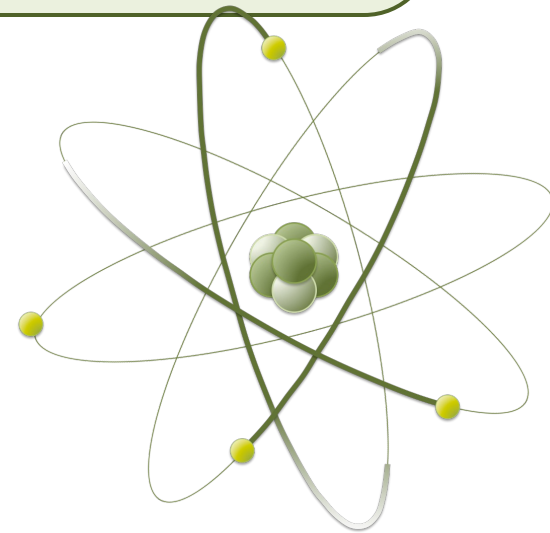


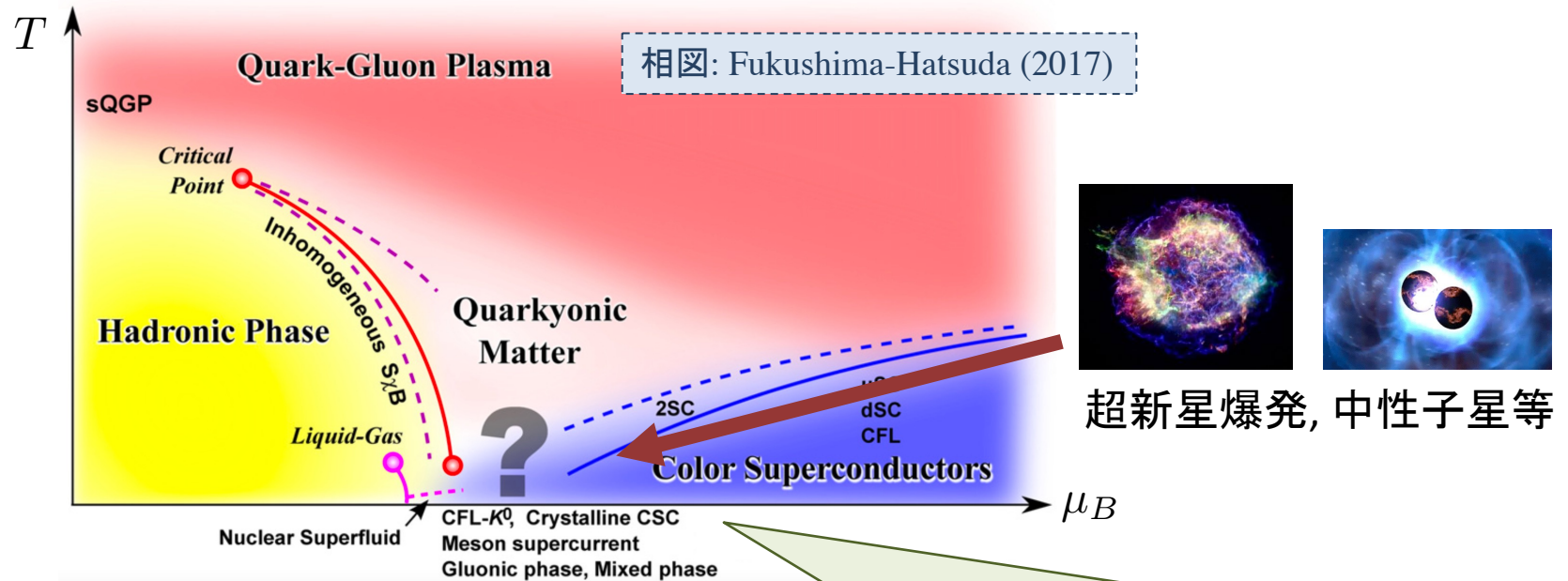
有限密度2カラーQCDにおける
線形シグマ模型の構築とその応用

末永 大輝 (理研 仁科センター)



• 有限密度系QCD

- 有限密度系のQCDの理解は、学術的にも天体物理的にも重要



クォーク非閉じ込め? カイラル対称性の回復? カラー超伝導相? etc.

- 問題点: 有限密度系QCDの理解は、有限温度系に比べて進んでいない (要因の一つ: **符号問題**により格子QCD計算が容易でない)

• 有限密度系の格子QCD?

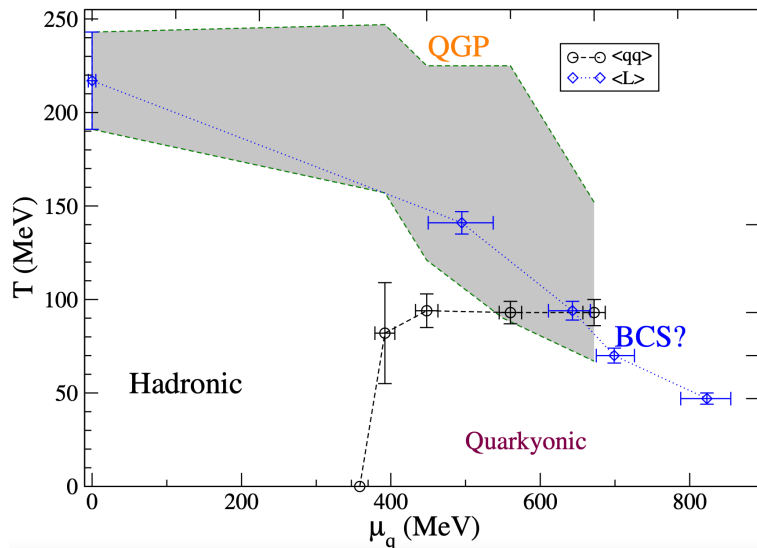
- 2カラー (かつ偶数フレーバー) のQCDは符号問題を持たない

→ 有限密度系での格子QCD計算が可能!

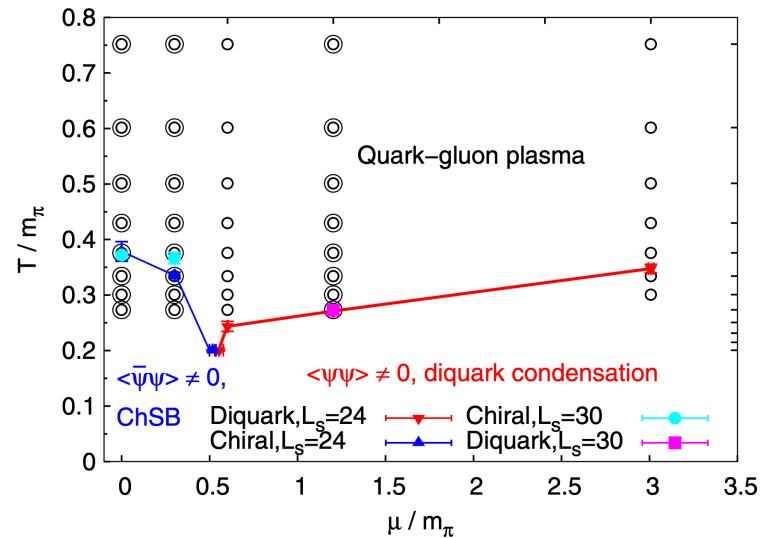
eg, G Aarts (2016) J. Phys.: Conf. Ser. 706 022004



- 2カラーQCD相図のシミュレーション結果は、例えば



Boz-Cotter-Fister-Mehta-Skullerud (2013)



Buividovich-Smith-Smekal (2020)

...

• 有限密度系の格子QCD?

