レプリカ交換の手法を用いたアルゴリズムと行列幾何学

筑波大学素粒子論　D2
菅野聡

熱場の量子論とその応用　2023/8/28

花田政範さん(ロンドン大学)、松浦壮さん(慶應大)、渡辺展正さん(YITP)との共同研究

1. Introduction

$(p+1)$dim SYM $\longleftrightarrow$ **string theory**

[Itzhaki-Maldacena-Sonnenscein-Yankielowicz]

action

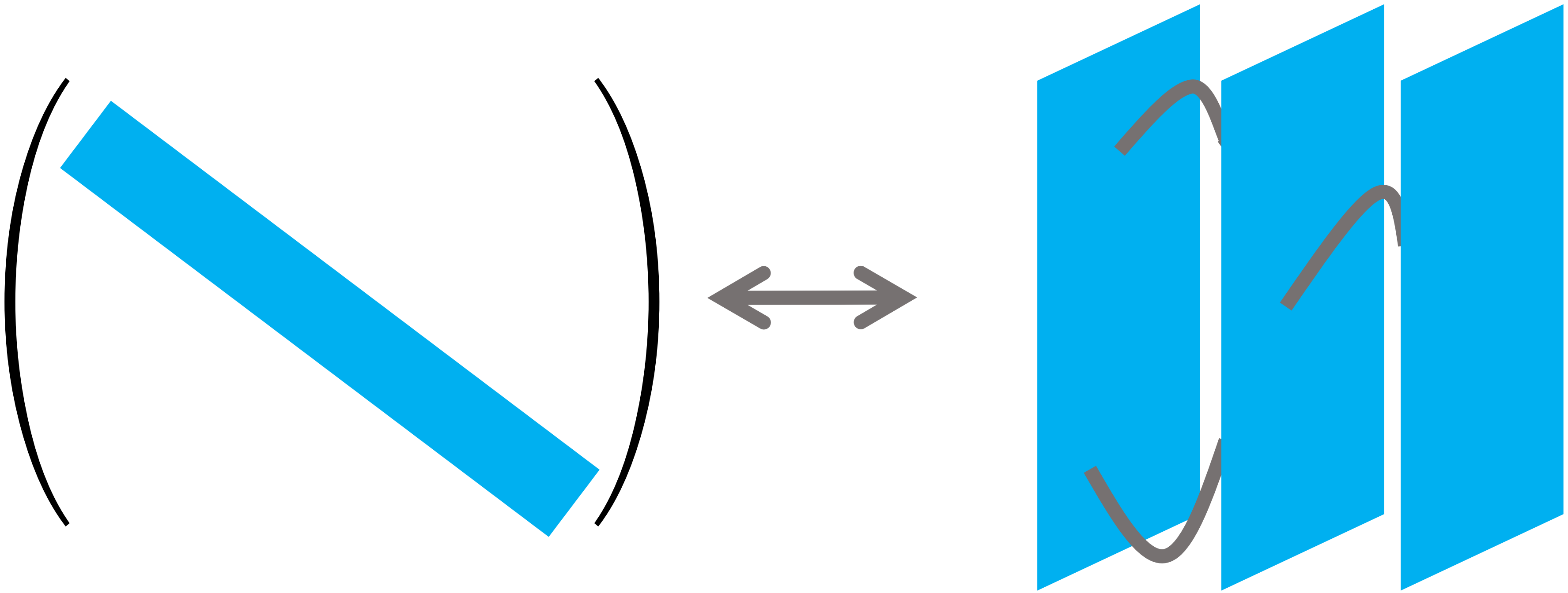
$$S = \int d^{p+1}x\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}\left(D_\mu X_I\right)^2 + \frac{g_{YM}^2}{4}\left[X_I, X_J\right]^2 + (\mathrm{fermion})\right)$$

$(9-p)$個のスカラー場 X_I

(gauge theoryをもとにstring theoryの)

D-brane配置はどう再現されるか

$$\lambda = 4\pi g_s N = g_{YM}^2 N \ll 1$$ [Witten]

$X_I =$ 

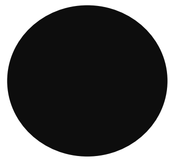
$p+1$ dim $U(N)$ SYM
($(9-p)$個のスカラー場X_Iを含む)

平行に並んだN個のDp-brane
(とその間のopen string)

$$\lambda = 4\pi g_s N = g_{YM}^2 N \gg 1,$$

$$E \sim N^2 \quad (\text{'t Hooft large } N \text{ limit})$$

$$X_I = \begin{pmatrix} & ? & \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



Black p-brane solution

$\lambda \gg 1$の時にはgeometryはどう再現できるか

Geometryを読み取るには…

配位$\{X_I\}$を用いて

U : element of $SU(N)$

$$\left\langle \min_U R_\infty(U) \right\rangle = \left\langle \min_U \max_{I,\alpha} \left| X^I_\alpha - \left(U^{-1} Y^I U\right)_\alpha \right| \right\rangle$$

を最小化する行列 Y_I を決定 [Hanada,SK,Matsuura,Watanabe]

極小値が多く、最小化は数値的に困難

本研究の結果

レプリカ温度を導入した、
効率的な最小化アルゴリズムの提案

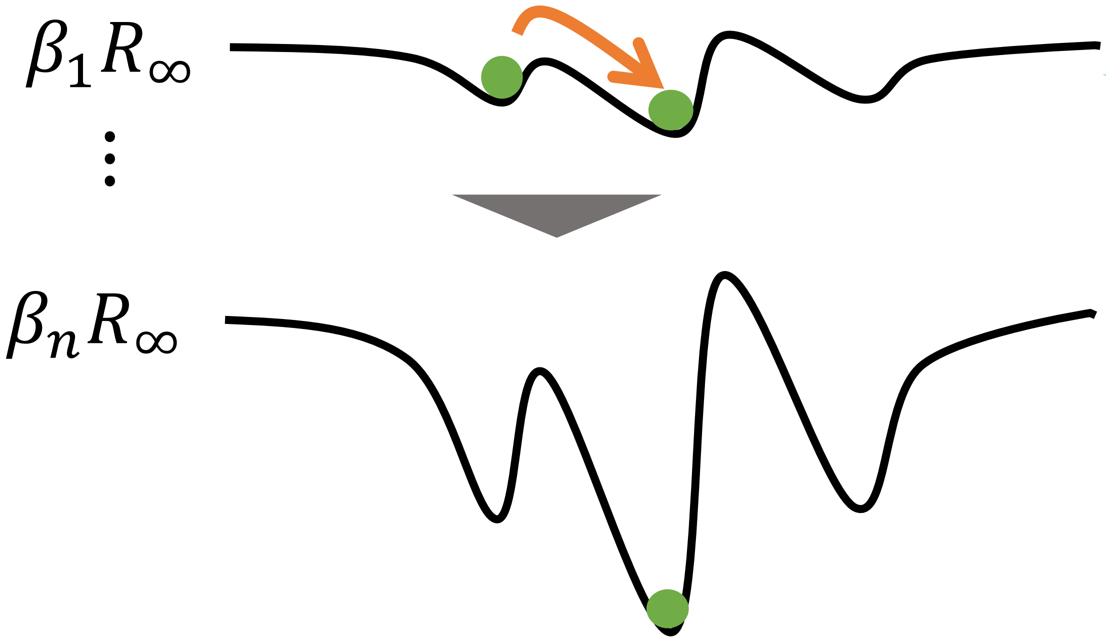
Generalized REMC、Generalized RESA

応用

toy modelを用いて、geometryを読み取った

2. 最小化のアルゴリズム

シミュレーティッドアニーリング(SA)



