射影表現と固有状態熱化仮説

福島 理
理化学研究所 iTHEMS

Sep. 11, 2024
熱場の量子論とその応用,
基礎物理学研究所, 京都

Based on
[O.F., Ryusuke Hamazaki, Phys. Rev. Lett. 131 (2023), arXiv:2305.04984]
[O.F., PTEP 2024, no.4, 043B03 (2024), arXiv:2310.11425]

Introduction

- **熱化 (熱平衡への遷移):**

非典型的な状態から 典型的な状態への遷移

$$\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle \neq \mathrm{tr}(\,\mathcal{O}\,\rho_{\mathrm{thermal}}\,) \qquad \langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \mathrm{tr}(\,\mathcal{O}\,\rho_{\mathrm{thermal}}\,)$$

➡ (量子/古典)多体系の普遍的な性質

以下の非自明な点:

- どのような系のどのような初期状態が平衡状態へと緩和するか,
- 熱化するとして、どのような統計アンサンブルが実現されるか.

熱化の過程は一般にこれらの詳細のデータに非常に依存する。

Introduction

このトークでのmotivation

場の量子論(QFT)の非自明な熱化過程

- 高次対称性が熱化にどのような影響を与えるか?

  実時間発展への帰結

- 非局所保存量(*)がある時、どのような観測量が非自明な熱平衡状態を区別するか?

  局所保存量がある時、非自明な熱平衡アンサンブルが実現することが知られている。

Introduction

孤立量子系における熱化:

散逸のない量子系はユニタリ時間発展をする.

$\underset{?}{\Longrightarrow}$ 非熱的な状態は時間発展しても非熱的なまま?

- 一つの理解の仕方: 演算子の期待値のレベルで考える

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty}\overline{\langle\psi(t)|\mathcal{O}|\psi(t)\rangle}}_{\text{時間平均}} = \underbrace{\mathrm{tr}(\,\mathcal{O}\,\rho_{\mathrm{thermal}}\,)}_{\text{熱平衡における統計平均}}$$

十分条件:

(強い) 固有状態熱化仮説 (ETH)

[Deutsch, Phys. Rev. A 43(1991); Srednicki, Phys. Rev. E 50(1994)…]

⬅ **全てのエネルギー固有状態は熱的である**

Introduction

Our work

[O.F., Ryusuke Hamazaki, Phys. Rev. Lett. 131 (2023), arXiv:2305.04984]

- $(d+1)$次元的なQFTがp次対称性を持ち、いくつかの仮定 (*) を満たす時、以下を示した：
  (*d*-*p*)-次元的な観測量がETHを破る。

➡ 系が必ずしも、標準的なカノニカルアンサンブルに緩和するとは限らない。

(*p*-次対称性を考慮した一般化Gibbsアンサンブル)

[O.F., PTEP 2024, no.4, 043B03 (2024), arXiv:2310.11425]

- 仮定(*)に対する再考察：
  特に、$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$対称性が射影表現で実現されている時、$\mathbb{Z}_n$ or $\mathbb{Z}_m$のどちらかのみ破る摂動をを加えると(*)が満たされる。