- 2カラー (かつ偶数フレーバー) のQCDは符号問題を持たない

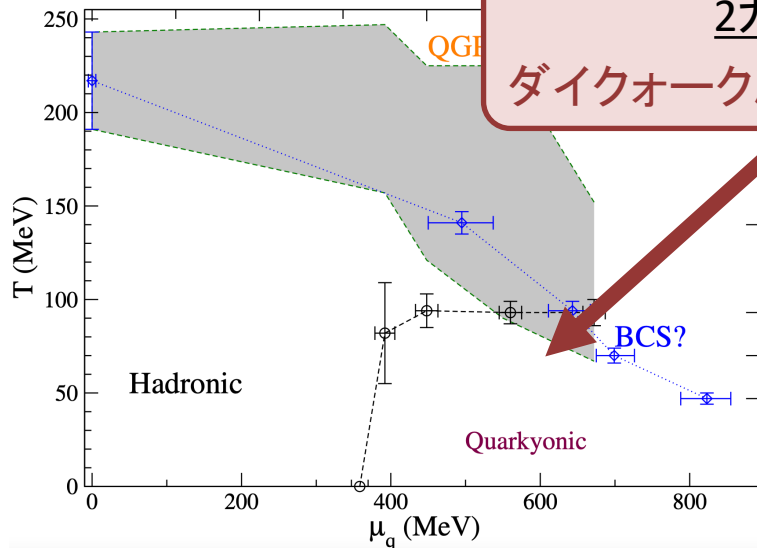
→ 有限密度系での格子QCD計算が可能!

eg, G Aarts (2016) J. Phys.: Conf. Ser. 706 022004

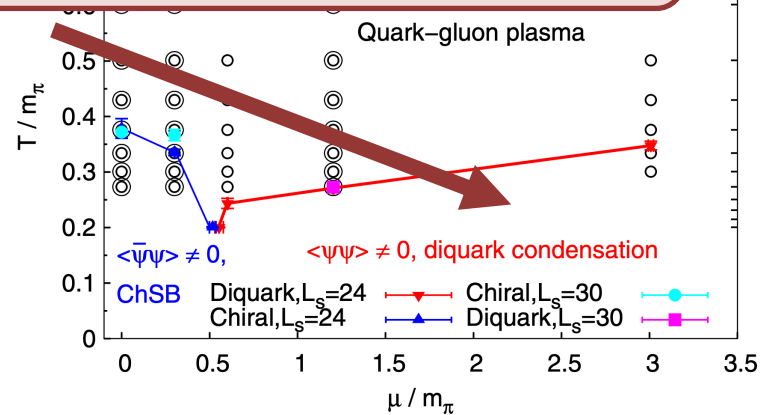
- 2カラーQCD相図のシミュレーション結果は、例えば

2カラーQCDの特徴

ダイクォーク凝縮相 (バリオン超流動相) $\langle qq \rangle \neq 0$



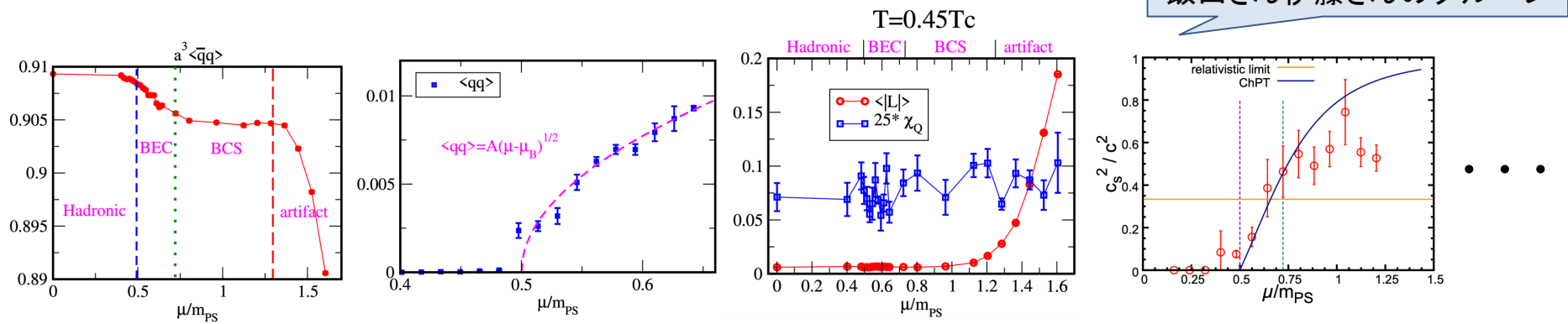
Boz-Cotter-Fister-Mehta-Skullerud (2013)



Buividovich-Smith-Smekal (2020)

• 有限密度系2カラーQCD研究

- 相図に加え、ハドロン質量・輸送係数・グルーオン二点関数・ $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, $\langle\psi\psi\rangle$, $\langle L\rangle$ 等の密度依存性のシミュレーション結果もいくつかある



自身の研究アプローチ

- 2カラー格子QCD計算を有益な有限密度系QCDの数値実験とみなし
その結果に対して有効モデルによる理解を与える

有効モデルによる2カラー物質中のこれまでの研究

グルーオン二点関数: Suenaga-Kojo(2019), Kojo-Suenaga(2021), CSE効果: Suenaga-Kojo(2021),
音速のピーク: Kojo-Suenaga(2022), ハドロン質量: Suenaga-Murakami-Itou-Iida (2023)
トポジカル感受率: Kawaguchi-Suenaga(2023)

2. 有効模型

• Pauli-Gursey SU(4) 対称性

- 2カラーのQCDラグランジアンは、 $SU(2)_c$ の擬実性より以下に書き換えられる

$$\mathcal{L}_{\text{QC}_2\text{D}} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - g_s \bar{\psi} \not{A}^a T_c^a \psi = \Psi^\dagger i \partial_\mu \sigma^\mu \Psi - g_s \Psi^\dagger A_\mu^a T_c^a \sigma^\mu \Psi$$

- 2フレーバーの場合 $\Psi = (\psi_R, \tilde{\psi}_L)^T = (u_R, d_R, \tilde{u}_L, \tilde{d}_L)^T$ with $\tilde{\psi}_L = \sigma^2 \tau_c^2 \psi_L^*$

- 4元パウリ行列 $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$

- $\mathcal{L}_{\text{QC}_2\text{D}}$ は、 $\Psi \rightarrow g\Psi$ ($g \in SU(4)$) 変換の下で不変



- 2カラーQCDでは、“カイラル対称性は” $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 対称性からSU(4)対称性に格上げされる

Pauli-Gursey SU(4) 対称性

Pauli (1957), Gursey (1958)

2. 有効模型

• スピン0のハドロン場

- カラー1重項・スピン1重項のクォーク双一次場を以下で定義する

$$\Sigma_{ij} \sim \Psi_j^T \sigma^2 \tau_c^2 \Psi_i \quad \text{with } \Psi = (\psi_R, \tilde{\psi}_L)^T = (u_R, d_R, \tilde{u}_L, \tilde{d}_L)^T$$

- ハドロン状態は以下で与える

$$B \sim -\frac{i}{\sqrt{2}} \psi^T C \gamma_5 \tau_c^2 \tau_f^2 \psi \quad B' \sim -\frac{1}{\sqrt{2}} \psi^T C \tau_c^2 \tau_f^2 \psi \quad \sigma \sim \bar{\psi} \psi$$

$$a_0^a \sim \bar{\psi} \tau_f^a \psi \quad \eta \sim \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \quad \pi^a \sim \bar{\psi} i \gamma_5 \tau_f^a \psi$$

Hadron	J^P	Quark number	Isospin
σ	0^+	0	0
a_0	0^+	0	1
η	0^-	0	0
π	0^-	0	1
B (\bar{B})	0^+	+2(-2)	0
B' (\bar{B}')	0^-	+2(-2)	0