$\boldsymbol{\beta} \ll 1$では抜け出せる

温度を導入

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n$$

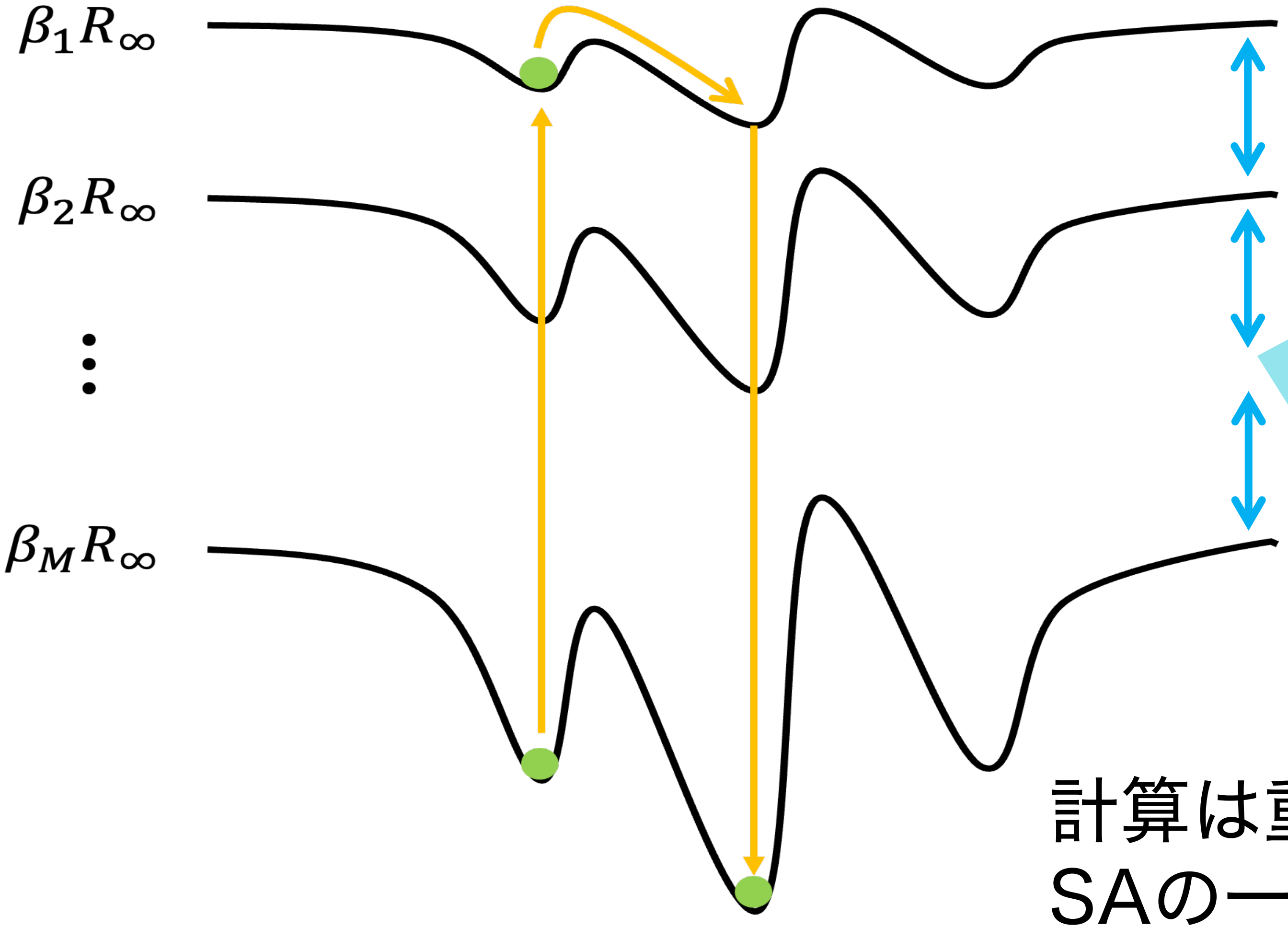
作用

$$\beta_i R_\infty$$

$\boldsymbol{\beta_1} \rightarrow \boldsymbol{\beta_2} \rightarrow \cdots \rightarrow \boldsymbol{\beta_n}$とすることで効率的に最小化できる

レプリカ交換モンテカルロ法(REMC)

温度だけが違うレプリカを用意　$\beta_i R_\infty$



SAと異なり
レプリカ間を行き来できる

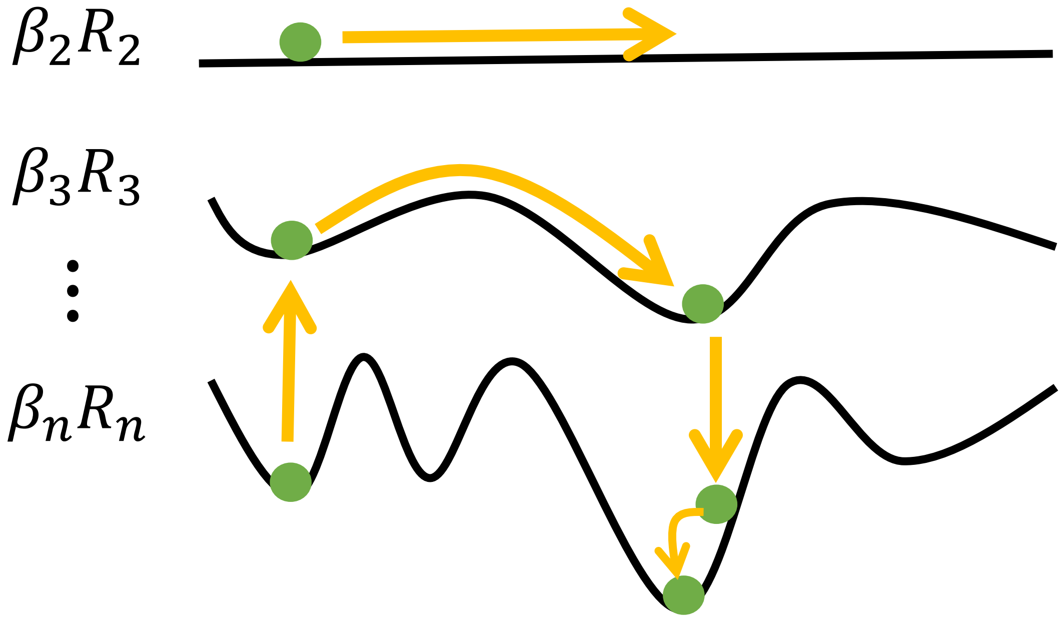
計算は重くなるが
SAの一方通行性が解決されている!!

Generalized REMC: 作用も異なるレプリカを用意

$$\boldsymbol{R_p(X)} = \left(\sum_{i,j,I} \left| X^I_{ij} - \left(U^{-1} Y^I U\right)_{ij} \right|^p \right)^{1/p}$$

少ない　**極小の数**　多い

$$R_2(X) \geq R_3(X) \geq \cdots \geq R_\infty(X)$$



各レプリカで極小の構造が異なり
最小への通り道が豊富

$\beta_i \ll 1$までいかなくても
探索範囲を広げられる

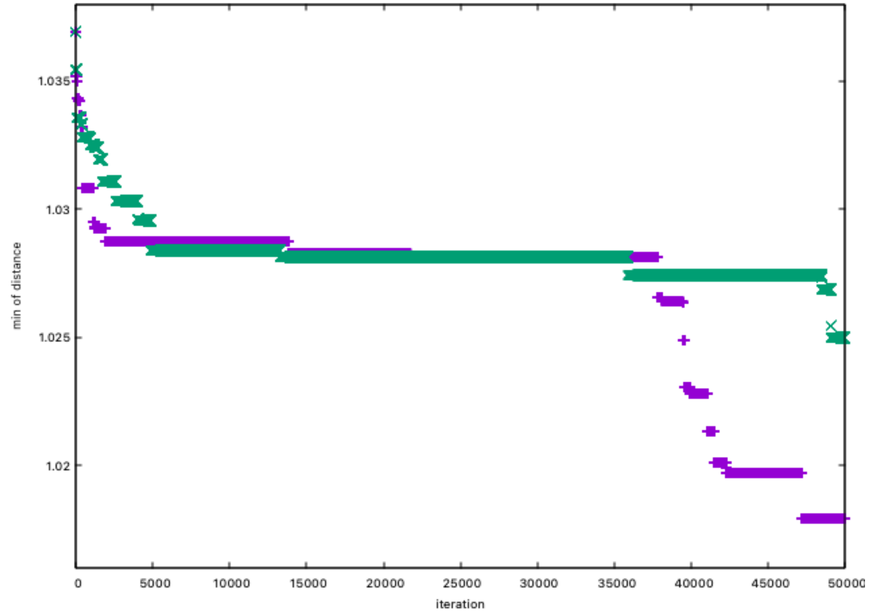
REMCとgeneralized REMCの結果

最小値が$\min R_\infty = 1$としてわかっている行列

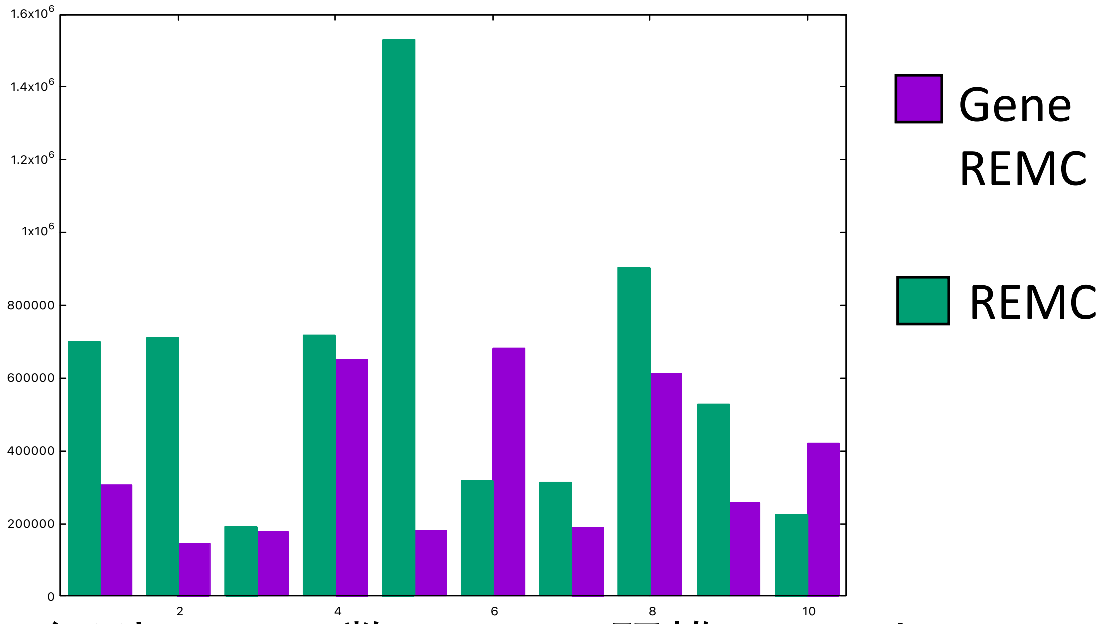
$$Y = \sum_{a=1}^{N^2-1} \tau_a \qquad (\tau_a : SU(N)\text{の生成子})$$