➡ 系のスペクトラムの中間(高く励起した状態)の直接的な情報を必要としない

Contents

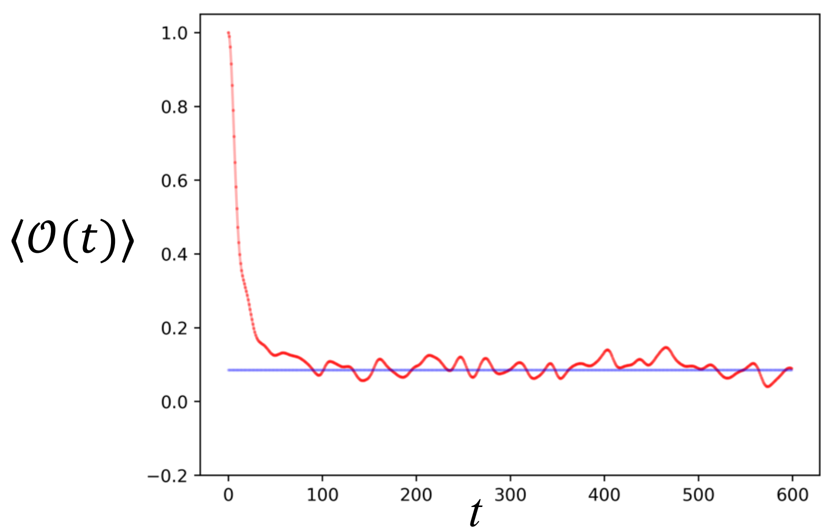
Eigenstate thermalization hypothesis

一般に以下は系の詳細や初期状態に依存する:
①全ての初期状態はある定常状態に緩和するか?

$$\delta\mathcal{O}^2 \coloneqq \overline{\langle\mathcal{O}\rangle^2} - \left(\overline{\langle\mathcal{O}\rangle}\right)^2 \to 0 \ \text{as} \ t \to \infty$$

②緩和するとして、その長時間平均は熱的アンサンブルで記述されるか?

$$\overline{\langle\mathcal{O}\rangle} \simeq \langle\mathcal{O}\rangle_{\text{eq}}$$



① ⇐ 非対角的 ETH
② ⇐ 対角的 ETH

* 以下このトークでは、対角的ETHを単にETHと呼ぶ。

一旦ETHを仮定すると、初期条件に依存せずに熱化が起こる

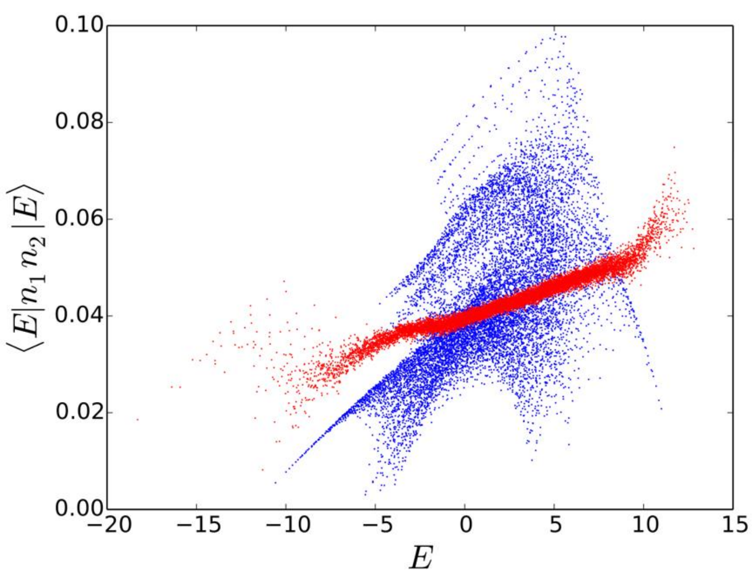
Eigenstate thermalization hypothesis

Let $|\psi(0)\rangle = \sum_\alpha c_\alpha\, |E_\alpha\rangle$ ($H|E_\alpha\rangle = E_\alpha|E_\alpha\rangle$: energy eigenstates),
(簡単のため、ハミルトニアンの縮退は無いと仮定する。)

$$\overline{\langle\mathcal{O}\rangle} = \sum_\alpha |c_\alpha|^2 \langle E_\alpha|\mathcal{O}|E_\alpha\rangle$$

(Diagonal) ETH

$$\langle E_\alpha|\mathcal{O}|E_\alpha\rangle(E) \simeq \mathrm{tr}(\,\mathcal{O}\ \rho_{\text{micro canonical}}(E))$$