- 4×4 行列 Σ は
右のように表現される

$$\Sigma \rightarrow g \Sigma g^T \quad (g \in SU(4))$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{B'-iB}{2\sqrt{2}} & \frac{\sigma-i\eta+a_0^0-i\pi^0}{4} & \frac{a_0^+-i\pi^+}{2\sqrt{2}} \\ \frac{B'-iB}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{a_0^- - i\pi^-}{2\sqrt{2}} & \frac{\sigma-i\eta-a_0^0+i\pi^0}{4} \\ -\frac{\sigma-i\eta+a_0^0-i\pi^0}{4} & -\frac{a_0^- - i\pi^-}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\bar{B}'-i\bar{B}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{a_0^+-i\pi^+}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sigma-i\eta-a_0^0+i\pi^0}{4} & \frac{\bar{B}'-i\bar{B}}{2\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

cf, 3カラー・2フレーバーQCDでは $\Sigma = \sigma + i\pi^a \tau^a$

2. 有効模型

• 線形シグマ模型

- 近似的に $SU(4)$ 不変な線形シグマ模型ラグランジアンは以下で与えられる

$$\mathcal{L} = \text{tr}[D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma] - m_0^2 \text{tr}[\Sigma^\dagger \Sigma] - \lambda_1 (\text{tr}[\Sigma^\dagger \Sigma])^2 - \lambda_2 \text{tr}[(\Sigma^\dagger \Sigma)^2] + \underbrace{\text{tr}[H^\dagger \Sigma + \Sigma^\dagger H]}_{\text{あらわな破れ}} + \underbrace{c(\det \Sigma + \det \Sigma^\dagger)}_{U(1)_A \text{アノマリー}}$$

$$\begin{cases} D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - i\mu_q \delta_{\mu 0} \{J, \Sigma\} \text{ with } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{クォーク化学ポテンシャルの導入} \\ H = h_q E \text{ with } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{カレントクォーク質量の効果} \end{cases}$$

$$\text{cf, } \bar{\psi} \psi = \frac{1}{2} (\Psi^T \sigma^2 \tau_c^2 E^T \Psi + \Psi^\dagger \sigma^2 \tau_c^2 E \Psi^*) \Rightarrow \text{カイラル対称性の破れ方: } SU(4) \rightarrow Sp(4) \quad (h^T E h = E)$$

- 線形シグマ模型の有用性

→ パリティパートナー間の質量関係の理解が可能

→ カイラル対称性が回復に近づく世界の議論が可能

パートナー

$$B(\bar{B}) \leftrightarrow B'(\bar{B}')$$

$$\eta, \pi \leftrightarrow \sigma, a_0$$

3. 結果

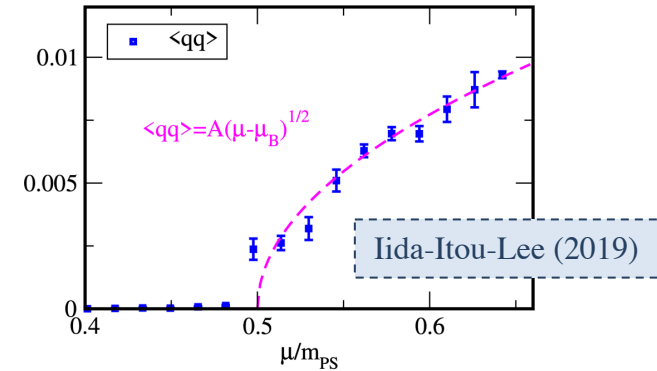
• 平均場

- $\sigma \rightarrow \sigma_0 + \sigma$, $B(\bar{B}) \rightarrow \frac{\Delta}{\sqrt{2}} + B(\bar{B})$ として、 σ_0 と Δ のギャップ方程式を解く

$\sigma_0 \sim \langle \bar{\psi}\psi \rangle$: カイラル凝縮

$\Delta \sim -\frac{i}{2} \langle \psi^T C \gamma_5 \tau_c^2 \tau_f^2 \psi \rangle + \text{h.c.}$: ダイクオーク凝縮

ダイクオーク凝縮 by lattice



- σ_0 と Δ とクォーク密度 ρ の μ_q 依存性

例えばインプットを以下に取る

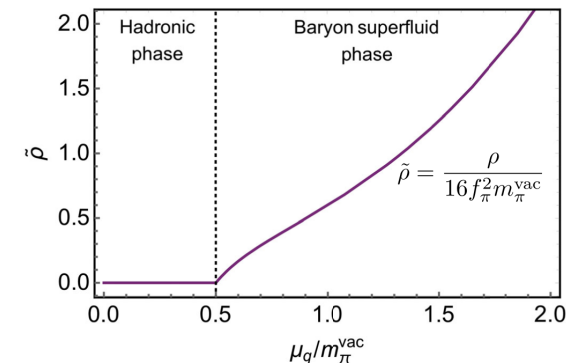
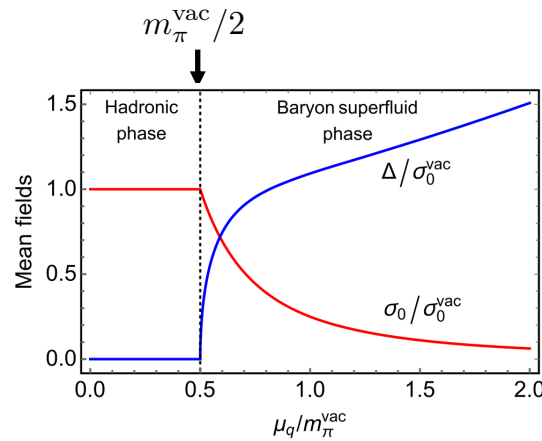
$$\sigma_0^{\text{vac}} = 250 \text{ MeV}$$

$$\lambda_1 = c = 0 \text{ (large } N_c)$$

$$m_\pi^{\text{vac}} = 738 \text{ MeV}$$

$$m_{a_0}^{\text{vac}} / m_\pi^{\text{vac}} = 2.18$$

lattice
Murakami et al



cf, 非線形表現 by Kogut et al (2000)

• ハドロン質量の結果

- 右の三通りのパラメーターで結果を示す

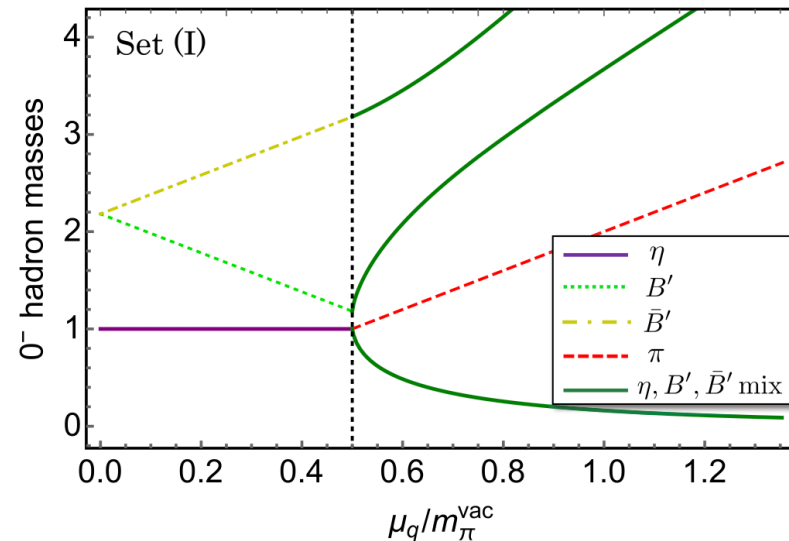
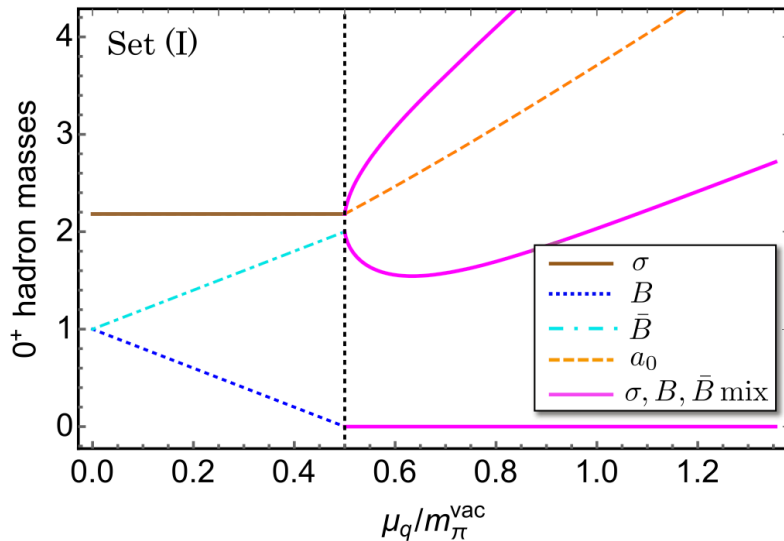
	c	λ_1	λ_2	m_0^2	h_q
large $N_c \rightarrow$ Set (I)	0	0	65.6	$-(693 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
Set (II)	0	-7	65.6	$-(206 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
w/ anomaly \rightarrow Set (III)	15	0	58.1	$-(495 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$

