格子上の２次元コンパクトスカラー理論における磁気的演算子の構成

<u>Soma Onoda(Kyushu U.)</u>

based on arXiv:2304.14815 [hep-lat]

with Motokazu Abe, Hiroshi Suzuki(Kyushu U.)

Okuto Morikawa(Osaka U.), Yuya Tanizaki(YITP)

「熱場の量子論とその応用@KEK」

Motivation

QFTは連続無限自由度の量子論

➡ 具体的な計算をしようとすると発散を含む。➡ 正則化

格子正則化：ゲージ対称性を保ち、非摂動的で厳密な枠組みを提供。

我々の興味：理論にトポロジカル電荷（θ項）を含む物理。

[Witten, 1979] [Aharony, Seiberg, Tachikawa, 2013] [Gaiotto, et al, 2017]...

格子でやる上での問題点

後述のAdmissibilityのため、素朴にはwell-definedなトポロジカル電荷の定式化のもとで磁気モノポールに対応するものを入れられない。

やったこと

・２D compact scalar理論において、admissibility conditionとconsistentな magnetic operator (monopole)を格子上で定義した。[Lüscher, 1982]

・２D Two compact scalar理論においてWitten効果を格子上で定式化した。

・２D Single compact scalar理論における混合’t Hooft anomalyを格子上で定式化した。

・２D back ground gauge fieldsのWitten効果に相当する’t Hooft anomalyを格子上で定式化した。

Magnetic monopole and Witten effect

連続理論

Action: $\dfrac{R^2}{4\pi}\displaystyle\int_{M_2} d\phi \wedge \star d\phi$（ゲージ対称性： $\phi(x) \sim \phi(x) + 2\pi$ ）

この理論には$U(1)_{(e)} \times U(1)_{(m)}$ 0-form global symmetryが存在。

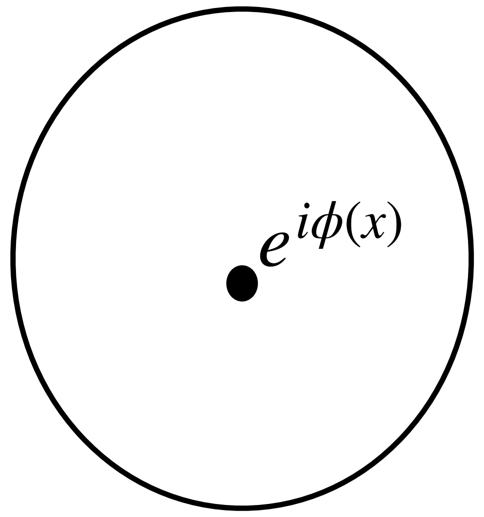
保存カレントは　　　　　　　　　　(ϕのshift symmetry（とそのdual））

$$j^{(e)}(x) \equiv -i \star \frac{R^2}{2\pi} d\phi(x), \quad j^{(m)}(x) \equiv \frac{1}{2\pi} d\phi(x),$$

保存則は、EoMと、Bianchi恒等式に対応。

$U(1)_{(e)}$に対するcharged objectは、$e^{i\phi(x)}$（wilson loopのアナロジー）

$$\langle e^{i\theta\int_{S^1} j^{(e)}} e^{i\phi(x)} \rangle = \langle$$

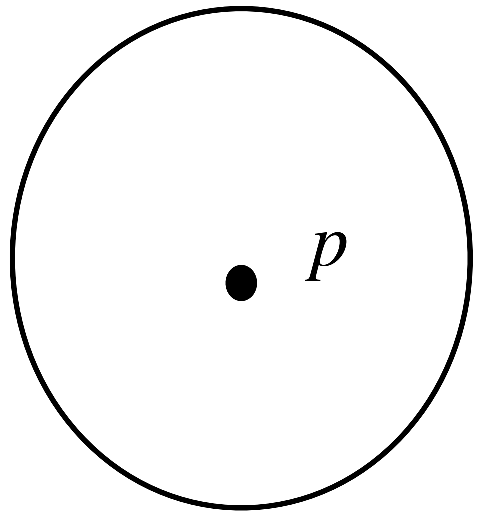


$$\rangle = e^{i\theta} \langle e^{i\phi(x)} \rangle$$

$U(1)_{(m)}$に対するcharged objectは、$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{S^1_p} d\phi = 1$　なる場所p

(S^1_pは場所p周りを一周するS^1)