[Deutsch, 1805.01616]

e.g.) Hard core boson:

blue: integrable ➡ ETH ✗

red: non-integrable ➡ ETH ✓

Higher-form symmetry

トポロジカル演算子

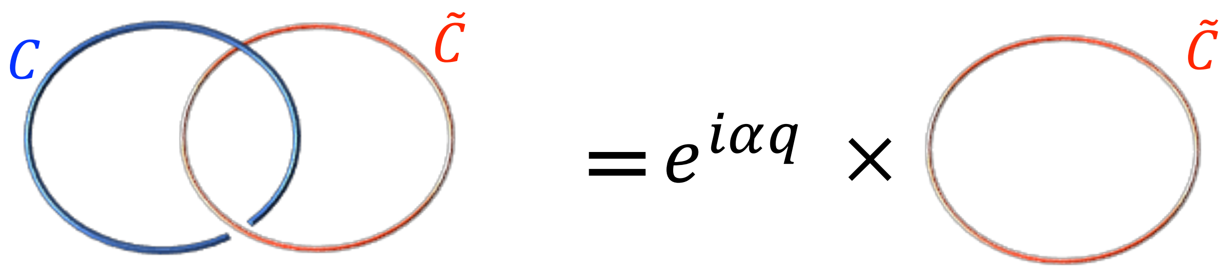
- p-次対称性はcodimension-$(p+1)$の対称性演算子で特徴づけられる

$(d+1)$次元のQFTでは、

$$\langle \underbrace{U_\alpha(C)}_{\text{対称性演算子}} \underbrace{W(\tilde{C})}_{\text{Charged operator}} \ldots \rangle = e^{i\alpha q} \langle \underbrace{W(\tilde{C})}_{\text{Charged operator}} \ldots \rangle$$

対称性演算子:
$(d-p)$-dimensional

Charged operator:
p-dimensional



相関関数はCの連続変形の下で不変。

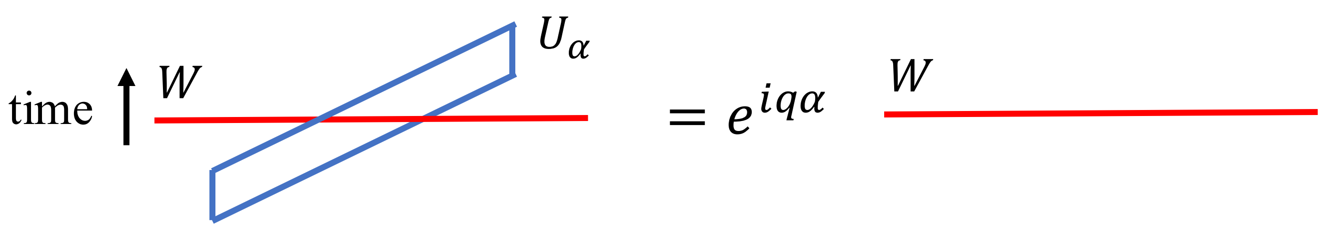
- 高次対称性はG group structureを持つ。(G: abelian group)

$$U_\alpha(C) U_\beta(C) = U_{\alpha+\beta}(C)$$

Higher-form symmetry

Hilbert空間への作用

- 演算子$U_\alpha(C)$ や $W(\tilde{C})$ ヒルベルト空間への作用を考える。
  (space-like symmetry [Goranta-Lam-Seiberg-Shao, 2201.10589]):



$$U_\alpha^\dagger(C_x)W(C_y)U_\alpha(C_x) = e^{iq\alpha}W(C_y) \qquad C_x, C_y \subset \mathcal{M}\text{: space manifold}$$

Topological nature of U_α $\quad\Rightarrow\quad$ $[H, U_\alpha] = 0$

ETH breaking by higher-form symmetry

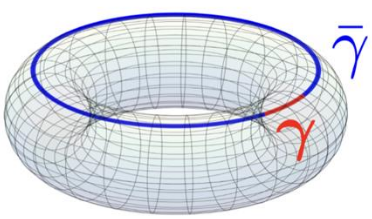
Setup

時空多様体$\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ 上で定義された$(d+1)$-次元QFTを考える。
ハミルトニアンHは非縮退。
系が p-次対称性 with the symmetry operator $U_\alpha(C)$ を持つ。