• ハドロン質量の結果

– 右の三通りのパラメーターで結果を示す

	c	λ_1	λ_2	m_0^2	h_q	
large N_c →	Set (I)	0	0	65.6	$-(693 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
	Set (II)	0	-7	65.6	$-(206 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
w/ anomaly →	Set (III)	15	0	58.1	$-(495 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$

Set (I) の結果



– 超流動相ではバリオン数が破れる

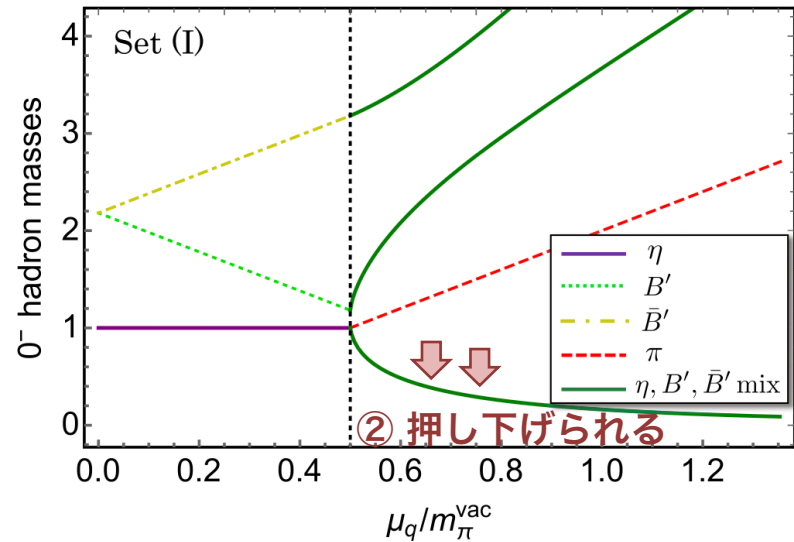
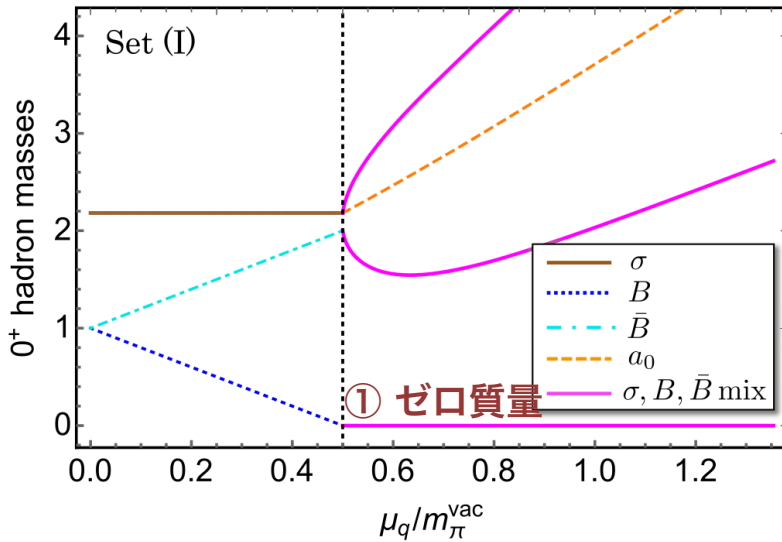
$$\left[\begin{array}{l} \sigma \leftrightarrow B \leftrightarrow \bar{B} \text{ mixing } (0^+ \text{系}) \\ \eta \leftrightarrow B' \leftrightarrow \bar{B}' \text{ mixing } (0^- \text{系}) \end{array} \right.$$

・ハドロン質量の結果

– 右の三通りのパラメーターで結果を示す

	c	λ_1	λ_2	m_0^2	h_q	
large $N_c \rightarrow$	Set (I)	0	0	65.6	$-(693 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
	Set (II)	0	-7	65.6	$-(206 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
w/ anomaly \rightarrow	Set (III)	15	0	58.1	$-(495 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$

Set (I) の結果



– 超流動相ではバリオン数が破れる

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \leftrightarrow B \leftrightarrow \bar{B} \text{ mixing } (0^+ \text{系}) \\ \eta \leftrightarrow B' \leftrightarrow \bar{B}' \text{ mixing } (0^- \text{系}) \end{array} \right.$$

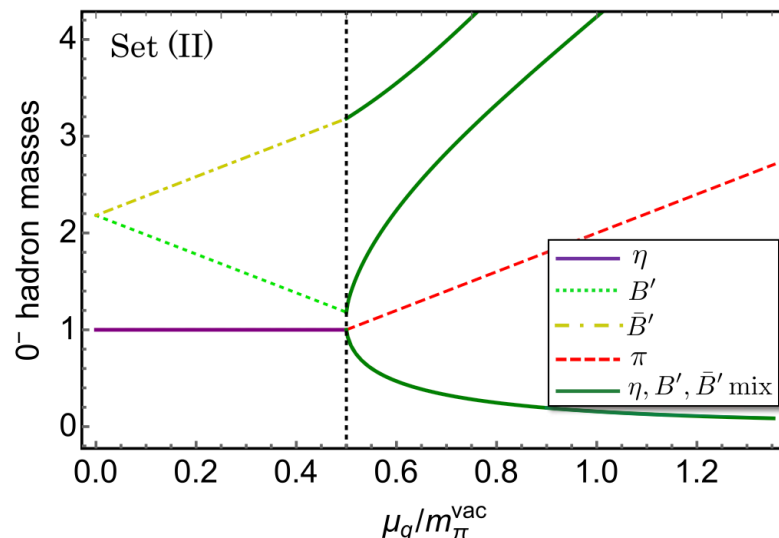
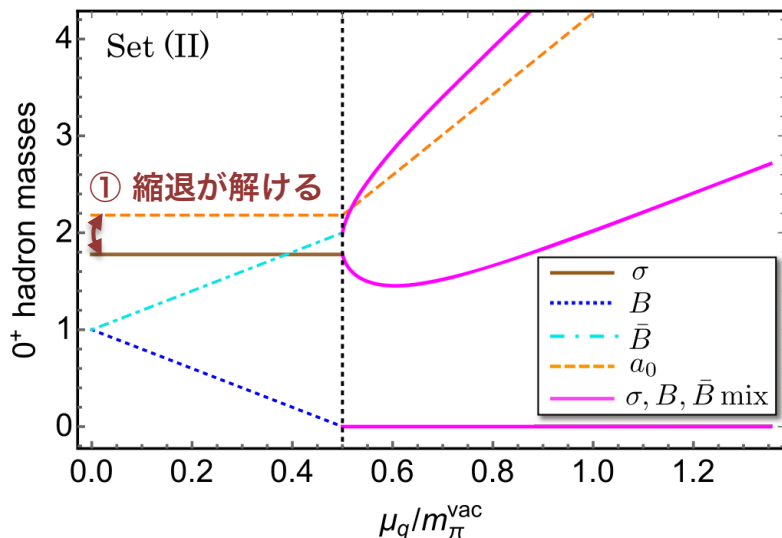
- ① ゼロ質量粒子 ($U(1)_B$ 破れのNGモード)
- ② η 質量が押し下げられる (準位反発)