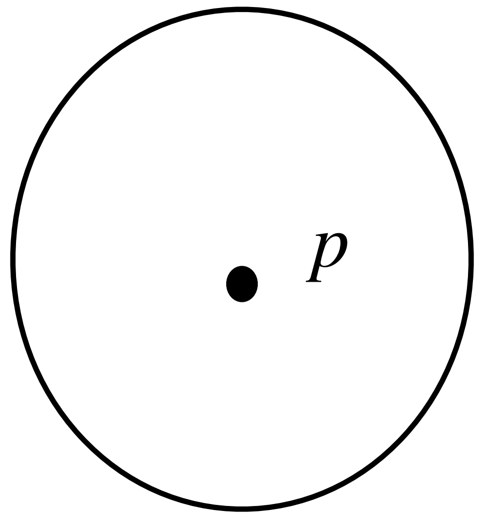
$$\langle e^{i\theta\int_{S^1_p} j^{(m)}} M(p) \rangle = \langle$$



$$\rangle = e^{i\theta} \langle M(p) \rangle$$

$U(1)_{(m)}$に対するcharged objectは、$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{S^1_p} d\phi = 1$　なる場所p

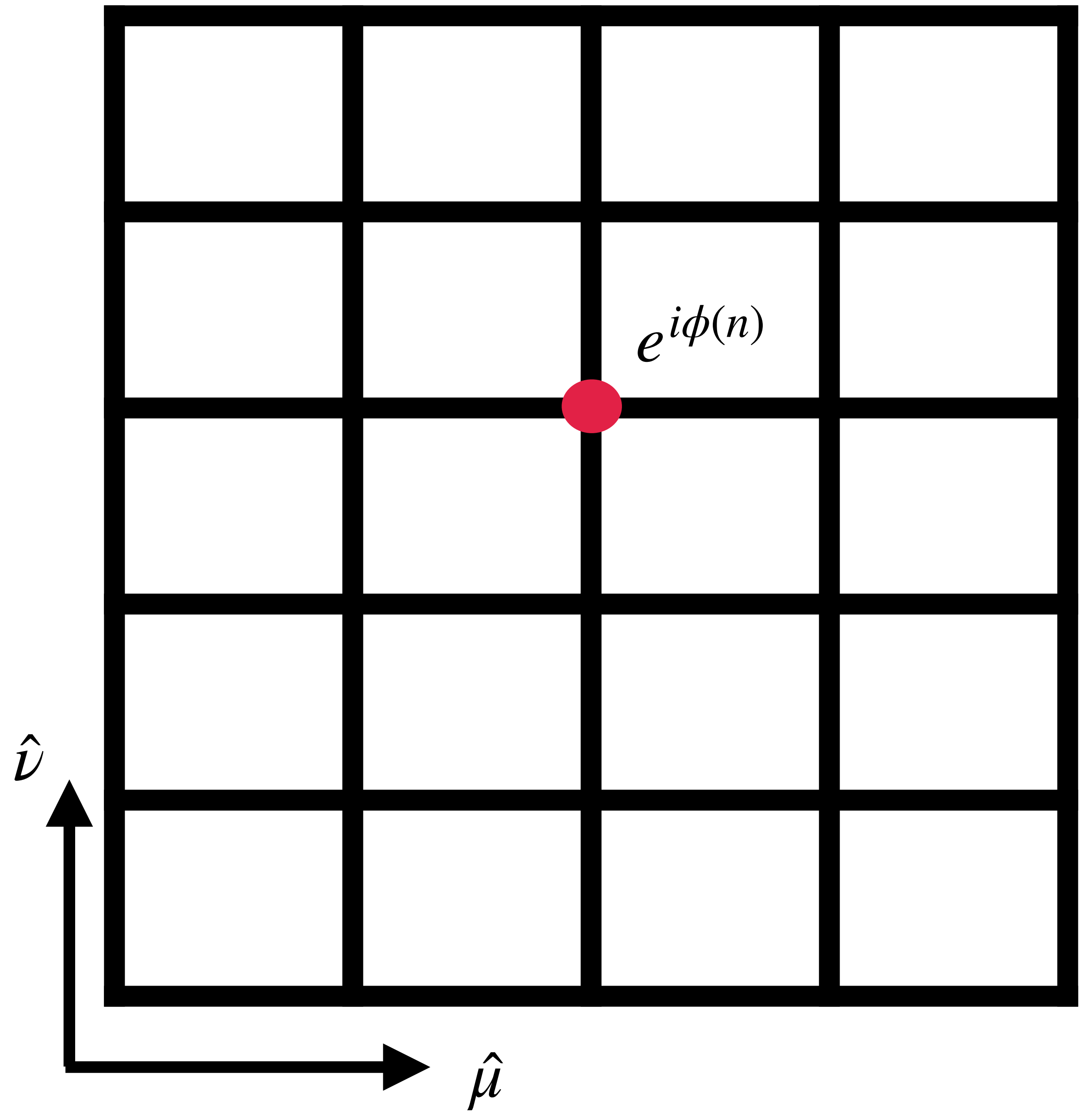
(S^1_pは場所p周りを一周するS^1)

