Generalized chiral instabilities, linking numbers, and non-invertible symmetries

横倉諒 (慶應大)

2023. 8. 28

熱場の量子論とその応用

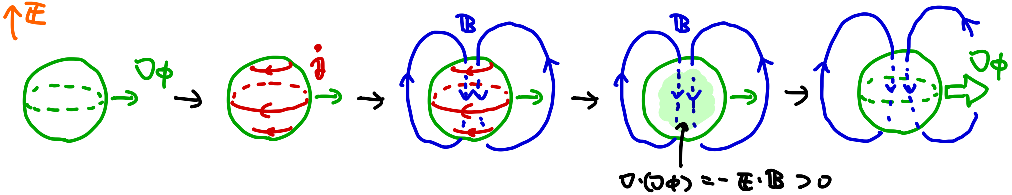
N. Yamamoto & RY, JHEP **07** (2023) 045 [2305.01234]

に基づく

メッセージ

トポロジーと対称性はダイナミクスにおいても重要である

概要



1. 外部電場中のアクシオン電磁気学における、磁場とアクシオン場が増幅する不安定性について、
   - 増幅された $\boldsymbol{B}$ と $\nabla\phi$ が作る電気分極で不安定性が弱められる
   - 増幅された $\boldsymbol{B}$ と $\nabla\phi$ はリンク数と関連したトポロジカルな量 $\int d\boldsymbol{S}\cdot\phi\boldsymbol{B}$ を持つことを示した。
2. 上記の機構は、既知のカイラル不安定性における同様の機構の一般化として理解できる
3. 生成されるトポロジカルな量と非可逆対称性の関係を議論した

もくじ

1 導入: アクシオン電磁気学とカイラル不安定性

2 一般化カイラル不安定性の例: 電場中のアクシオン電磁気学の不安定性

3 磁気ヘリシティと非可逆対称性

アクシオン電磁気学 = アクシオン ϕ + 光子 A_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

作用 (このトークでは無質量のアクシオンと光子を考えます)

$$S = -\int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi^2} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right)$$

特徴

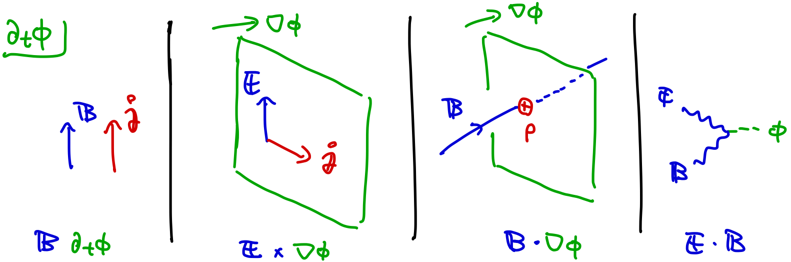
1. 素粒子・宇宙・ハドロン・物性など、現実的な理論に遍在するシンプルな模型

   QCD アクシオン、インフラトン、π^0 中間子、トポロジカル物質、...

2. 場の 3 次のトポロジカル結合 $\phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$: 係数は量子異常で決まる。

3 次のトポロジカル結合 $\phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ は非自明な物理を与える

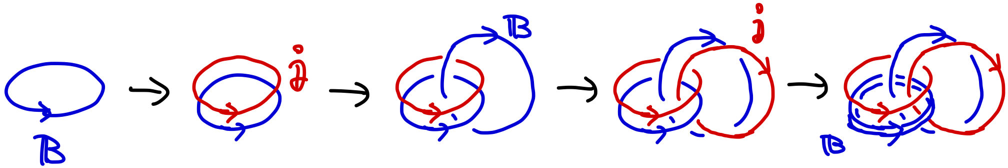
トポロジカル結合が与える物理



- 誘導電流: $\nabla\times\boldsymbol{B}-\partial_t\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi^2}(\boldsymbol{B}\partial_t\phi-\boldsymbol{E}\times\nabla\phi)$ (カイラル磁気効果 [Fukushima, et al. '08] 異常ホール効果 [Sikivie '84])
- 誘導電荷: $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi^2}\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi$ [Sikivie '84]
- 電磁場はアクシオンのソース: $(\partial_t^2-\nabla^2)\phi=\frac{1}{4\pi^2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$