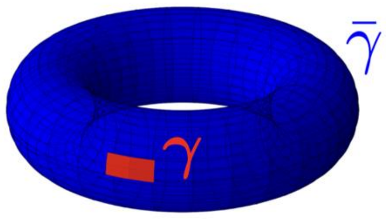
Main claim

適切な仮定(*)を満たされていれば、
演算子$U_\alpha(\gamma)$ か $U_\alpha(\bar{\gamma})$ (あるいは両方)がETHを破る。
$\gamma, \bar{\gamma}$: $(d-p)$-d manifold with boundary, s.t. $\gamma \cup \bar{\gamma} = \tilde{C} \subset \mathcal{M}$

e.g.) $\mathcal{M} = T^2$



$p = 1$



$p = 0$

演算子$U(\gamma)/U(\bar{\gamma})$は必ずしも通常のカノニカルアンサンブルに緩和しない。

ETH breaking by higher-form symmetry

Main claim

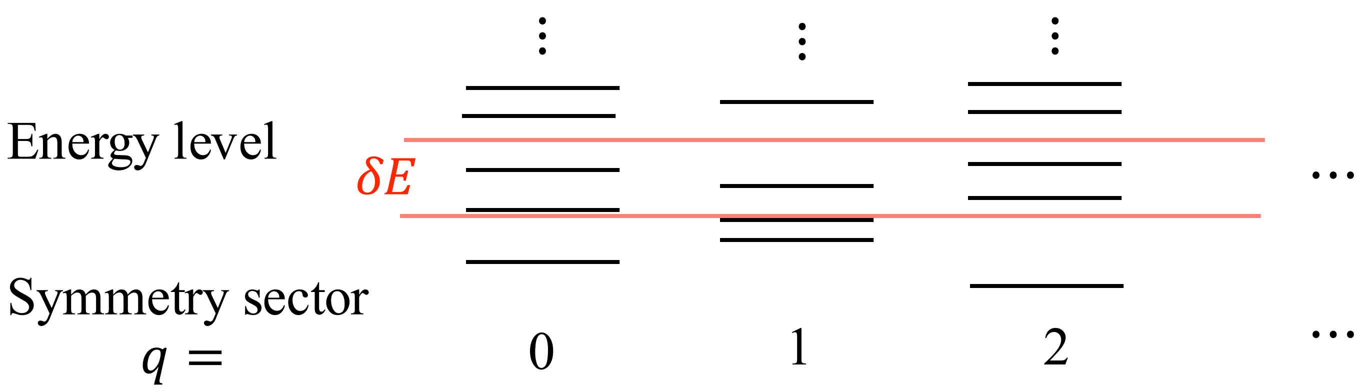
適切な仮定(*)を満たされていれば、演算子$U_\alpha(\gamma)$ か $U_\alpha(\bar{\gamma})$
(あるいは両方)がETHを破る。 $(\gamma \cup \bar{\gamma} = \tilde{C} \subset \mathcal{M})$

Assumptions:

i) 演算子$U_\alpha(\tilde{C})$ が分解できる: $U_\alpha(\tilde{C}) = U_\alpha(\gamma) U_\alpha(\bar{\gamma})$.

ii) エネルギー固有状態 $|E_n\rangle, |E_m\rangle$, with $E_n, E_m \in [E, E + \delta E]$,
s.t. $\langle E_n | U_\alpha(\tilde{C}) | E_n \rangle \neq \langle E_m | U_\alpha(\tilde{C}) | E_m \rangle$ が存在する。

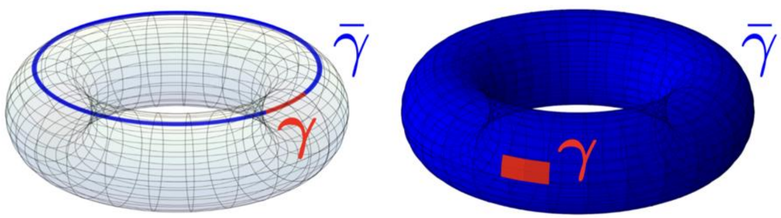
iii) マイクロカノニカルアンサンブルでの期待値 $\langle U_\alpha(\tilde{C}) \rangle_{\mathrm{mc}}^{\delta E} \neq 0$.