これの最小化

この行列を適当なユニタリー行列Vで変換 VYV^{-1}



6×6行列配位に対する最小化のHistory

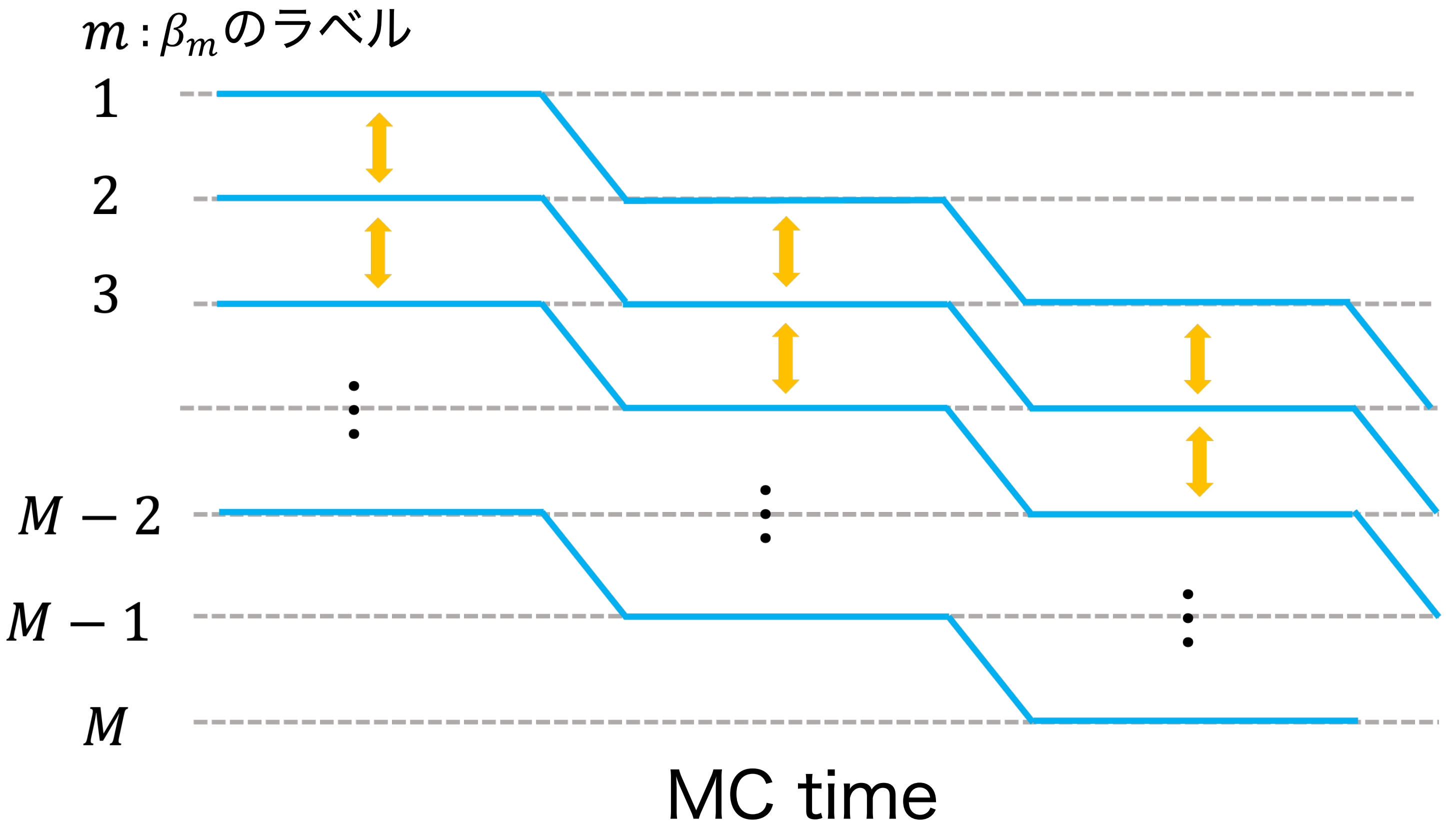


6×6行列,replica数500での距離1.025までの反復数(計算コスト)

レプリカ交換SA(RESA)

$\beta_i \ll 1$までいかなくても探索範囲を広げられる

→**全てのレプリカを行き来しなくても効率的に最小化!!**



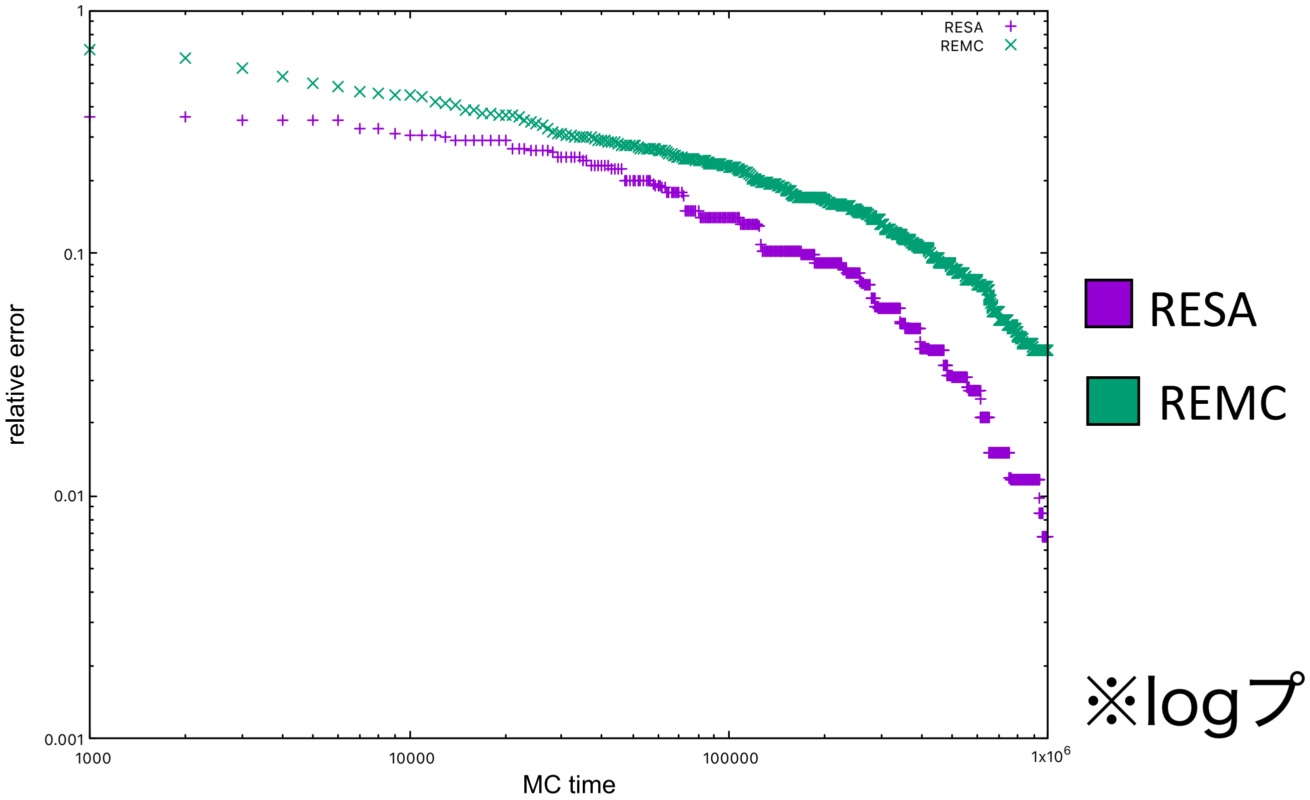
SAと拡張REMCを組み合わせてコスト削減

REMCとRESAの結果

mock dataに対して、

REMC : 温度 990 ~ 1000

RESA : 温度 2 ~ 11 → 温度 3 ~ 12 … → 温度 990 ~ 1000



※logプロット、8×8行列

3. 数値計算結果

$$S = {\color{red}N}\,\mathrm{tr}\left(\frac{m^2}{2}X^2 + \frac{1}{4}X^4\right)$$

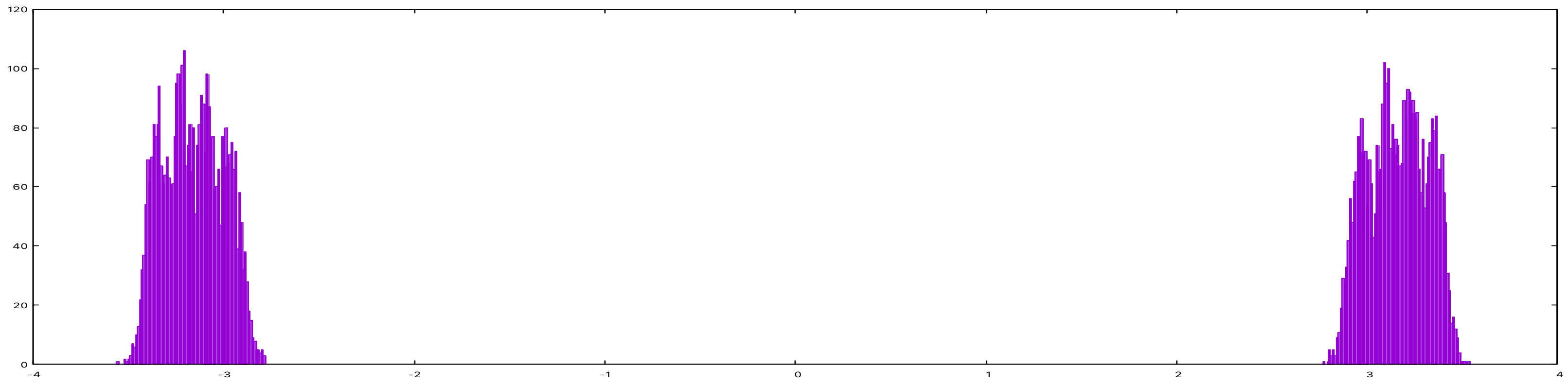
で生成した配位に対して

$$R = \min_U \max_a \left|(UXU^{-1} - C)_a\right|$$

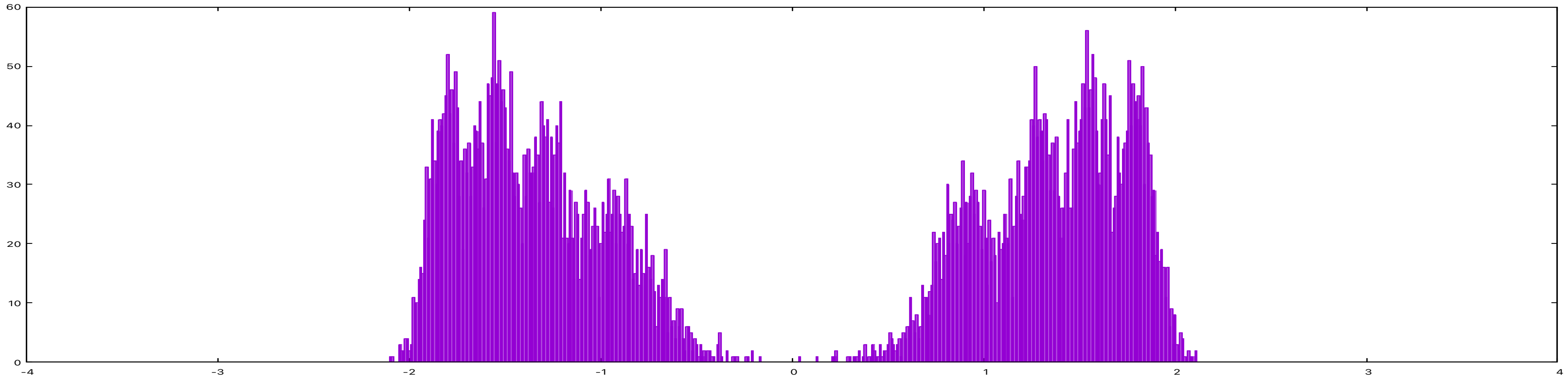
の期待値をRESAで計算する

$$C = \begin{pmatrix} c+\delta c & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -c-\delta c \end{pmatrix}, \qquad c = \sqrt{-m^2}$$