$\langle e^{i\theta \int_{S^1_p} j^{(m)}} M(p)\rangle = \langle$  $\rangle = e^{i\theta}\langle M(p)\rangle$

$\Rightarrow$ これをlatticeの言葉で定式化したい。

Setting

$M_2 = T^2$とし、これをsquare latticeで近似する。



“ゲージ不変”な基本自由度は、$e^{i\phi(n)} \in U(1)$

$$\phi(n) = \frac{1}{i}\ln[e^{i\phi(n)}], \quad -\pi < \phi(n) \le \pi\,.$$

“微分”に対応するものを以下のように定義

$$\partial\phi(n,\mu) \equiv \frac{1}{i}\ln[e^{-i\phi(n)}e^{i\phi(n+\hat{\mu})}], \quad -\pi < \partial\phi(n,\mu) \le \pi\,.$$

$$\partial\phi(n,\mu) = \underbrace{\phi(n+\hat{\mu}) - \phi(n)}_{\equiv \Delta_\mu \phi(n)} + 2\pi\ell_\mu(n), \quad \ell_\mu(n) \in \mathbb{Z}$$

Admissibility Condition

$$\boxed{\sup_{n,\mu} |\partial\phi(n,\mu)| < \epsilon, \quad 0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}}$$

格子上でtopological sectorを
定義するために必要
[Lüscher, 1982][Fujiwara, Suzuki, Wu, 2000]

配位が「十分に滑らか」であるという条件

この仮定の元で、

$$\left|\sum_{(n,\mu)\in p} \ell_\mu(n)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{(n,\mu)\in p} \partial\phi(n,\mu)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{(n,\mu)\in p}\left|\partial\phi(n,\mu)\right| < \frac{1}{2\pi}\times 4\epsilon < 1$$

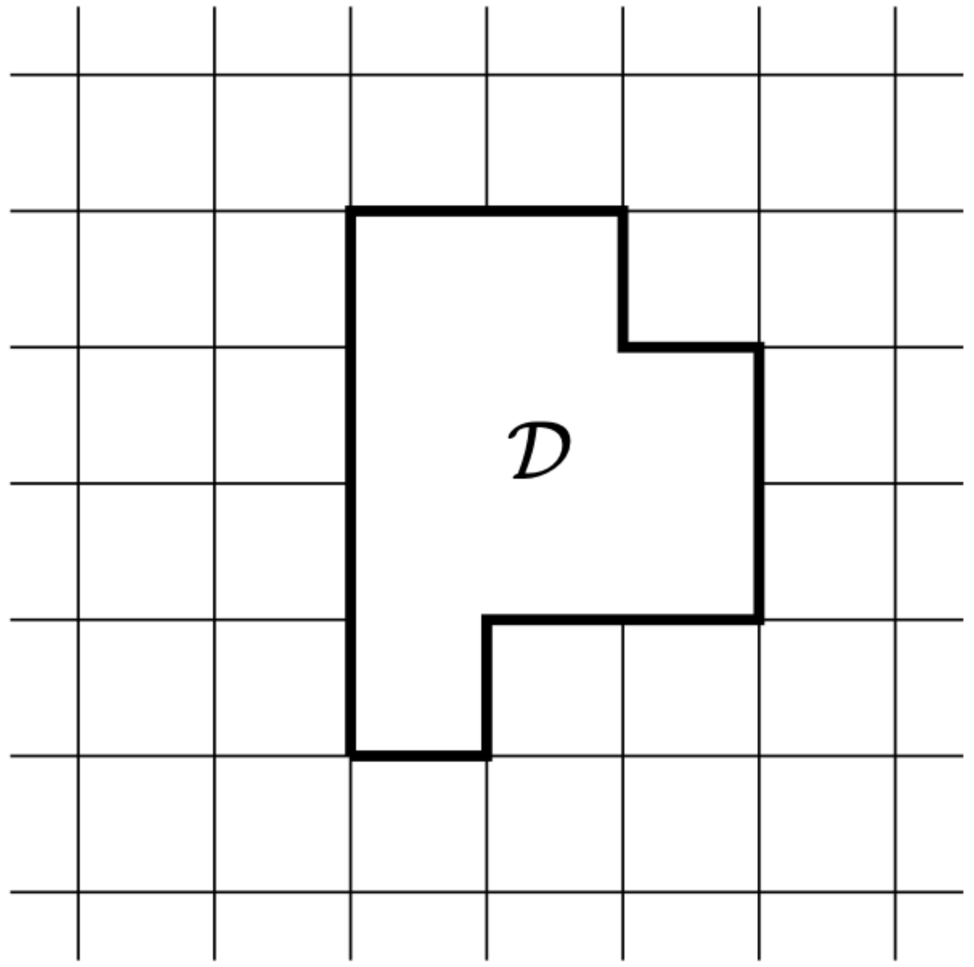
$$\Rightarrow \sum_{(n,\mu)\in p} \partial\phi(n,\mu) = \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu}\Delta_\mu \frac{1}{2\pi}\partial\phi(n,\nu) = 0 \Rightarrow$$ **Bianchi恒等式**