$\partial_t\phi$ が一様である外場中において、電磁場に不安定性が現れる

カイラル不安定性 [Carroll, et al. '89]



- アンペールの法則 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\partial_t \phi$
- 磁場と平行な誘導電流により、磁場が指数関数的に増大する
- 応用例: 中性子星や初期宇宙における磁場生成 [Joyce & Shaposhnikov '97; Anber & Sorbo '07; Akamatsu & Yamamoto '13]

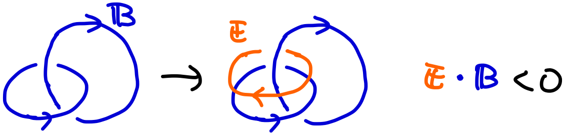
  ($\partial_t \phi$: カイラル化学ポテンシャル or インフラトンの時間変化)

- 技術的には、赤外領域のタキオン的不安定性: 空間1階微分項 $\to$ 分散関係 $\omega^2 = |\boldsymbol{k}|^2 \pm |\partial_t \phi||\boldsymbol{k}|$.

  $|\boldsymbol{k}| < |\partial_t \phi|$ で ω が純虚数となり、$\boldsymbol{B} \sim e^{i\omega t} \sim e^{\sqrt{|\boldsymbol{k}\partial_t \phi| - |\boldsymbol{k}|^2}\, t}$ となる

この不安定性は病的なものではなく、磁場の増加とともに弱くなる

$\partial_t \phi$ の減少と磁気ヘリシティの増加



$\partial_t \phi$ の減少 (少なくとも線形近似で)

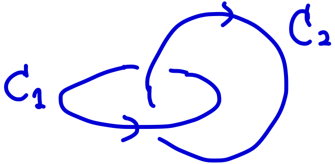
- ファラデーの電磁誘導の法則: $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$
- アクシオンの運動方程式: $\partial_t^2 \phi = \frac{1}{4\pi^2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} < 0$

減った $\partial_t \phi$ は何になるのか？ $\rightarrow$ 磁気ヘリシティ $\int d^3\boldsymbol{x} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$

- 運動方程式 $\partial_\mu (\partial^\mu \phi + \frac{1}{8\pi^2} A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}) = 0$ より、 $\int d^3\boldsymbol{x} (\partial_t \phi + \frac{1}{8\pi^2} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ が保存
- $\partial_t \phi$ が小さくなるので $\int d^3\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ が増加

磁気ヘリシティの物理的意味は？

磁気ヘリシティ = 磁束のリンク数 [Demoulin, et al., '06]



簡単のため磁束チューブを考えると、 $\int d^3\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 2\Phi_1\Phi_2\,\mathrm{Link}\,(C_1, C_2)$

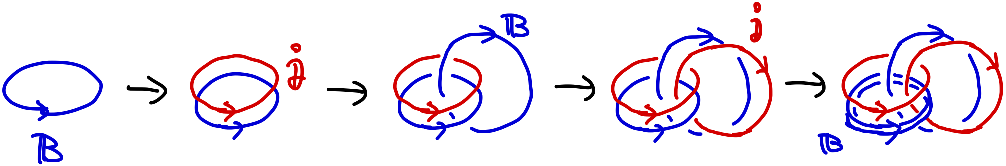
- Φ_1, Φ_2 それぞれ磁束チューブ C_1, C_2 の磁束
- $\mathrm{Link}\,(C_1, C_2)$: 閉曲線 C_1 と C_2 のリンク数