$N=8$で生成した1000配位に対する固有値分布



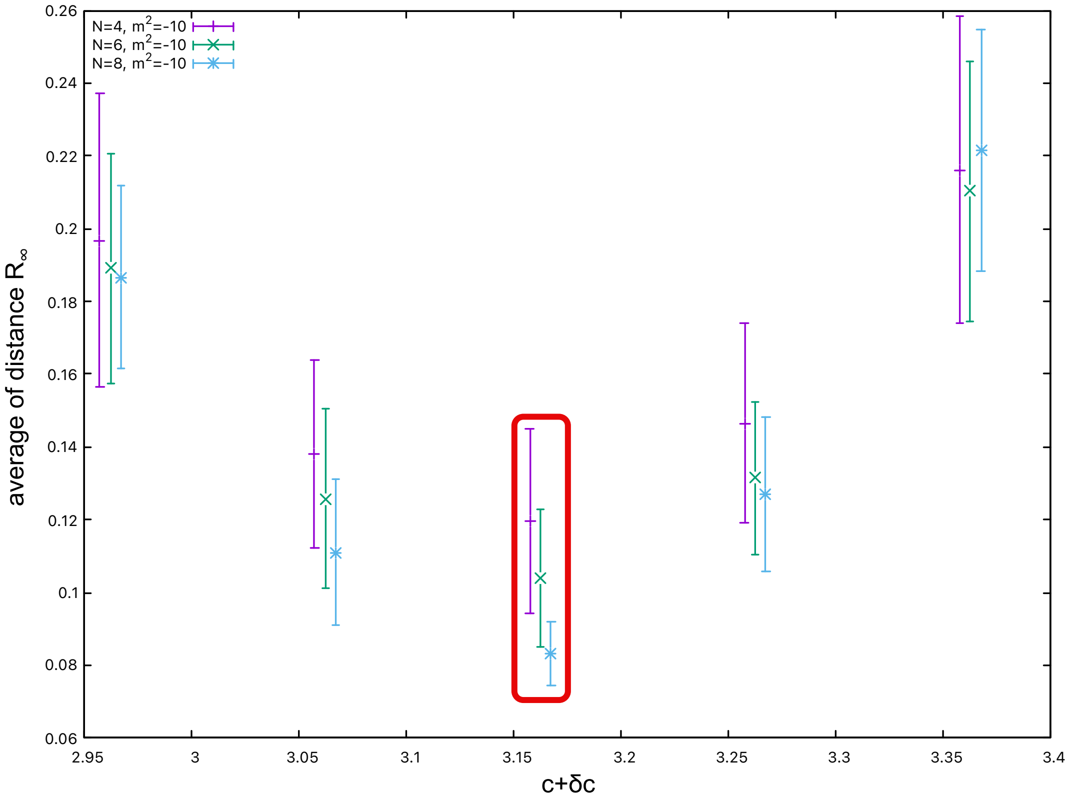
$m^2=-10$



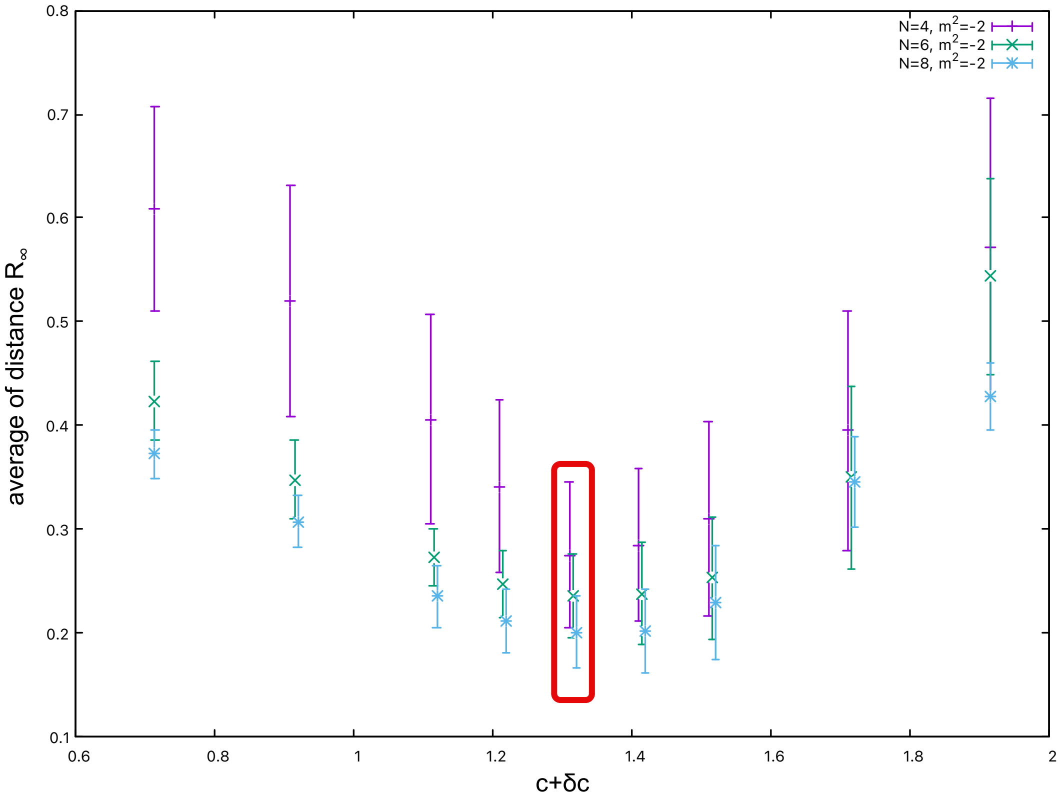
$m^2=-2$

固有値がつながりgeometryが見れない

50配位に対する最小値の平均と標準偏差



$m^2 = -10$

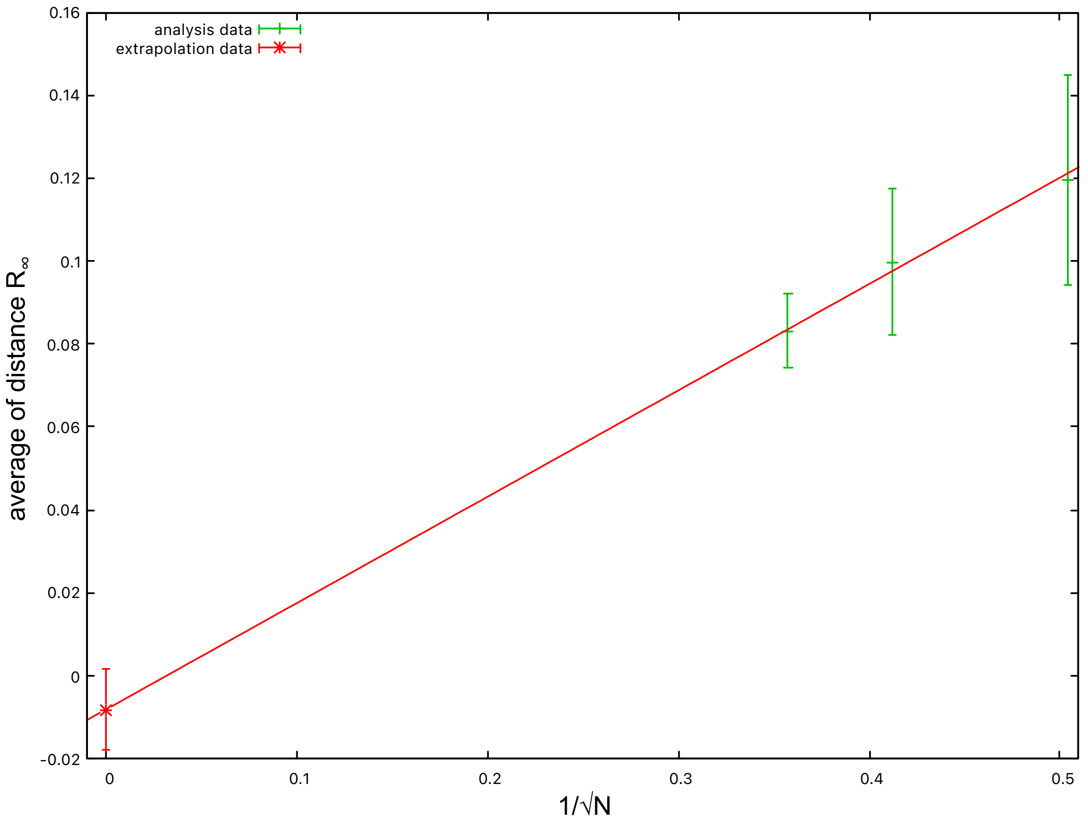


$m^2 = -2$

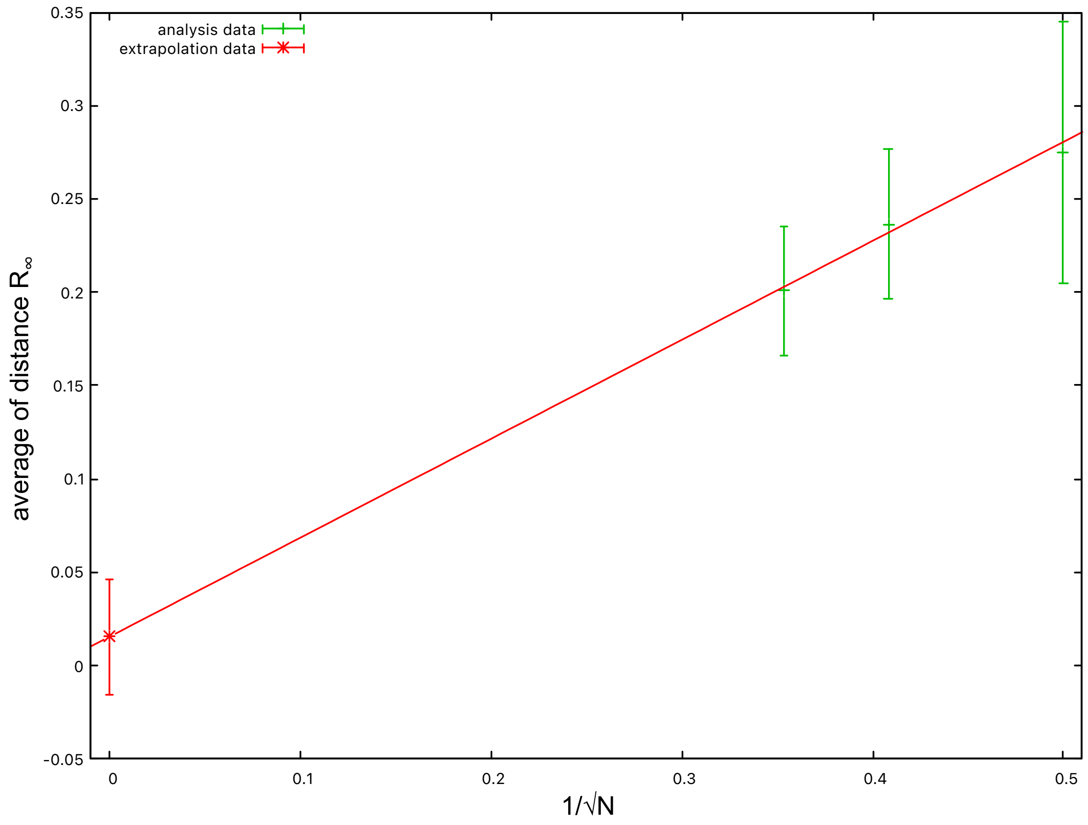
紫 : N=4
緑 : N=6
青 : N=8

この手法では$m^2 = -2$でも最小値を見つけて
geometryがわかる

50配位に対する最小値の外挿



$m^2 = -10$



$m^2 = -2$

$N \to \infty$で完全にgeometryを決められそう

4. summary and discussion

- 強結合でも適応可能な経路積分形式でのgeometryの読み取り手法を提案した
- 極小値が多い最小化問題の効率的なアルゴリズムを提案した
- One matrix modelでこの手法が有用であることを示した
- これからより複雑な行列模型に適用していきたい

Backup slide

50 configでのOne matrix model($m^2 = -10$)