• ハドロン質量の結果

– 右の三通りのパラメーターで結果を示す

	c	λ_1	λ_2	m_0^2	h_q
large $N_c \rightarrow$ Set (I)	0	0	65.6	$-(693 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
Set (II)	0	-7	65.6	$-(206 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
w/ anomaly \rightarrow Set (III)	15	0	58.1	$-(495 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$

Set (II) の結果



– 超流動相ではバリオン数が破れる

$$\begin{cases} \sigma \leftrightarrow B \leftrightarrow \bar{B} \text{ mixing } (0^+ \text{系}) \\ \eta \leftrightarrow B' \leftrightarrow \bar{B}' \text{ mixing } (0^- \text{系}) \end{cases}$$

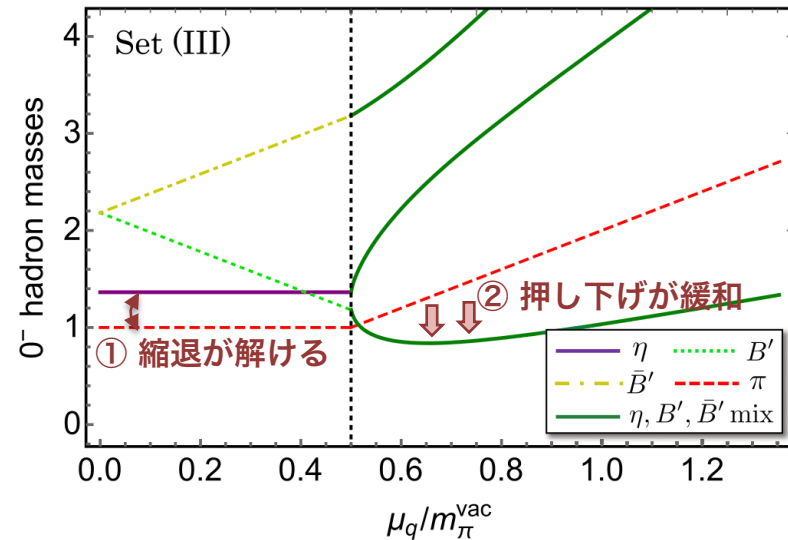
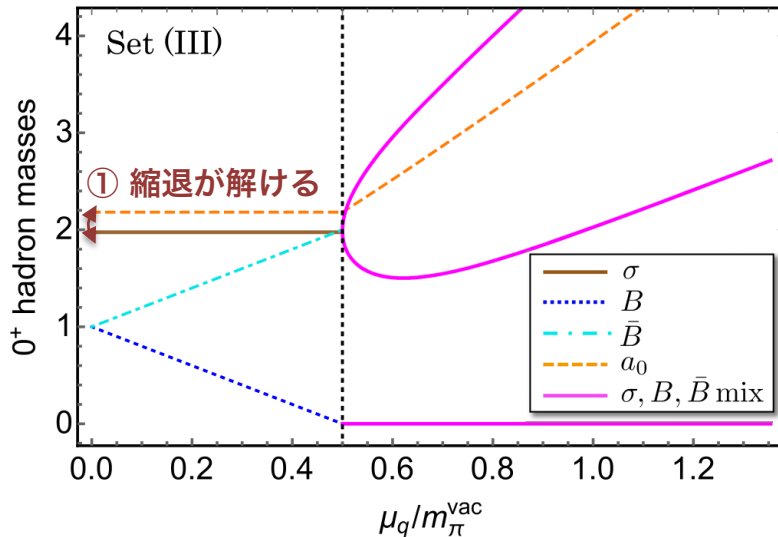
① λ_1 項により σ, a_0 の縮退が解ける

・ハドロン質量の結果

– 右の三通りのパラメーターで結果を示す

	c	λ_1	λ_2	m_0^2	h_q	
large $N_c \rightarrow$	Set (I)	0	0	65.6	$-(693 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
	Set (II)	0	-7	65.6	$-(206 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$
w/ anomaly \rightarrow	Set (III)	15	0	58.1	$-(495 \text{ MeV})^2$	$(364 \text{ MeV})^3$

Set (III) の結果



– 超流動相ではバリオン数が破れる

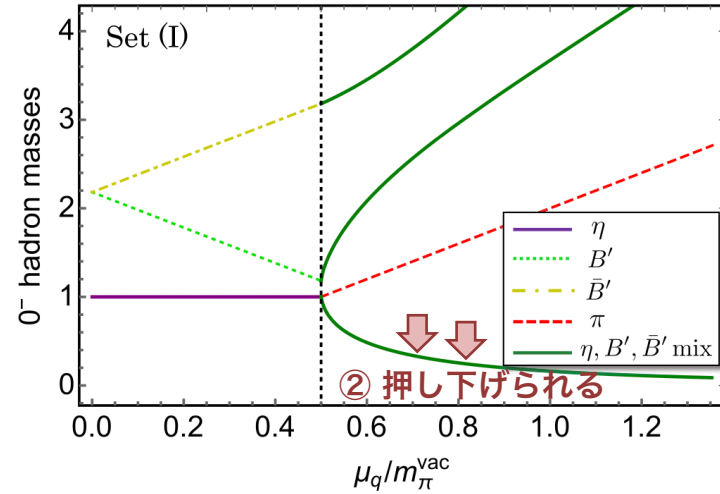
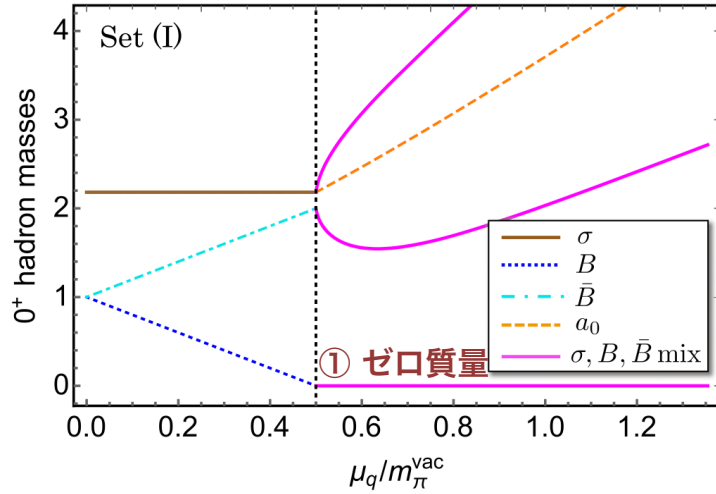
$$\left[\begin{array}{l} \sigma \leftrightarrow B \leftrightarrow \bar{B} \text{ mixing } (0^+ \text{系}) \\ \eta \leftrightarrow B' \leftrightarrow \bar{B}' \text{ mixing } (0^- \text{系}) \end{array} \right.$$