Magnetic Defect

Admissibilityのもとで $\displaystyle\sum_{(n,\mu)\in\partial S} \partial\phi(n,\mu) = \sum_{p\in S}\sum_{(n,\mu)\in p} \partial\phi(n,\mu) = 0$

連続理論の言葉で言うと $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} d\phi = 0$

Magnetic defect(monopole)は？ **世界をくり抜く（格子に穴を開ける）**



$$\frac{1}{2\pi}\left|\sum_{(n,\mu)\in\partial D} \partial\phi(n,\mu)\right| < \frac{1}{2\pi}\times(\partial D)\epsilon \qquad 4 < \frac{2\pi}{\epsilon} \lessapprox (\partial D)$$

ならnon-zeroに出来る

$$(D \in S) \sum_{(n,\mu)\in\partial S} \partial\phi(n,\mu) = \sum_{(n,\mu)\in\partial D} \partial\phi(n,\mu) = \sum_{(n,\mu)\in\partial D} \ell_\mu(n) = m \neq 0$$

(大きな∂S上の積分はadmissibilityのために連続変形可能)

やったこと

✓ ２D compact scalar理論において、admissibility conditionとconsistentな magnetic operator (monopole)を格子上で定義した。 [Lüscher, 1982]

・２D Two compact scalar理論においてWitten効果を格子上で定式化した。

・２D Single compact scalar理論における混合't Hooft anomalyを格子上で定式化した。

・２D back ground gauge fieldsのWitten効果に相当する't Hooft anomalyを格子上で定式化した。

連続理論(Witten効果)

[Witten, 1979]

２つのcompact scalarが存在する理論を考える。

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{1}{4\pi^2}\int_{M_2} d\phi_1 \wedge d\phi_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{(Topological charge)}$$

$$\text{Action: } S_\theta[\phi_a] = \int_{M_2} \sum_a d\phi_a \wedge \star d\phi_a - \frac{i\theta}{4\pi^2}\int_{M_2} d\phi_1 \wedge d\phi_2$$

$$\text{Witten効果：} \Big\langle \underbrace{M_1(x)}_{\substack{\text{Magnetic} \\ (0,m)}} \Big\rangle_{\theta+2\pi} = \Big\langle \underbrace{M_1(x) e^{im\phi_2(x)}}_{\substack{\text{Dyonic} \\ (m,m)}} \Big\rangle_\theta$$

θをずらすとmagnetic monopoleがdyonになる

格子上でのTopological Charge

Dual lattice

$$S \equiv \frac{R^2}{2\pi} \sum_{n\in\Gamma} \sum_{\mu,a} \sum_{a} \left\{1 - \cos[\partial\phi_a(n,\mu)]\right\} + \underbrace{\frac{i\theta}{4\pi^2} \sum_{n\in\Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu}\partial\phi_2(\tilde{n},\mu)\partial\phi_1(n+\hat{\mu},\nu)}_{\text{Topological term}}$$

Admissibility conditionのもとで（変形の途中でBianchi恒等式を使った）

$$\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\in\Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu}\partial\phi_2(\tilde{n},\mu)\partial\phi_1(n+\hat{\mu},\nu)\,.$$

$$= -\sum_{n\in\Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu}\ell_{2,\mu}(\tilde{n})\ell_{1,\nu}(n+\hat{\mu}) \in \mathbb{Z}$$

格子上でのWitten効果

次に、「穴」を開けた場合（$\Gamma \to \Gamma - \mathscr{D}$）

$\theta \to \theta + 2\pi$のもとで

$$S \to S - i\phi_2(\tilde{n}_*) \sum_{(n,\mu)\in\partial\mathscr{D}} \ell_{1,\mu}(n) + 2\pi i\mathbb{Z} = S - im\phi_2(\tilde{n}_*) + 2\pi i\mathbb{Z}$$