parameter

$N = 4,6$

トラジェクトリー　800

レプリカ　2-30

SAのM　3000

$N = 8$

トラジェクトリー　1500

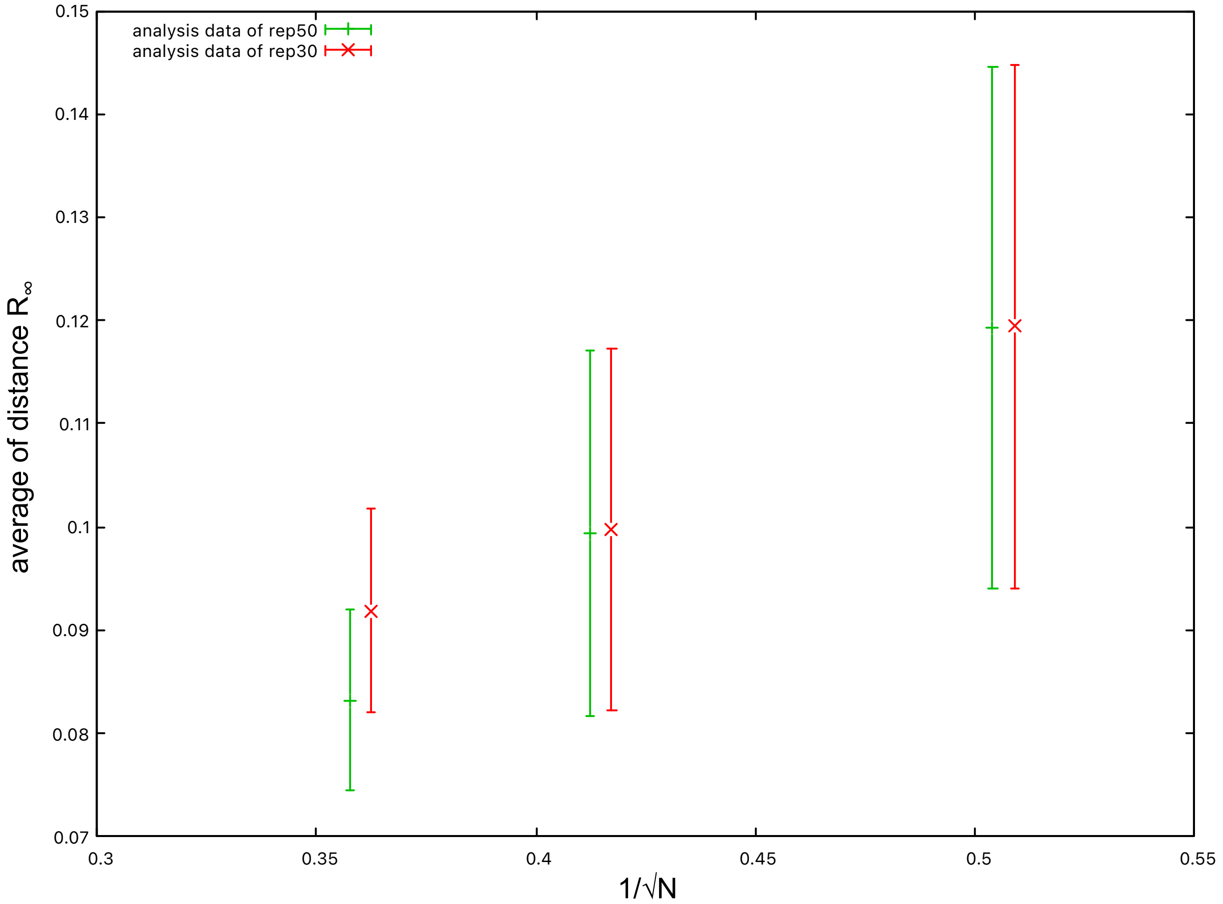
レプリカ　2-50

SAのM　3000

parameter

トラジェクトリー　800
レプリカ　2-30
SAのM　3000

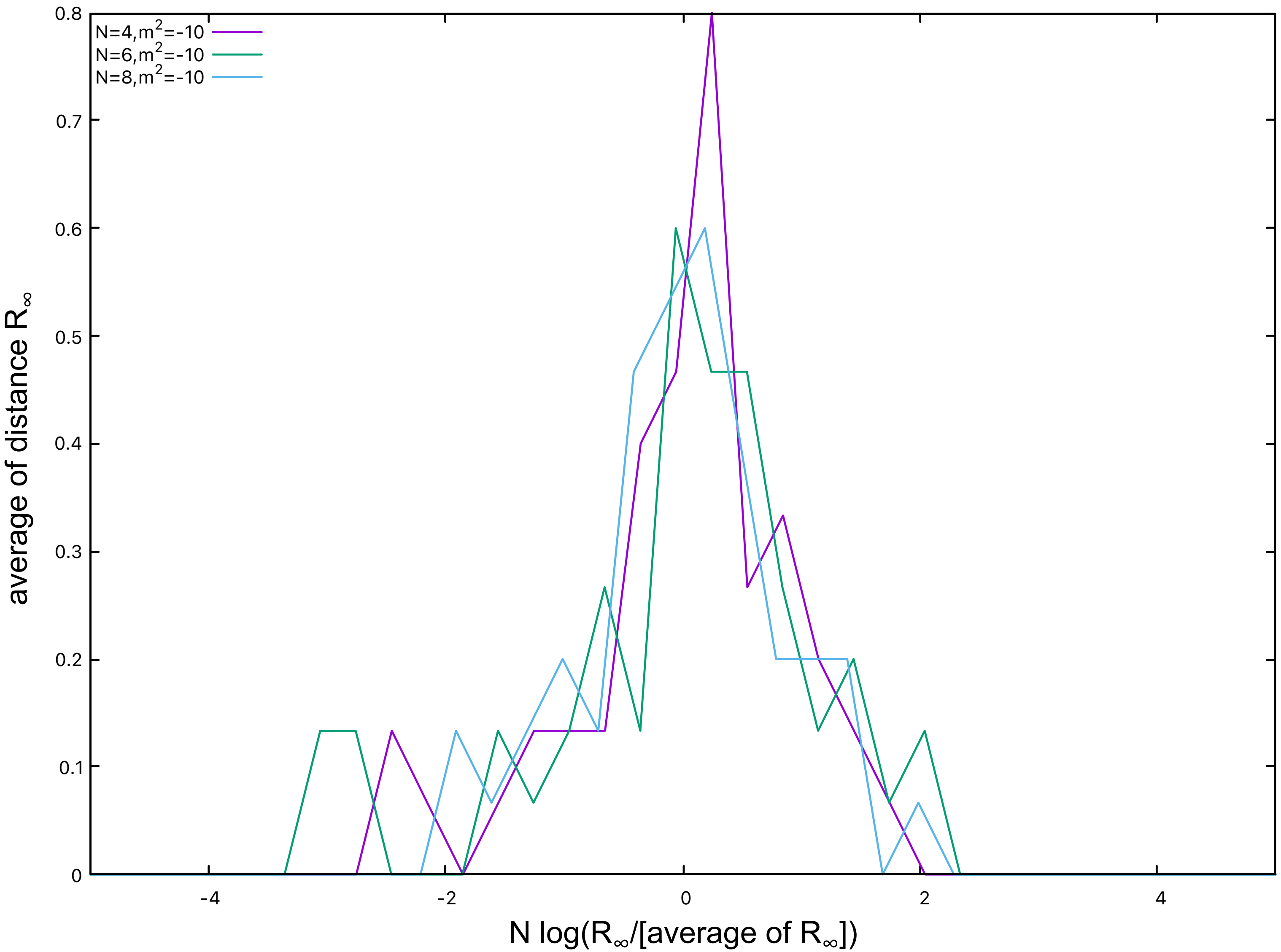
トラジェクトリー　1500
レプリカ　2-50
SAのM　3000