ETH breaking by higher-form symmetry

Comments

- この結果は $p \geq 1$ の時、特に非自明である。なぜならETHの破れは“bath”の小ささゆえでないから。



$p = 1$ $p = 0$

- 一般化:
  $A(g)U_\alpha(\gamma)$ か $A(g)^\dagger U_\alpha(\bar{\gamma})$ がETHを破る。

  $A(g)$: operator defined on a region $g(\subset \mathcal{M}\ )$ with $g \cap \bar{\gamma} = \phi$

  ➡ ある固定したγに対して、多くのETHを破る演算子が存在する。

Projective phase and ETH-breaking

射影表現

Let G be an Abelian group

$$U_{g_1}U_{g_2} = e^{i\,\phi(g_1,g_2)}U_{g_1g_2}, \qquad g_1, g_2 \in G,$$
$$U_{g_1}U_{g_2} = e^{i\,\phi(g_1,g_2)-i\,\phi(g_2,g_1)}U_{g_2}\,U_{g_1}$$

U_gは対称性演算子であるため、エネルギー固有状態$|E\rangle$は U_gと
の同時固有状態に取れる:

$$H|E\rangle = E|E\rangle, \qquad U_g|E\rangle = e^{i\alpha_g}|E\rangle$$

- 系が射影表現を持つ時、エネルギー固有状態は縮退する:

$$\langle E|\,U_{g_2}\,|E\rangle = \langle E|\,U_{g_1}^\dagger U_{g_2}U_{g_1}\,|E\rangle = e^{-(i\phi(g_1,g_2)-i\phi(g_2,g_1))}\,\langle E|\,U_{g_2}\,|E\rangle$$

$$e^{i\,\phi(g_1,g_2)-i\,\phi(g_2,g_1)} \neq 1 \Rightarrow \qquad \langle E|\,U_{g_2}\,|E\rangle = 0$$

➡ $|E\rangle$ と $U_{g_2}|E\rangle$ が直交

Projective phase and ETH-breaking

射影表現による縮退と対称性セクターの混合

$$U_{g_1}(U_{g_2}|E\rangle) = e^{i\phi(g_1,g_2)-i\phi(g_2,g_1)}e^{i\alpha}(U_{g_2}|E\rangle)$$

$e^{i\,\phi(g_1,g_2)-i\,\phi(g_2,g_1)} \neq 1$ の時、$|E\rangle$ と$U_{g_2}|E\rangle$は異なる対称性セクターに属する。(⇔ 異なるチャージを持つ。)

荷電物体の行列要素

W_qを荷電物体とする: $$U_{g_1}^{\dagger}W_qU_{g_1} = e^{iq_{g_1}}W_q$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} \exists g_1 \in G & \mathrm{e}^{iq_{g_1}} \neq 1 & \Rightarrow & \langle E,\alpha|W_q|E,\alpha\rangle = 0 \\ \forall g_1 \in G & \mathrm{e}^{iq_{g_1}} = 1 & \Rightarrow & \langle E,\alpha|W_q|E,\beta\rangle = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \end{array}}$$

$$H|E,\alpha\rangle = E|E,\alpha\rangle, \quad H|E,\beta\rangle = E|E,\beta\rangle,$$

$$U_{g_1}|E,\alpha\rangle = e^{i\alpha}|E,\alpha\rangle, \quad U_{g_1}|E,\beta\rangle = e^{i\beta}|E,\beta\rangle,$$

Projective phase and ETH-breaking

Recall

Assumptions:

i) 演算子$U_\alpha(\tilde{C})$ が分解できる: $U_\alpha(\tilde{C}) = U_\alpha(\gamma)U_\alpha(\bar{\gamma})$.

ii) エネルギー固有状態 $|E_n\rangle, |E_m\rangle$, with $E_n, E_m \in [E, E+\delta E]$,
s.t. $\langle E_n | U_\alpha(\tilde{C}) | E_n \rangle \neq \langle E_m | U_\alpha(\tilde{C}) | E_m \rangle$ が存在する。

iii) マイクロカノニカルアンサンブルでの期待値 $\langle U_\alpha(\tilde{C})\rangle_{\mathrm{mc}}^{\delta E} \neq 0$.