① アノマリーにより σ, a_0 や π, η の縮退が解ける

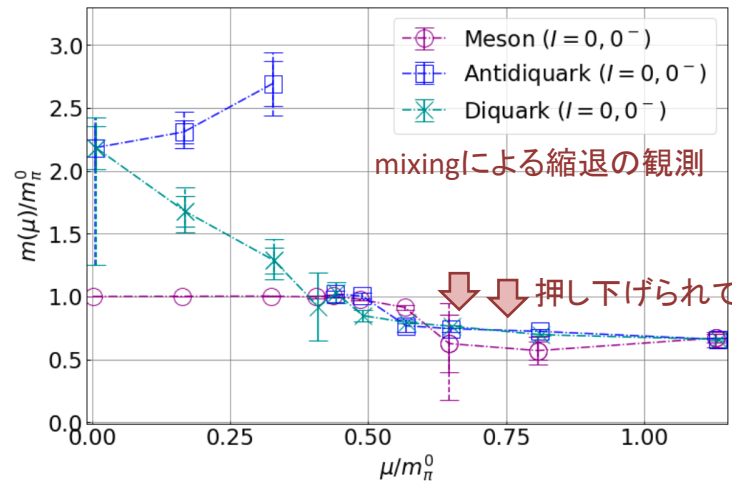
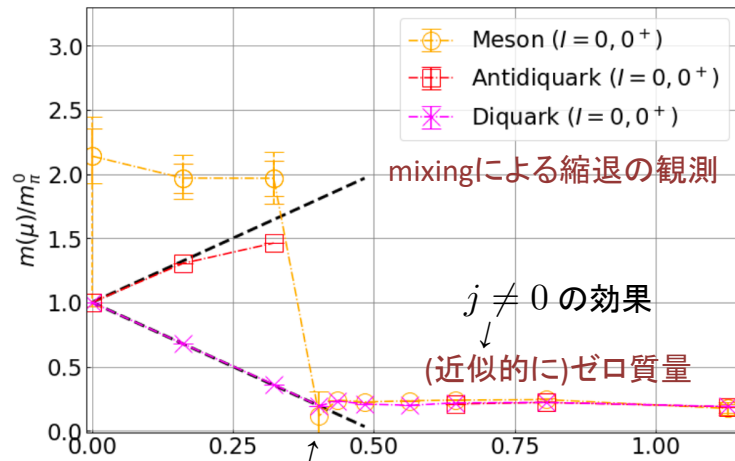
② アノマリーにより「押し下げ」が緩和される

• 格子QCDとの比較 -Set (I) での比較-

有効模型



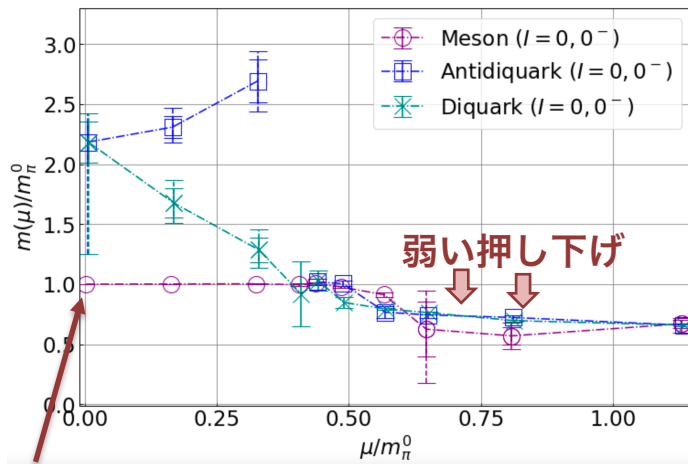
格子QCD (Murakami et al)



$j \neq 0$ により相転移点が少し早い μ/m_π^0

・ 格子QCDとの比較 -アノマリーに着目-

格子QCD (Murakami et al)

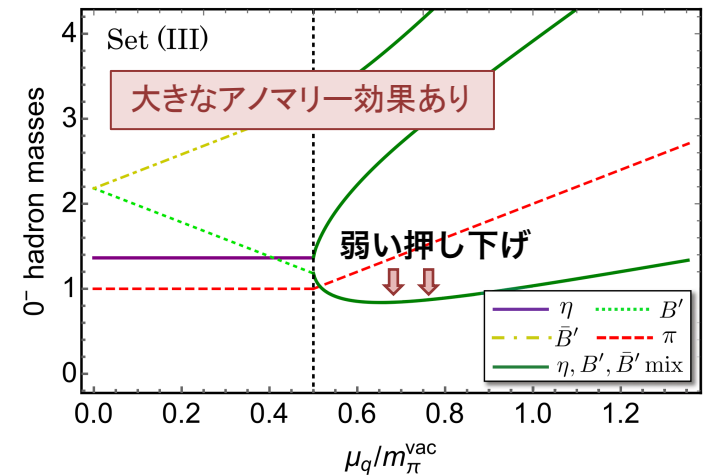
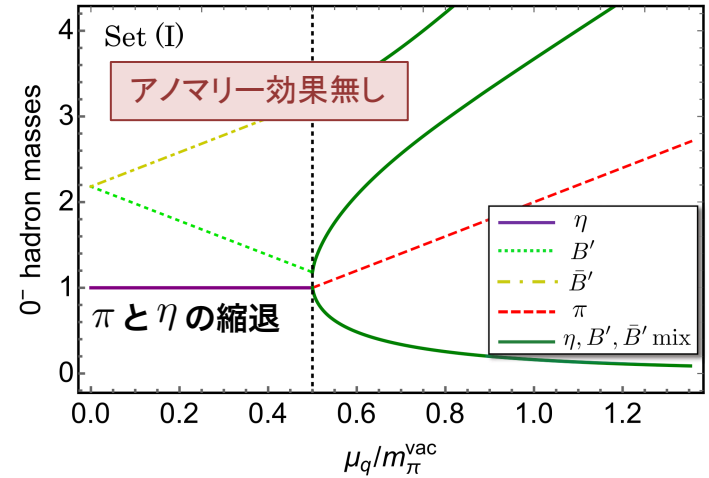


- π と η が縮退 (※ 非連結グラフが入っていない)



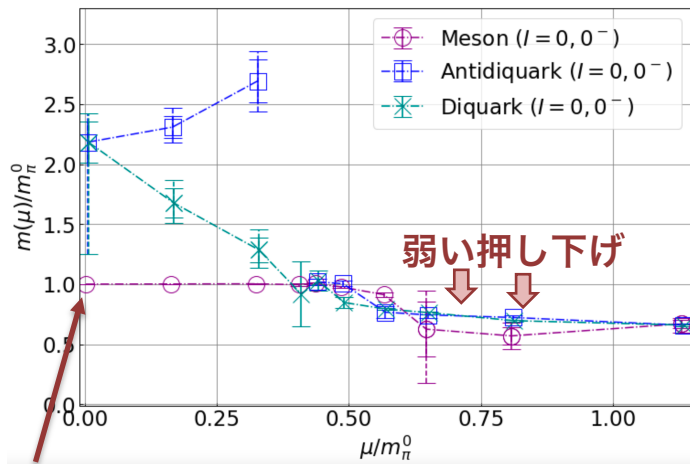
- 非連結グラフを入れてもほぼ縮退のまま

有効模型



・ 格子QCDとの比較 -アノマリーに着目-

格子QCD (Murakami et al)