導出: ベクトルポテンシャルに関するビオ・サヴァールの法則 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{x}'\,\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$ を使う

生成された磁場はトポロジカルに安定であると理解できる

問い: 不安定性、トポロジカルに安定な磁場の生成機構はどれくらい普遍的か？

カイラル不安定性の一般化？



不安定性が出る他の例

- 外部電場中のアクシオン電磁気学 ($\partial_t \phi \to \boldsymbol{E} \sim \partial_t \boldsymbol{A}$) [massive axion の場合 Ooguri & Oshikawa '11]
- $(4+1)$ 次元 Maxwell-Chern-Simons 理論に外部電場をかける ($\phi F \wedge F \to A \wedge F \wedge F$) [Nakamura et al., '09]

問い: これらの不安定性についても、不安定性の減少やトポロジカル量の生成が言えるか？

今回わかったこと [Yamamoto & RY, '23]

- 外部電場中のアクシオン電磁気学の不安定性でも、不安定性の減少やトポロジカル量の生成が言える
- さらに、5 次元 Maxwell-Chern-Simons 理論や反対称テンソルゲージ理論の不安定性にも一般化できる (例えば11次元超重力理論に現れる 3-form ゲージ場)

一般化カイラル不安定性

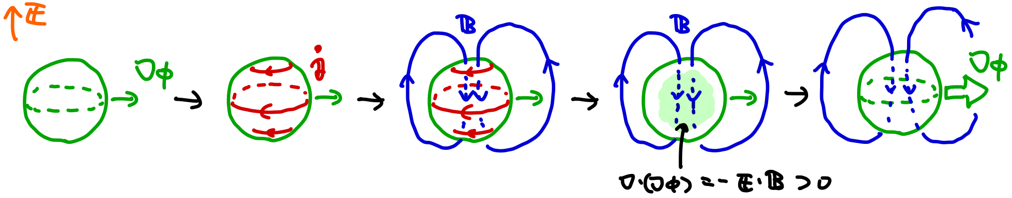
- 3次の Chern-Simon 項的な結合を持つ無質量可換反対称テンソルゲージ理論に外部電場をかけたとき、不安定性が生じる
- この不安定性はテンソル場の磁場の増幅によって弱められる (少なくとも線形近似の範囲では)
- 増幅された磁場はトポロジカルに安定

このトークでは電場中のアクシオン電磁気学の不安定性について議論する

一般化カイラル不安定性の例: 電場中のアクシオン電磁気学の不安定性

Yamamoto & RY, JHEP **07** (2023) 045

電場中のアクシオン電磁気学の不安定性 [Ooguri & Oshikawa '11]

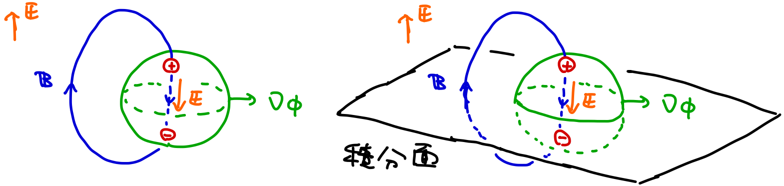


一様電場中で $\nabla\phi$ と $\boldsymbol{B}$ が増幅する不安定性が生じる ($\nabla\phi$ も磁場の一種と見なす)

- アンペールの法則 $\nabla \times \boldsymbol{B} = -\frac{1}{4\pi^2}\boldsymbol{E} \times \nabla\phi$
- アクシオンの運動方程式 $\nabla^2\phi = -\frac{1}{4\pi^2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$

$\nabla\phi$ と $\boldsymbol{B}$ の増幅 $\to$ 外場 $\boldsymbol{E}$ の減少

電場の減少と電気分極の増加



誘導電荷が電場を打ち消す

- ガウスの法則より $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi^2}\boldsymbol{B} \cdot \nabla\phi$
- 誘導電荷により外場と逆向きの電場が生成される