Idea

$\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$対称性の射影表現を考え、片方($\mathbb{Z}_M$)を破る摂動を加える

i.e., $G_1 = \mathbb{Z}_N, G_2 = \mathbb{Z}_M$ として、 $U_{g_1}\tilde{U}_{g_2} = e^{i\phi(g_1,g_2)}\tilde{U}_{g_2}U_{g_1}$

$$U_{g_1}^\dagger W_q U_{g_1} = W_q, \quad \tilde{U}_{g_2}^\dagger W_q \tilde{U}_{g_2} = e^{iq_{g_2}} W_q, \qquad g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2.$$

$$\boxed{\tilde{H}(\lambda) := H + \lambda H_1, \qquad H_1 := \sum_{j:\text{ site}} \frac{W_q(j) + W_q(j)^\dagger}{2}}$$

Projective phase and ETH-breaking

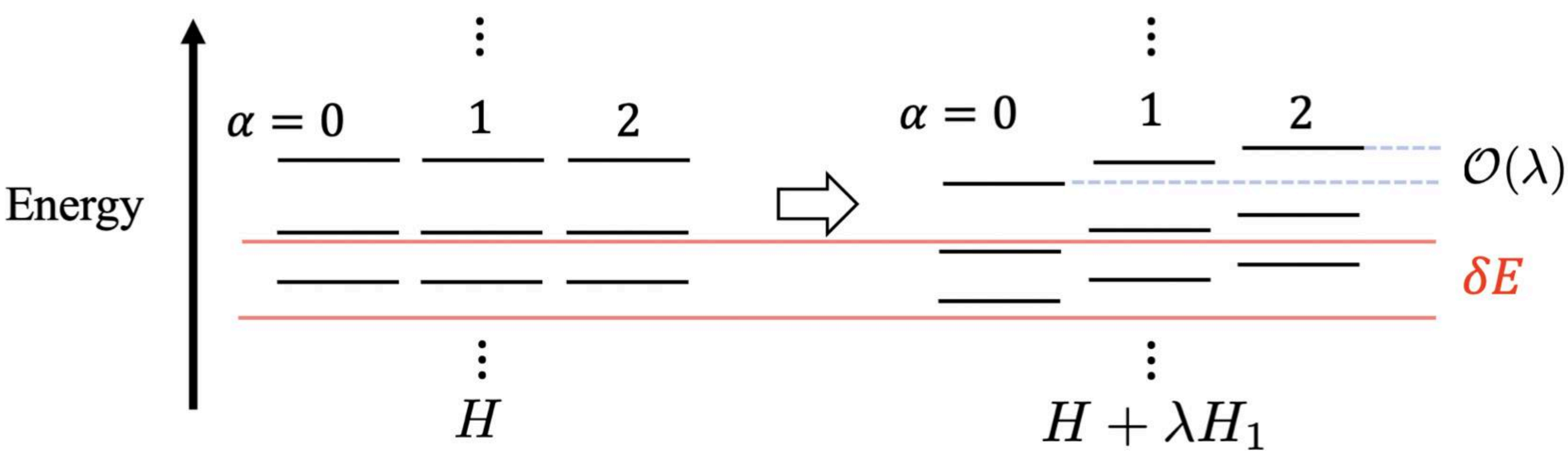
$\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$対称性の射影表現を考え、片方($\mathbb{Z}_M$)を破る摂動を加える

$$\tilde{H}(\lambda) := H + \lambda H_1, \qquad H_1 := \sum_{j:\,\mathrm{site}} \frac{W_q(j) + W_q(j)^\dagger}{2}$$

(縮退がある時の)Hellmann-Feynman theoremを用いる:

$$\frac{dE(\alpha;\lambda)}{d\lambda} = \langle E,\alpha;\lambda|\, H_1 \,|E,\alpha;\lambda\rangle = \sum_{j:\,\mathrm{site}} \mathrm{Re}\,\langle E,\alpha;\lambda|\, W_q(j) \,|E,\alpha;\lambda\rangle$$