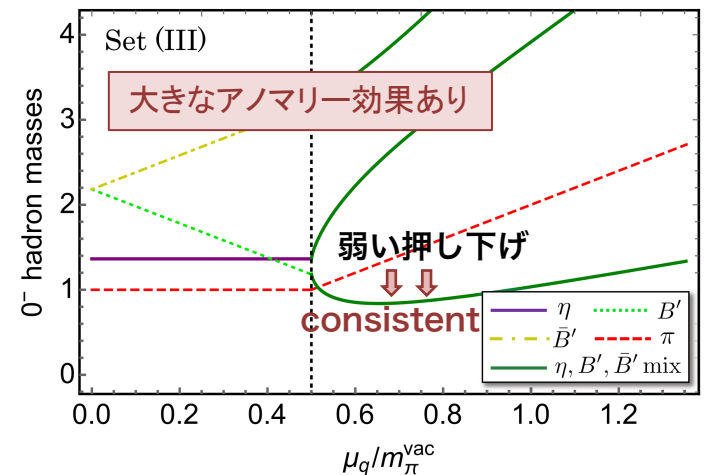
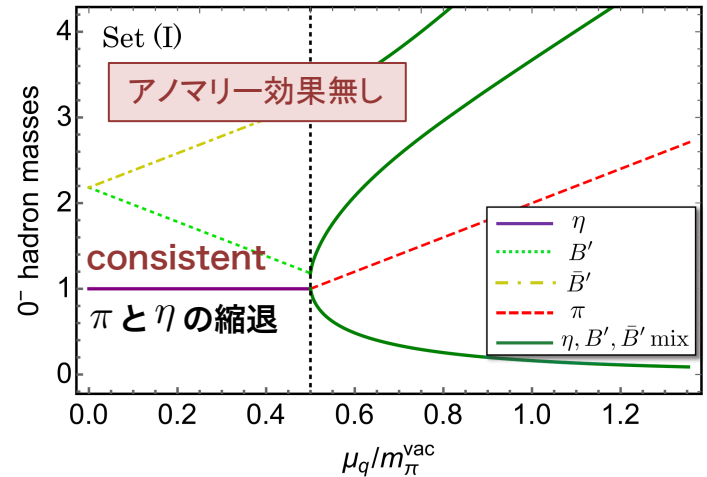
- π と η が縮退 (※ 非連結グラフが入っていない)



- 非連結グラフを入れてもほぼ縮退のまま

- ゼロ密度ではアノマリー効果は小さいが
有限密度ではアノマリー効果が増幅される可能性

有効模型



• スピン1粒子を含む線形シグマ模型

- $\Phi_{ij}^\mu \sim \Psi_j^\dagger \sigma^\mu \Psi_i$ で表されるスピン1粒子のフレーバー 4×4 行列を導入する

$$\Phi^\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\omega + \rho^0 - (f_1 + a_1^0)}{\sqrt{2}} & \rho^+ - a_1^+ & \sqrt{2}B_S^{I=+1} & B_S^{I=0} - B_{AS} \\ \rho^- - a_1^- & \frac{\omega - \rho^0 - (f_1 - a_1^0)}{\sqrt{2}} & B_S^{I=0} + B_{AS} & \sqrt{2}B_S^{I=-1} \\ \sqrt{2}\bar{B}_S^{I=-1} & \bar{B}_S^{I=0} + \bar{B}_{AS} & -\frac{\omega + \rho^0 + f_1 + a_1^0}{\sqrt{2}} & -(\rho^- + a_1^-) \\ \bar{B}_S^{I=0} - \bar{B}_{AS} & \sqrt{2}\bar{B}_S^{I=+1} & -(\rho^+ + a_1^+) & -\frac{\omega - \rho^0 + f_1 - a_1^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\mu$$

Hadron	J^P	Quark number	Isospin
ω	1^-	0	0
ρ	1^-	0	1
f_1	1^+	0	0
a_1	1^+	0	1
$B_S (\bar{B}_S)$	1^+	+2 (-2)	1
$B_{AS} (\bar{B}_{AS})$	1^-	+2 (-2)	0

スピン1 メソン

$$\begin{aligned} \omega^\mu &\sim \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, & f_1^\mu &\sim \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi, \\ \rho^{0,\mu} &\sim \bar{\psi} \tau_f^3 \gamma^\mu \psi, & \rho^{\pm,\mu} &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \tau_f^\mp \gamma^\mu \psi, \\ a_1^{0,\mu} &\sim \bar{\psi} \tau_f^3 \gamma_5 \gamma^\mu \psi, & a_1^{\pm,\mu} &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \tau_f^\mp \gamma_5 \gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

スピン1 ダイクォーク

$$\begin{aligned} B_S^{I=0,\mu} &\sim -\frac{i}{\sqrt{2}} \psi^T C \gamma^\mu \tau_c^2 \tau_f^1 \psi \\ B_S^{I=\pm 1,\mu} &\sim -\frac{i}{2} \psi^T C \gamma^\mu \tau_c^2 (\mathbf{1}_f \pm \tau_f^3) \psi, \\ B_{AS}^\mu &\sim -\frac{1}{\sqrt{2}} \psi^T C \gamma_5 \gamma^\mu \tau_c^2 \tau_f^2 \psi \\ \bar{B}_S^{I=0,\mu} &= (B_S^{I=0,\mu})^\dagger, & \bar{B}_S^{I=\pm 1,\mu} &= (B_S^{I=\mp 1,\mu})^\dagger \\ \bar{B}_{AS}^\mu &= (B_{AS}^\mu)^\dagger, \end{aligned}$$

- Φ^μ の $SU(4)$ 変換則は $\Phi^\mu \rightarrow g \Phi^\mu g^\dagger$ [$g \in SU(4)$]

(matter field method) cf, HLS; Harada-Nonaka-Yamaoka (2010)

cf, 3カラーのSHBとの対応

$$\begin{aligned} B_S &\leftrightarrow \Sigma_c(2455) [\Sigma_c(2520)] \\ B_{AS} &\leftrightarrow \Lambda_c(2595) [\Lambda_c(2625)] \end{aligned}$$

カイラル模型

Harada-Liu-Oka-Suzuki (2020)
Suenaga-Hosaka (2021,2022)
etc.

• スピン1粒子を含む線形シグマ模型

Suenaga et al, in preparation

- $SU(4)$ 不変なラグランジアン of 構築

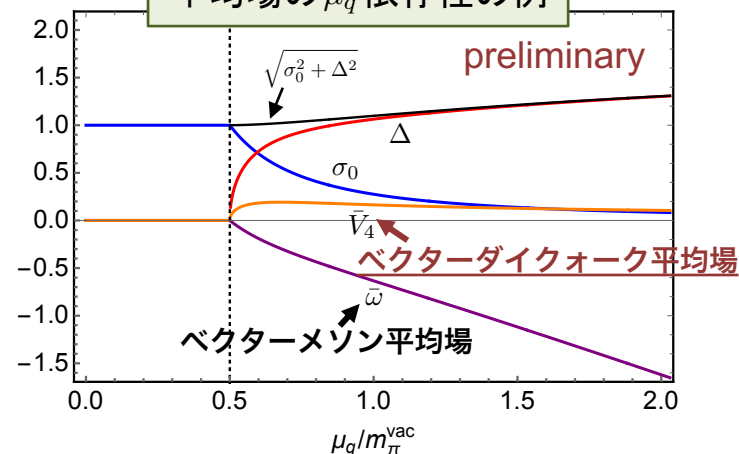
cf, extended LSM from Frankfurt group

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eLSM}} = & \text{tr}[D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma] - m_0^2 \text{tr}[\Sigma^\dagger \Sigma] - \lambda_1 (\text{tr}[\Sigma^\dagger \Sigma])^2 - \lambda_2 \text{tr}[(\Sigma^\dagger \Sigma)^2] + \text{tr}[H^\dagger \Sigma + \Sigma^\dagger H] + c(\det \Sigma + \det \Sigma^\dagger) \\ & - \frac{1}{2} \text{tr}[\Phi_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}] + m_1^2 \text{tr}[\Phi_\mu \Phi^\mu] + ig_3 \text{tr}[\Phi_{\mu\nu} [\Phi^\mu, \Phi^\nu]] + h_1 \text{tr}[\Sigma^\dagger \Sigma] \text{tr}[\Phi_\mu \Phi^\mu] + h_2 \text{tr}[\Sigma \Sigma^\dagger \Phi_\mu \Phi^\mu] \\ & + h_3 \text{tr}[\Phi_\mu^T \Sigma^\dagger \Phi^\mu \Sigma] + g_4 \text{tr}[\Phi_\mu \Phi_\nu \Phi^\mu \Phi^\nu] + g_5 \text{tr}[\Phi_\mu \Phi^\mu \Phi_\nu \Phi^\nu] + g_6 \text{tr}[\Phi_\mu \Phi^\mu] \text{tr}[\Phi_\nu \Phi^\nu] + g_7 \text{tr}[\Phi_\mu \Phi_\nu] \text{tr}[\Phi^\mu \Phi^\nu] \end{aligned}$$

