用	n 体配位空間の基本群
2 次元	2 体	純ブレイド群 PB_n
1 次元	3 体	純ツイン群 PT_n
1 次元	2+2 体	純トリプレット群 PF_n

- ・ これらの系の多体相互作用は Δ_n に台を持つ 2-form F で記述される.

$$\text{supp}(F) = \Delta_n \quad (45)$$

- ・ そしてこの 2-form は $F = dA$ を満たす 1-form A を介して理論に登場する.

$$H = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2m_j} (\nabla_j + iA_j)^2 + V(x_1, \dots, x_n) \quad (46)$$

- ・ ただし, 現状では 1 次元の場合の一般的表式はわかっていない.

場の量子論による記述

- ・ まず背景ゲージ場が解となる運動方程式を同定する.
- ・ 次にその運動方程式を再現する Lagrangian を同定する.
- ・ 2次元の場合はこれにより Chern-Simons ゲージ理論と結合した物質場の理論が得られた. 1次元でもこれで上手くいくはず.

Killer application の開発

- ・ 基本群の1次元表現が出てきたのは多体波動関数が1成分だったからだが, 内部自由度があれば多体波動関数は多成分になり, 高次元表現が出てくる可能性がある. そのような高次元表現 $D: \pi_1(M_{n\text{-body}}) \rightarrow U(N)$ をユニタリーゲートとする量子コンピュータが作れば面白いかもしれない.