$N=8$以外はレプリカの個数が30で十分

※レプリカの個数70でも解析中

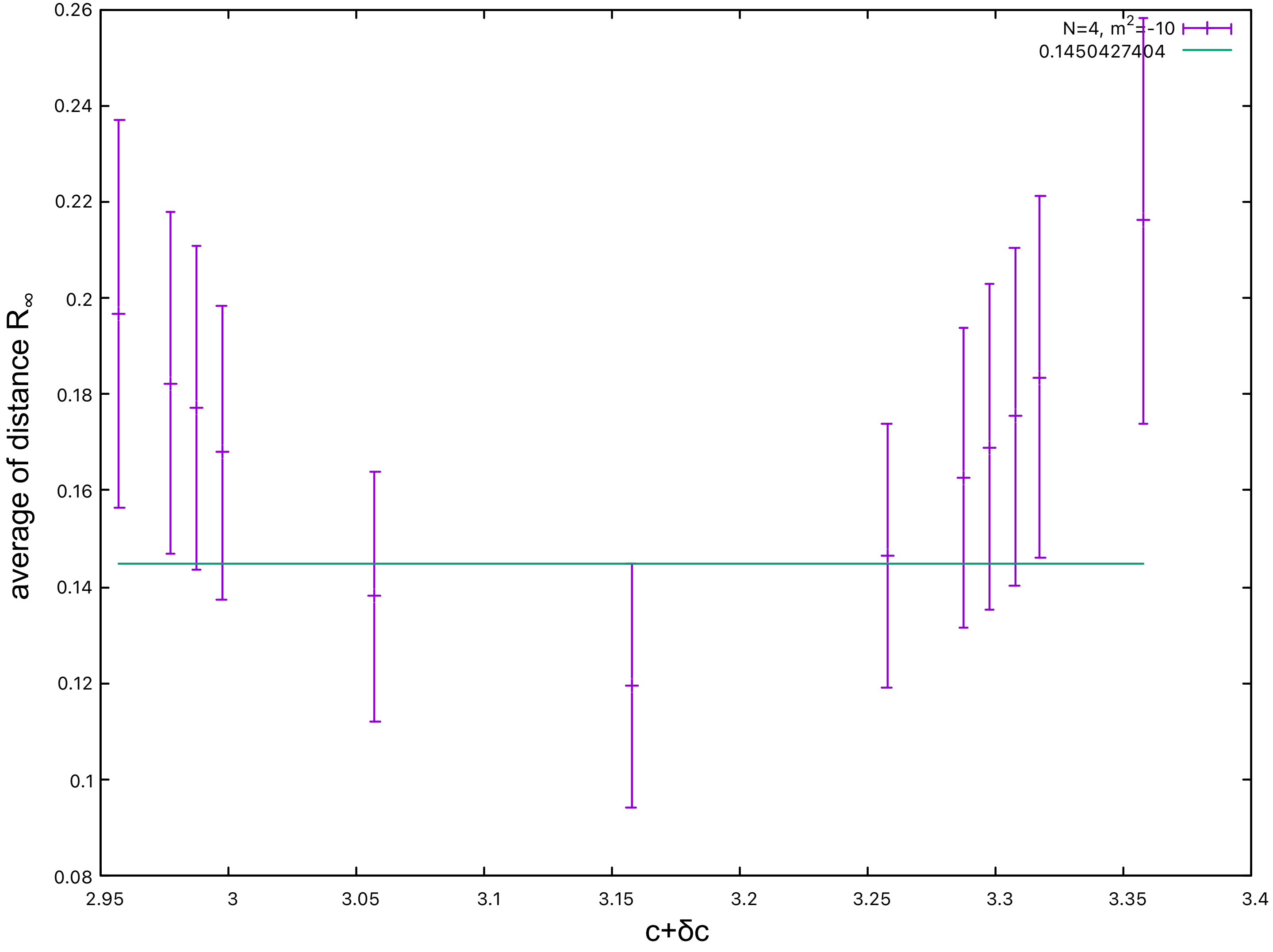
ヒストグラムの結果($m^2 = -10$)



紫 : N=4、
緑 : N=6、
青 : N=8

$N = 4$のδcの幅$(m^2 = -10)$

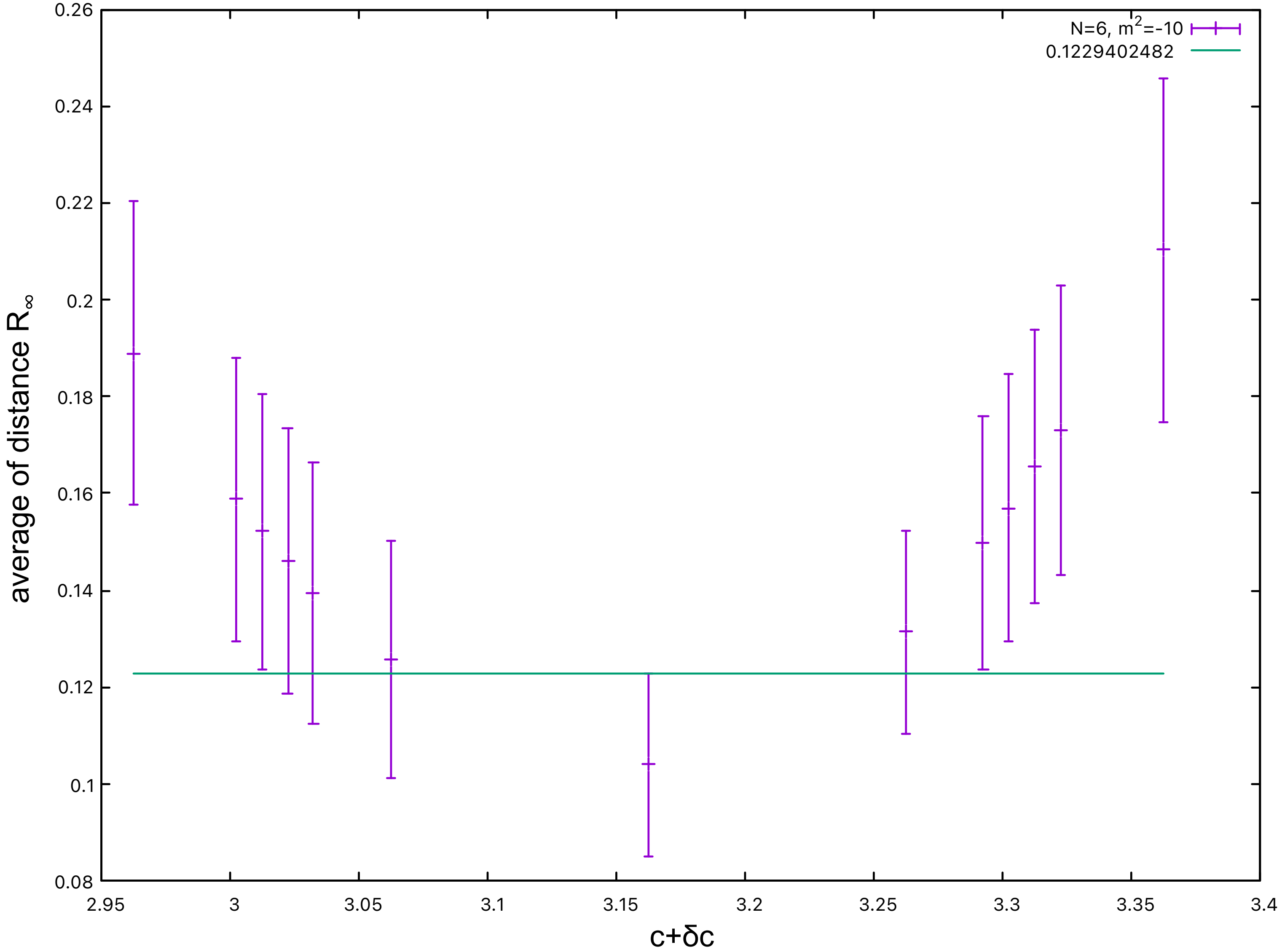
$\Delta_+ \sim -0.17$



$\Delta_+ \sim 0.16$

$N = 6$のδcの幅($m^2 = -10$)