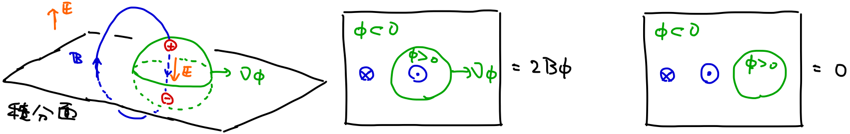
電気分極の増加

- ガウスの法則より電束 $\int_S d\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{E} + \frac{1}{4\pi^2}\phi\boldsymbol{B})$ が保存
- $\boldsymbol{E}$ が減少するので、電気分極 $\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \frac{1}{4\pi^2}\phi\boldsymbol{B}$ が増加する

電気分極 $\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \phi\boldsymbol{B}$ にトポロジカルな意味はあるか？ (cf. 磁気ヘリシティとリンク数の関係)

一般化磁気ヘリシティ

$\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\phi\boldsymbol{B}$ は積分面上での $\boldsymbol{B}$ と $\nabla\phi$ のリンク数



簡単のため $\boldsymbol{B}$ が磁束チューブ、$\nabla\phi$ が無限に薄い面だとする。

- 電束の積分面上では $\boldsymbol{B}$ は向きを持った2点、$\nabla\phi$ は閉曲線
- 閉曲線の内外で ϕ の符号が変わる。
- $\boldsymbol{B}$ の 2点と $\nabla\phi$ の閉曲線がリンクしていると面積分が有限、リンクしていないと面積分が0になる

生成された $\boldsymbol{B}$ と $\nabla\phi$ はトポロジカルに安定であると理解できる

磁気ヘリシティと非可逆対称性

保存量 $\Rightarrow$ 対称性? (ネーターの定理の逆)

(一般化) カイラル不安定性では保存量, e.g., $\int d^3\boldsymbol{x}(\partial_0\phi + \frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ が重要だった

Q. この保存量に対応する対称性はあるか?

A. ある。しかしユニタリー演算子で表せるような従来の対称性ではない。

Q. 対称性変換 $Ue^{i\phi}U^\dagger = e^{i\alpha}e^{i\phi}$ を与えるようなユニタリー演算子

$$U = \exp\left(i\alpha\int_V d^3\boldsymbol{x}(\partial_0\phi + \frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\right), \quad (\alpha\in\mathbb{R},\ V\text{: 閉じた3次元空間})$$

の何が問題なのか？

A1. 磁気ヘリシティ $\exp\left(i\alpha\int d^3\boldsymbol{x}\frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$ がゲージ不変なのは自明なとき $e^{i\alpha}=1$ のみ

A2. カイラル量子異常の帰結

しかし...

近年の発展: パラメータが有理数 (e.g., $\alpha = \frac{2\pi}{q}$, $q\in\mathbb{Z}$) のとき、ユニタリー性を捨てれば磁気ヘリシティ $\exp\left(i\alpha\int d^3\boldsymbol{x}\frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$ をゲージ不変に定義し、対称性を構成することができる!

ゲージ不変な磁気ヘリシティ [Choi, et al., '22; Córdova & Ohmori, '22]

Chern-Simons 理論を用いた磁気ヘリシティの書き換え

$$\exp\left(\frac{i}{4\pi q}\int_V d^3\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) \to \int \mathcal{D}c\exp\left(i\int_V d^3\boldsymbol{x}\left(-\frac{q}{4\pi}\epsilon^{ijk}c_i\partial_j c_k + \frac{i}{2\pi}\epsilon^{ijk}c_i\partial_j A_k\right)\right)$$