Note: energy spectrumのギャップ$\simeq O(e^{-\,\mathrm{Volume}})$のため、
通常の摂動論は使えない



Numerical analysis for lattice systems

e.g.1) (1+1)-dimensional $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$-symmetric spin chain

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \frac{1}{N}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i \frac{2}{N}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{2\pi i \frac{N-1}{N}} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$ZX = e^{\frac{2\pi i}{N}} XZ.$$

対称性演算子

$$U_1 := \prod_{j=1}^{L} Z_j, \qquad \tilde{U}_1 := \prod_{j=1}^{L} X_j.$$

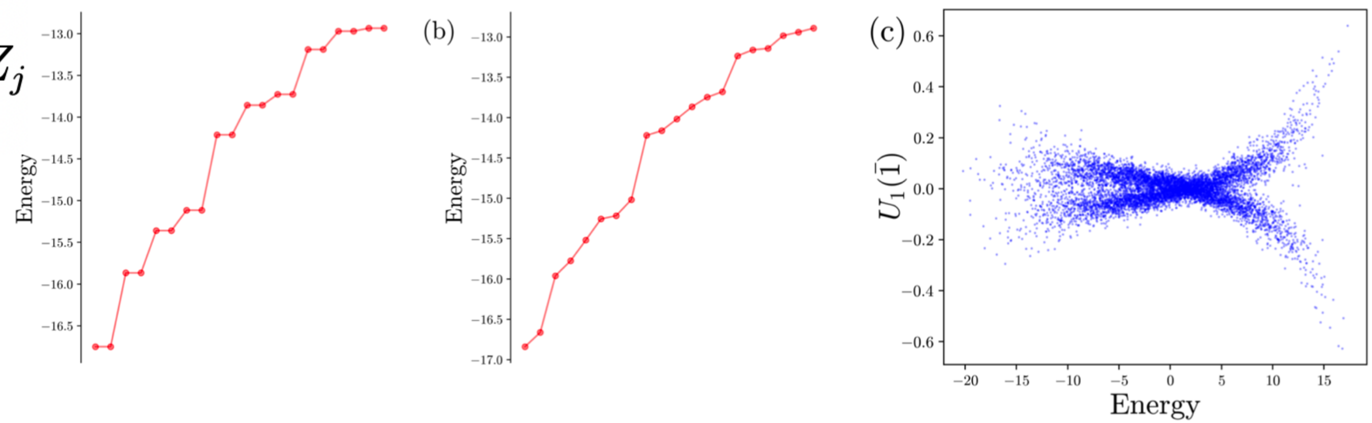
$\gcd(N, L) \neq N$ なら非自明な射影位相を持つ

Numerical analysis for lattice systems

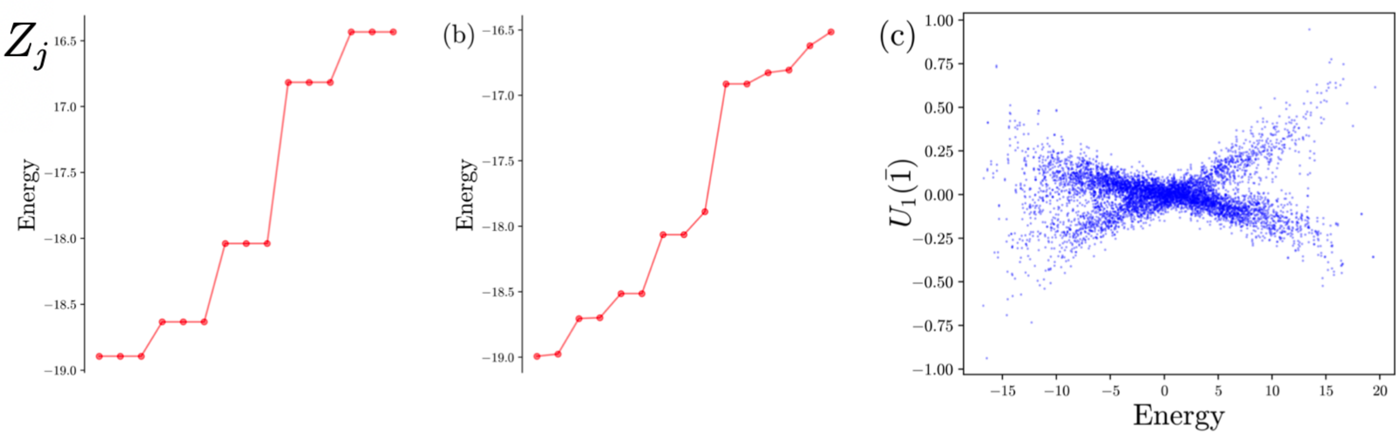
e.g.1) (1+1)-dimensional $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$-symmetric spin chain