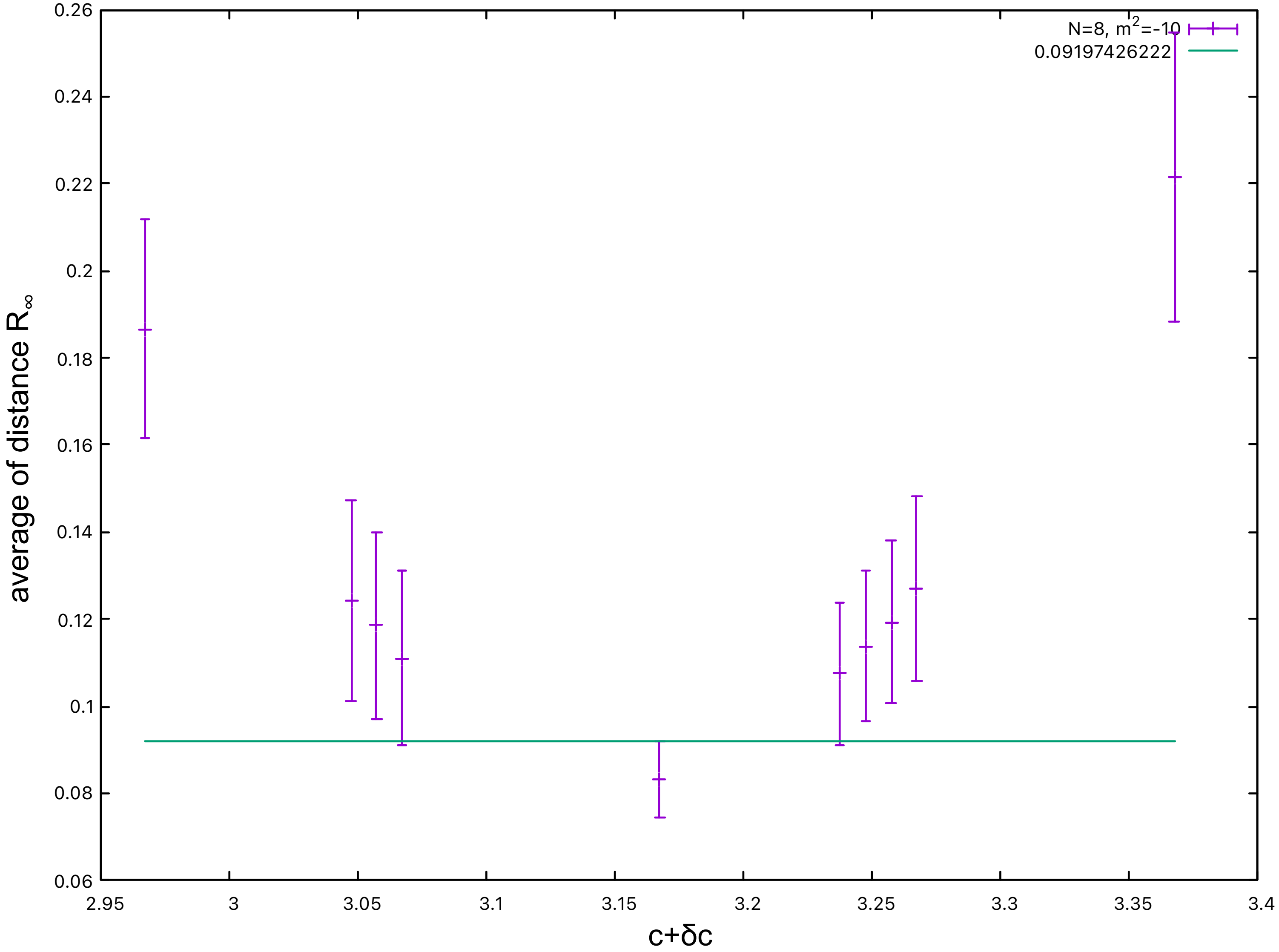
$\Delta_+ \sim -0.15$



$\Delta_+ \sim 0.14$

$N = 8$のδcの幅$(m^2 = -10)$

$\Delta_+ \sim -0.1$



$\Delta_+ \sim 0.07$

$$\Delta = \Delta_{+} - \Delta_{-}$$

$N = 4$ $\quad \Delta \sim 0.33$

1.138(1.2247)

$N = 6$ $\quad \Delta \sim 0.29$

1.706(1.1547)

$N = 8$ $\quad \Delta \sim 0.17$

50 configでのOne matrix model($m^2 = -2$)

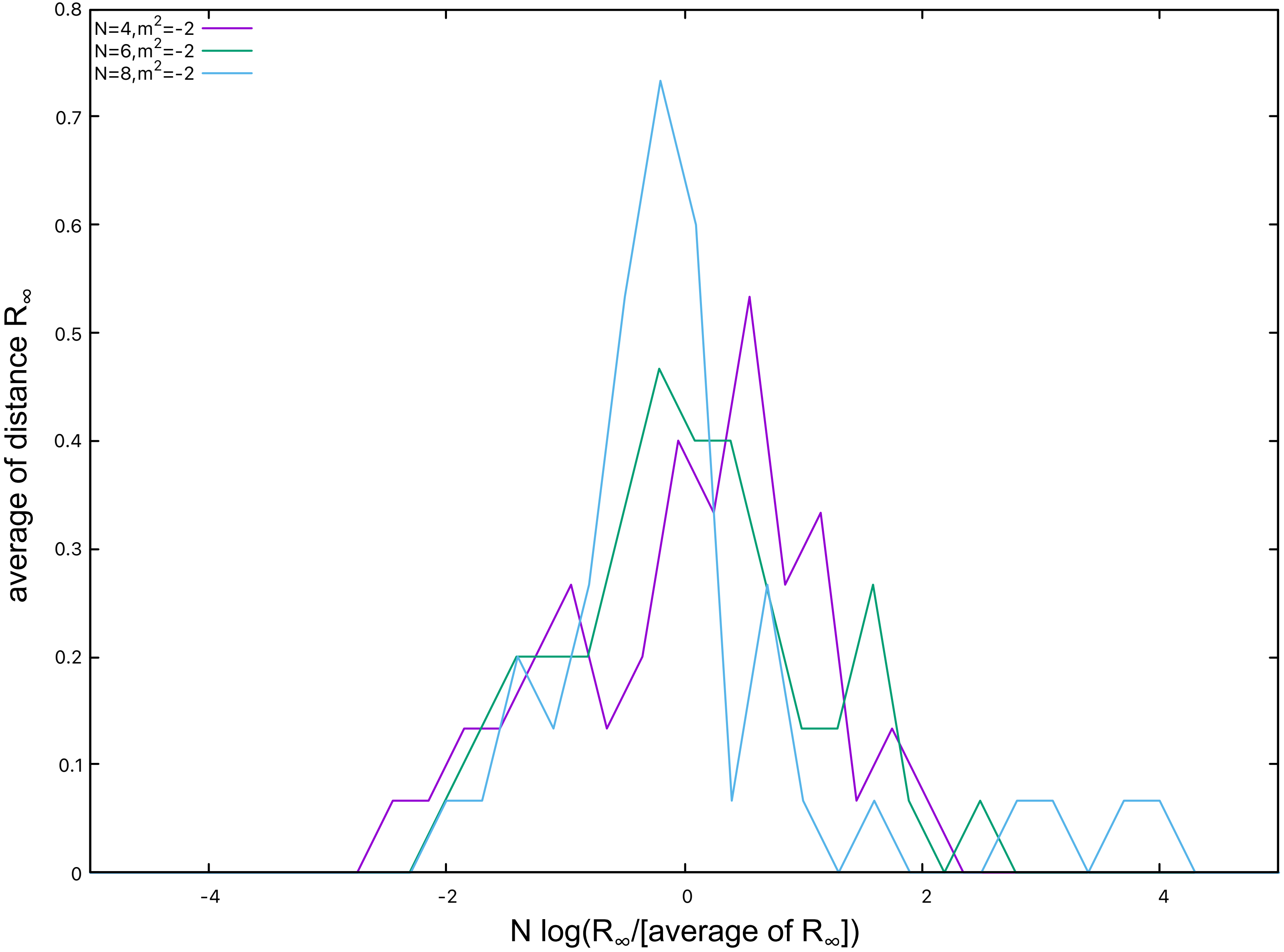
<u>parameter</u>

トラジェクトリー　800

レプリカ　2-30

SAのM　3000

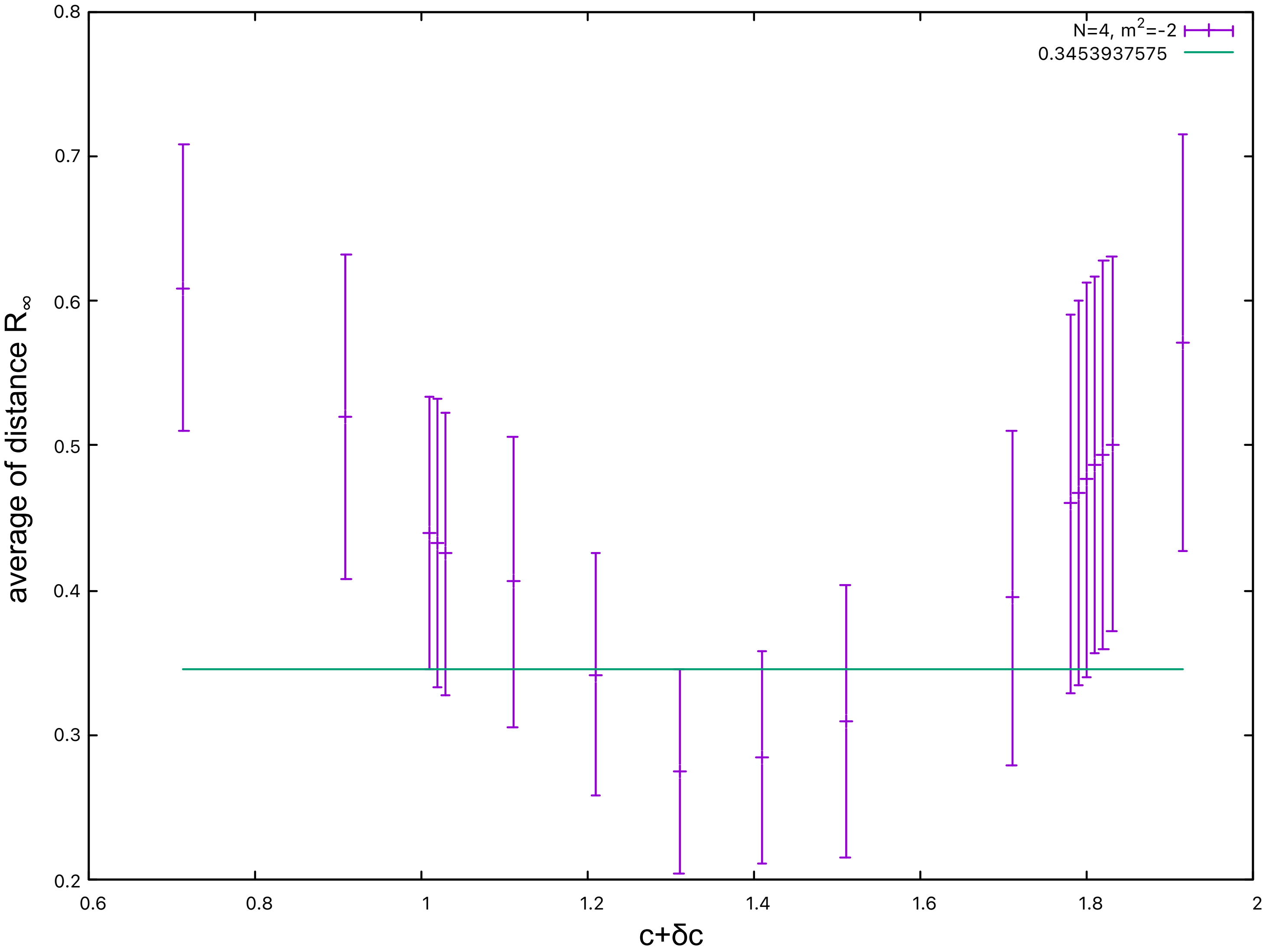
ヒストグラムの結果($m^2 = -2$)