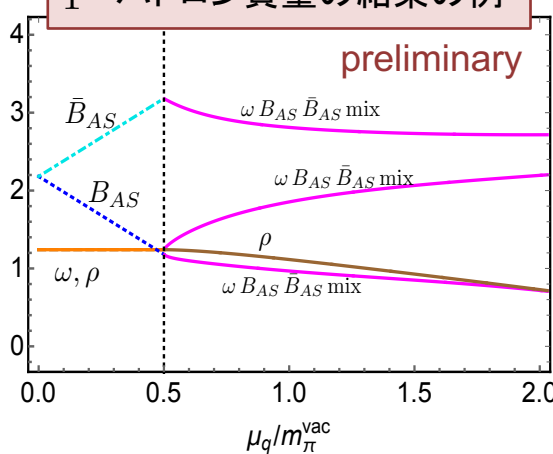
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{\mu\nu} \equiv D_\mu \Phi_\nu - D_\nu \Phi_\mu \\ D_\mu \Sigma \equiv \partial_\mu \Sigma - iG_\mu \Sigma - i\Sigma G_\mu^T - ig_1 \Phi_\mu \Sigma - ig_2 \Sigma \Phi_\mu^T \\ D_\mu \Phi_\nu \equiv \partial_\mu \Phi_\nu - i[G_\mu, \Phi_\nu] \end{array} \right. \quad \text{and} \quad G_\mu \rightarrow \mu_q \delta_{\mu 0} J \quad \text{with} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



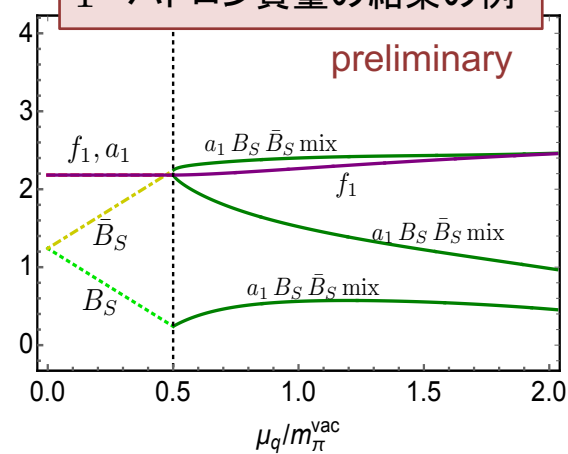
平均場の μ_q 依存性の例



1^- ハドロン質量の結果の例

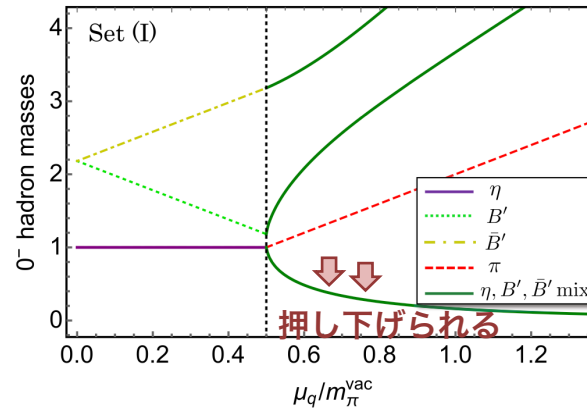
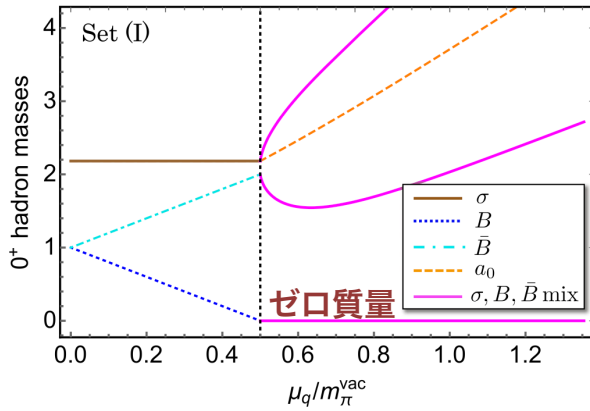


1^+ ハドロン質量の結果の例



4. まとめ

- 2カラーQCDの線形シグマ模型を構築し、ハドロン質量 (B, \bar{B}, π, η とそのパリティパートナー $B', \bar{B}', a_0, \sigma$) の μ_q 依存性を調べた



格子QCDとconsistent!

Murakami et al, in preparation

- 格子QCDとの比較により、有限密度系でアノマリー効果の増大の可能性を発見

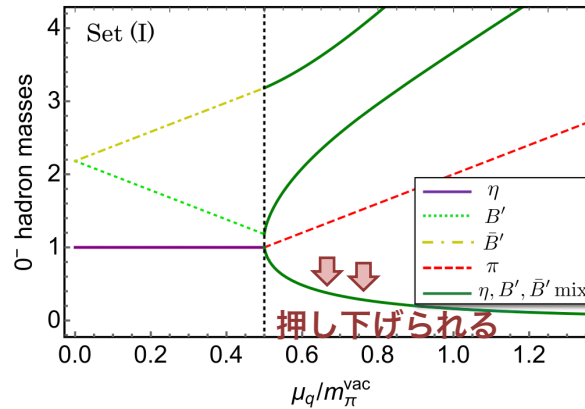
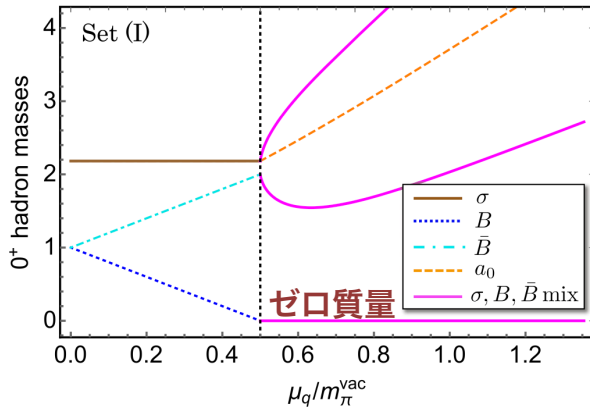


cf, 3カラーでFRGによる解析とconsistent

eg, Fejos-Hosaka (2017, 2018)

4. まとめ

- 2カラーQCDの線形シグマ模型を構築し、ハドロン質量 (B, \bar{B}, π, η とそのパリティパートナー $B', \bar{B}', a_0, \sigma$) の μ_q 依存性を調べた



格子QCDとconsistent!

Murakami et al, in preparation

- 格子QCDとの比較により、有限密度系でアノマリー効果の増大の可能性を発見



cf, 3カラーでFRGによる解析とconsistent

eg, Fejos-Hosaka (2017, 2018)

- 線形シグマ模型によるトポロジカル感受率も調べた

→ 漸近系はカイラルの回復と共に μ_q^{-2} で抑制される
(アノマリー効果の強さに依存しない)

Kawaguchi-Suenaga, to appear in JHEP (2023)