$$U_1^\dagger H_N U_1 = H_N, \qquad \widetilde{U}_1^\dagger H_N \widetilde{U}_1 = H_N$$

$$\tilde{H}_{N=2} := H_{N=2} + \lambda \sum_{j=1}^{L} Z_j$$



$$\tilde{H}_{N=3} := H_{N=3} + \lambda \sum_{j=1}^{L} Z_j$$



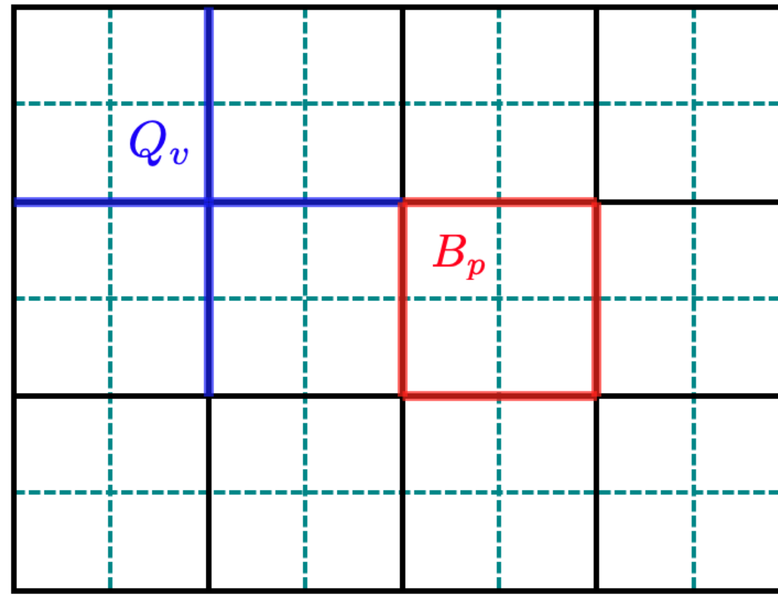
Numerical analysis for lattice systems

e.g.2) (2+1)-dimensional $\mathbb{Z}_2$ lattice gauge theory

$$H_{\mathbb{Z}_2} = -\sum_{p \in \text{plaquette}} \lambda_p B_p - \sum_{b \in \text{link}} \lambda_b \sigma_b^1$$

$$B_p := \prod_{b \in \text{plaquette } p} \sigma_b^3$$

$\sigma_b^{1,2,3}$: Pauli行列 at b



対称性演算子

$\mathbb{Z}_2$ electric 1-form symmetry

$$U(C^*) = \prod_{b^* \in C^*} \sigma_{b^*}^1$$

$\mathbb{Z}_2$ “parity” symmetry

$$\tilde{U} := \prod_{\boldsymbol{r},j} \sigma_{\boldsymbol{r},j}^2$$

Summary and outlook

- 高次対称性は熱化に影響を与える。
- p-次対称性を持つ系が仮定(*)を満たす時、$(d-p)$-次元的なETHを破る演算子を具体的に構成できる。

<u>仮定(*)の再考</u>

- $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$対称性の射影表現を考え、片方($\mathbb{Z}_M$)を破る摂動を加えることで、仮定(*)を満たすことができる。

  ➡ 系の中間スペクトラムの情報を必要としない

Outlook

- Relation to mixed state topological orders
- Effect on entanglement spectrum
- Demonstration for other QFTs

  $\mathbb{Z}_N$ gauge theory, U(1) gauge theory, SU(N) gauge theory…

  superconducter, super fluid…

Etc…