- 平方完成の逆 $\frac{1}{q}x^2 \to -qy^2 + 2xy$ を行って、q が分子に来るようにした
- 右辺は $U(1)$ Chern-Simons 理論の分配関数。ゲージ不変性は整数 q が分子にあるため保たれる
  - c_μ: V 上の $U(1)$ ゲージ場, Dirac 量子化 $\int \partial_\mu c_\nu dS^{\mu\nu} \in 2\pi\mathbb{Z}$
  - 従来の磁気ヘリシティは、自明な Dirac 量子化 $\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$ の元で EOM $c_{\mu\nu} = \frac{1}{q}F_{\mu\nu}$ から得られるナイーブなもの
  - 位相因子の和 (経路積分) なのでユニタリー性が失われた

この変形によって対称性の生成子を構成できる

非可逆対称性 [Choi, et al., '22; Córdova & Ohmori, '22]

ゲージ不変な保存量を具体的に構成できる:

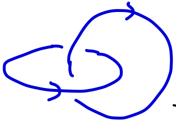
非可逆対称性の生成子

$$
\begin{aligned}
D = & \exp\left(\frac{2\pi i}{q}\int_V d^3\boldsymbol{x}\,\partial_0\phi\right) \\
& \times \int \mathcal{D}c \exp\left(i\int_V d^3\boldsymbol{x}\left(-\frac{q}{4\pi}\epsilon^{ijk}c_i\partial_j c_k + \frac{i}{2\pi}\epsilon^{ijk}c_i\partial_j A_k\right)\right)
\end{aligned}
$$

- 保存則 = アクシオンの EOM
- アクシオンの有理数パラメータによる変換 $De^{i\phi} = e^{\frac{2\pi i}{q}} e^{i\phi} D$
- 対称性は非可逆 (位相因子の和)

磁気ヘリシティの安定性は非可逆対称性で保証される

磁気ヘリシティ = リンク数 [Yamamoto & RY, '23]

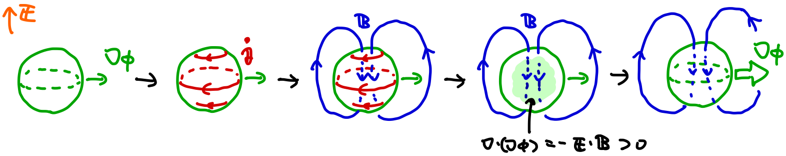
$D\left[A = \right.$  $\left. \right] \propto \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \Phi_1 \Phi_2 \, \mathrm{Link}(C_1, C_2) \right)$

- 非可逆対称性についても磁気ヘリシティとリンク数の関係は成立する

一般化磁気ヘリシティへの拡張も可能

- $\int_S \phi \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \to$ 非可逆 1 次対称性 [Choi, et al., '22; RY '22]

まとめ



今回話したこと

- 外部電場中のアクシオン電磁気学の不安定性はカイラル不安定性の一般化として理解できる
  - $\boldsymbol{B}$ と $\nabla\phi$ が不安定性によって増幅する
  - 増幅した $\boldsymbol{B}$ と $\nabla\phi$ が作る電気分極で電場が弱められる
  - $\boldsymbol{B}$ と $\nabla\phi$ はリンク数と関連した量 $\int d\boldsymbol{S}\cdot\phi\boldsymbol{B}$ を持ち、トポロジカルに安定
- 磁気ヘリシティの安定性は非可逆対称性からも理解できる

論文で議論したこと

- 無質量可換反対称テンソルゲージ理論での一般化カイラル不安定性を議論した
- 一般化磁気ヘリシティの安定性を非可逆対称性で議論した

Appendix

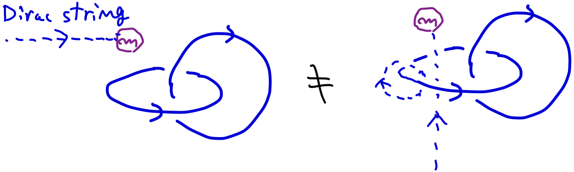
磁気ヘリシティの大局的ゲージ不変性 (1/3)

Large gauge invariance のこと

大局的ゲージ不変性 = ディラック弦の挿入に対する物理量の不変性

- 磁気単極子 $\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi m$
- ディラック弦 = ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を一価にするための非物理的磁束
- 物理量はディラック弦の挿入の仕方で不変であるべし (ディラックの量子化条件もここから導く)

しかし、磁気ヘリシティはディラック弦の挿入で値が変わってしまう



より正確には...