紫 : N=4、
緑 : N=6、
青 : N=8

$N = 4$のδcの幅$(m^2 = -2)$

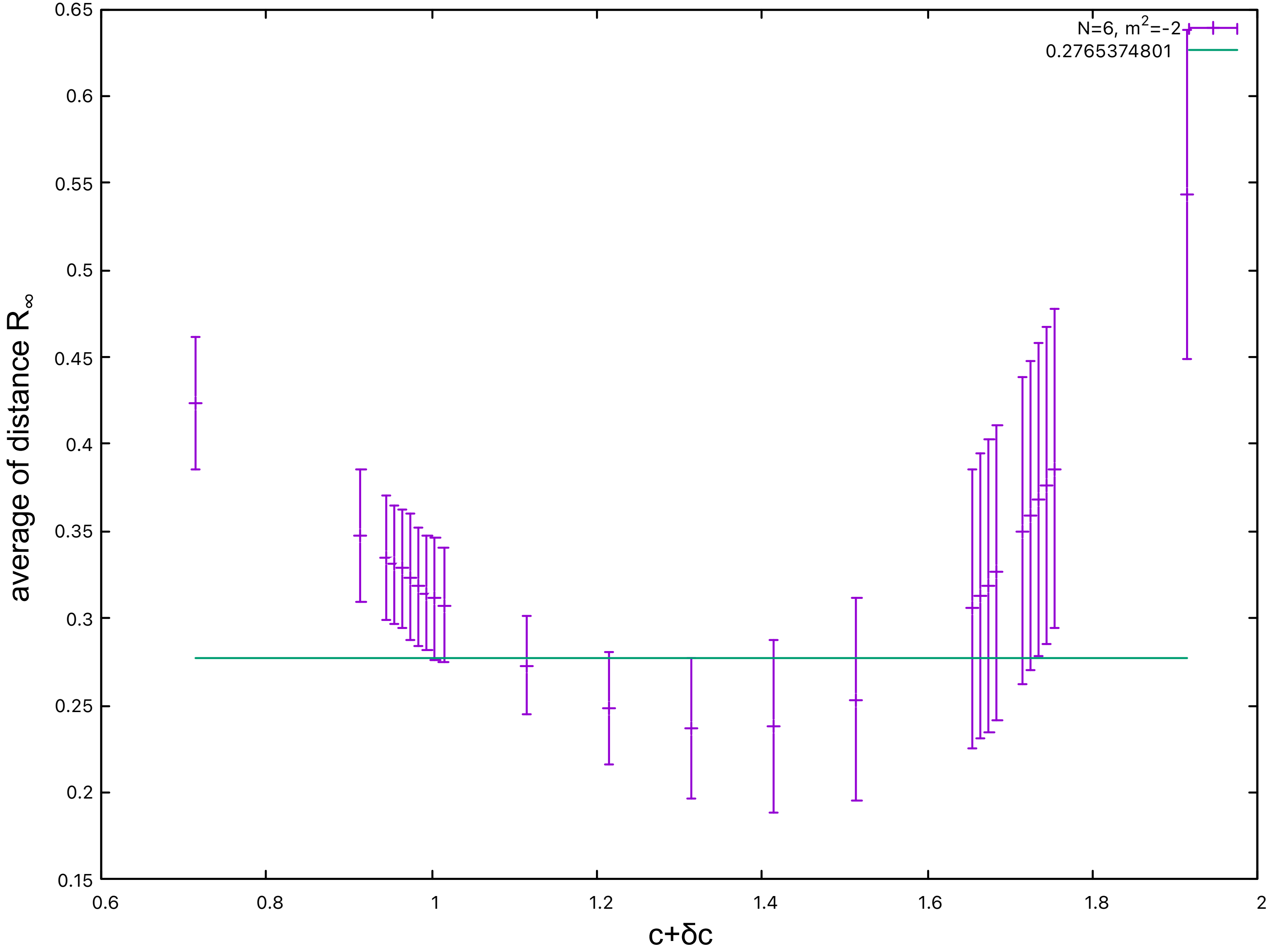
$\Delta_+ \sim -0.30$



$\Delta_+ \sim 0.505$

$N=6$のδcの幅$(m^2=-2)$

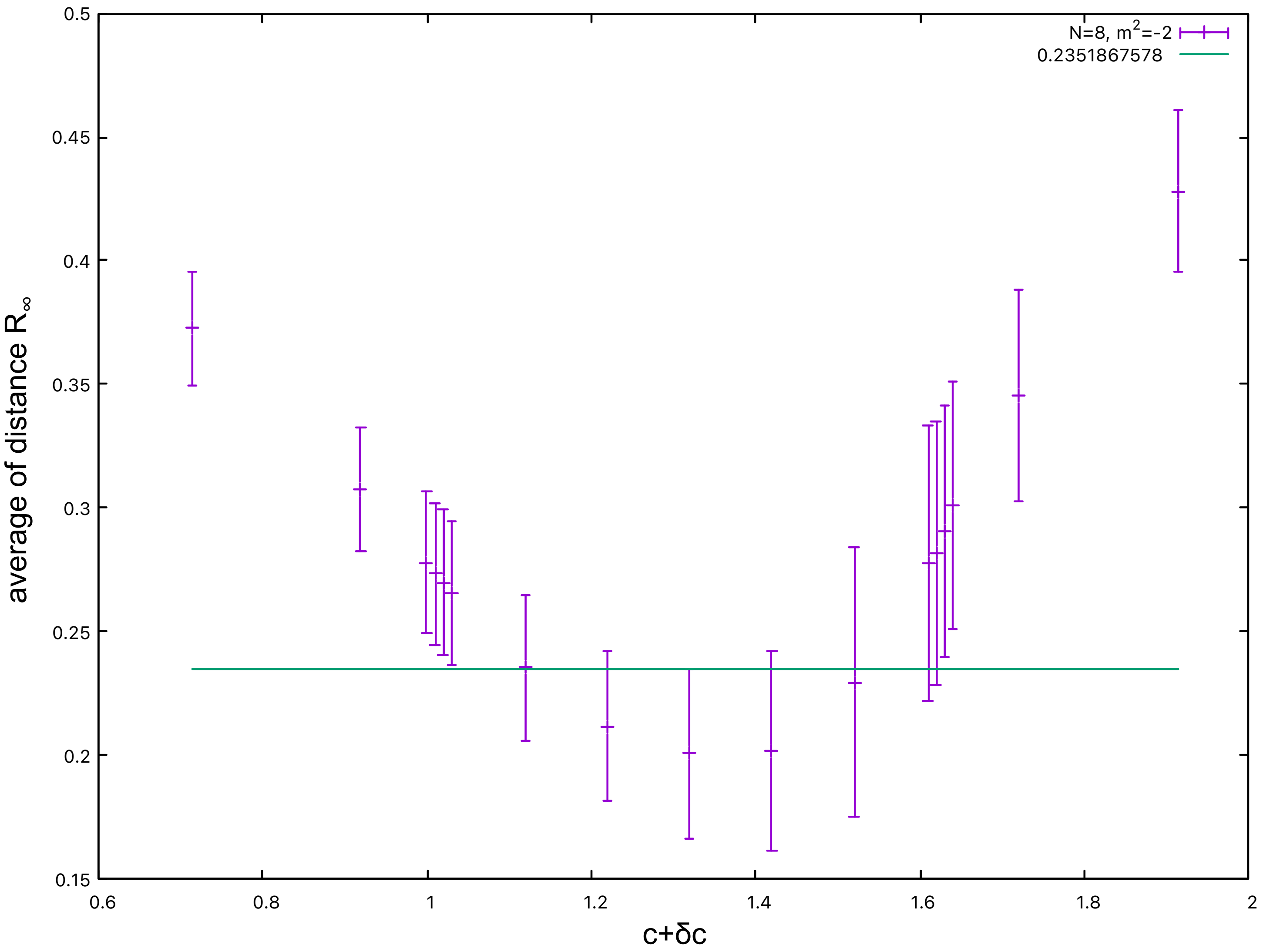
$\Delta_+ \sim -0.31$



$\Delta_+ \sim 0.42$

$N=8$のδcの幅$(m^2=-2)$

$\Delta_+ \sim -0.29$



$\Delta_+ \sim 0.31$

$$\Delta = \Delta_+ - \Delta_-$$

$N = 4$ $\Delta \sim 0.805$

1.1027(1.2247)

$N = 6$ $\Delta \sim 0.73$

1.2167(1.1547)

$N = 8$ $\Delta \sim 0.60$