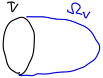
磁気ヘリシティの大局的ゲージ不変性 (2/3)

ユニタリー演算子 $\exp\left(i\alpha\int_V d^3\boldsymbol{x}\,\frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$ における

ストークスの定理とディラック量子化条件の整合性が重要

- 問題: 被積分関数がゲージ不変でない
- ストークスの定理で被積分関数を無理やりゲージ不変にする

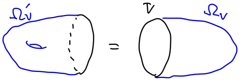
$$\exp\left(i\alpha\int_V d^3\boldsymbol{x}\,\frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) = \exp\left(i\alpha\int_{\Omega_V} d^4x\,\frac{1}{16\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right), \quad \partial\Omega_V = V$$



- 右辺はゲージ不変だが、 Ω_V を手でとってしまった。

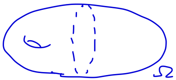
磁気ヘリシティの大局的ゲージ不変性 (3/3)

- 4次元空間 Ω_V の取り方に依存しない条件が必要



- つまり、

$$\exp\left(-i\alpha\int_{\Omega} d^4x\,\frac{1}{16\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right) = 1$$



- ディラックの量子化条件より、 $\int_{\Omega} d^4x\,\frac{1}{16\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \in \mathbb{Z}$ であるので、

  $e^{i\alpha} = 1$ でなければならない。

- よって $U \propto \exp\left(i\alpha\int_V d^3\boldsymbol{x}\,\frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$ は非自明な変換を生成しない

Bibliography

Bibliography - I

[1] F. Wilczek, "Two Applications of Axion Electrodynamics," Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1799.
(page 5).

[2] P. Sikivie, "On the Interaction of Magnetic Monopoles With Axionic Domain Walls," Phys. Lett. **137B** (1984) 353–356.
(page 6).

[3] K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, "The Chiral Magnetic Effect," Phys. Rev. D **78** (2008) 074033, [arXiv:0808.3382 [hep-ph]].
(page 6).

[4] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, "Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics," Phys. Rev. D **41** (1990) 1231.
(page 7).

[5] M. Joyce and M. E. Shaposhnikov, "Primordial magnetic fields, right-handed electrons, and the Abelian anomaly," Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 1193–1196, [arXiv:astro-ph/9703005].
(page 7).

[6] M. M. Anber and L. Sorbo, "Nflationary Magnetic Fields," AIP Conf. Proc. **903** (2007) no. 1, 669–672.
(page 7).

[7] Y. Akamatsu and N. Yamamoto, "Chiral Plasma Instabilities," Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 052002, [arXiv:1302.2125 [nucl-th]].
(page 7).

[8] H. Ooguri and M. Oshikawa, "Instability in magnetic materials with dynamical axion field," Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 161803, [arXiv:1112.1414 [cond-mat.mes-hall]].
(page 10).

[9] S. Nakamura, H. Ooguri, and C.-S. Park, "Gravity Dual of Spatially Modulated Phase," Phys. Rev. **D81** (2010) 044018, [arXiv:0911.0679 [hep-th]].
(page 10).

[10] Y. Choi, H. T. Lam, and S.-H. Shao, "Non-invertible Global Symmetries in the Standard Model," arXiv:2205.05086 [hep-th].
(pages 18, 19).

Bibliography - II

[11] C. Cordova and K. Ohmori, "Non-Invertible Chiral Symmetry and Exponential Hierarchies," arXiv:2205.06243 [hep-th]. (pages 18, 19).