つまり、格子正則化のもとで、

$$\Big\langle \underbrace{M_1(\tilde{n}_*)}_{\substack{\text{Magnetic} \\ (0,m)}} \Big\rangle_{\theta+2\pi} = \Big\langle \underbrace{M_1(\tilde{n}_*)e^{im\phi_2(\tilde{n}_*)}}_{\substack{\text{Dyonic} \\ (m,m)}} \Big\rangle_{\theta}$$

が確かめられた。

やったこと

✓ **２D compact scalar理論において、admissibility conditionとconsistentな magnetic operator (monopole)を格子上で定義した。** [Lüscher, 1982]

✓ **２D Two compact scalar理論においてWitten効果を格子上で定式化した。**

・ **２D Single compact scalar理論における混合’t Hooft anomalyを格子上で定式化した。**

・ **２D back ground gauge fieldsのWitten効果に相当する’t Hooft anomalyを格子上で定式化した。**

’t Hooft anomaly

’t Hooft Anomaly（連続理論）

Compact scalar理論に 1 -form background gauge fields $A^{(e)}, A^{(m)}$をcoupleさせる。

$$S[\phi, A^{(e)}, A^{(m)}] = \frac{R^2}{4\pi}\int_{M_2} \left| d\phi + A^{(e)} \right|^2 + \frac{i}{2\pi}\int_{M_2} A^{(m)} \wedge \left[d\phi + A^{(e)} \right]$$

electric gauge変換：$\phi \mapsto \phi - \Lambda^{(e)}, A^{(e)} \mapsto A^{(e)} + d\Lambda^{(e)}$に対しては不変にできる

しかし、magnetic gauge変換：$A^{(m)} \mapsto A^{(m)} + d\Lambda^{(m)}$の元では、

$$Z[A^{(e)} + d\Lambda^{(e)}, A^{(m)} + d\Lambda^{(m)}] = \exp\left[-\frac{i}{2\pi}\int_{M_2} d\Lambda^{(m)} \wedge A^{(e)} \right] Z[A^{(e)}, A^{(m)}]$$

（backgroundのみのphase）(混合 ’t Hooft anomaly)

Gauge Invariant Admissibility

$$\sup_{n,\mu} \left| D\phi(n,\mu) \right| < \epsilon, \qquad 0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$$

$$\sup_{n,\mu,\nu} \left| F^{(e)}_{\mu\nu}(n) \right| < \delta, \qquad \sup_{\tilde{n},\mu,\nu} \left| F^{(m)}_{\mu\nu}(\tilde{n}) \right| < \delta, \qquad 0 < \delta < \min(\pi, 2\pi - 4\epsilon)$$

（それぞれvertex operator, link, plaquetteで作られた積のlogで定義）

これらは、（いわゆるBianchiではなく）**gauge 不変な関係式**

$$\sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \left[\Delta_\mu \ell^{(e)}_\nu(n) - \underline{\frac{1}{2} N^{(e)}_{\mu\nu}(n)} \right] = 0$$ を保証

ここがBianchiと違う

これは連続理論likeに言えば$\Delta_\mu D\phi(n,\nu) - \Delta_\nu D\phi(n,\mu) = F^{(e)}_{\mu\nu}(n)$をrespect

’t Hooft Anomaly（格子）

$$S \equiv \frac{R^2}{2\pi} \sum_{n \in \Gamma - \mathscr{D}} \sum_{\mu} \left\{1 - \cos[D\phi(n,\mu)]\right\} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \Gamma - \mathscr{D}} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} A_{\mu}^{(m)}(\tilde{n}) D\phi(n+\hat{\mu},\nu) + \frac{i}{2} \sum_{n \in \Gamma - \mathscr{D}} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} N_{\mu\nu}^{(m)}(\tilde{n}) \phi(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})$$

連続理論をrespect

’t Hooft anomalyのための

local counter term

この時、electric and magnetic gauge変換を施すと

$$e^{-S} \to e^{-S} \exp\left\{ \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \Gamma - \mathscr{D}} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \Lambda^{(m)}(\tilde{n}) F_{\mu\nu}^{(e)}(n) - 2\pi L_{\mu}^{(m)}(\tilde{n}) A_{\nu}^{(e)}(n+\hat{\mu}) \right] \right\} \times \exp\left[i m \Lambda^{(m)}(\tilde{n}_*) \right]$$

Open ’t Hooft line $\exp\left[-im \sum_{(\tilde{n},\mu) \in P}^{\tilde{n}_*} A_{\mu}^{(m)}(\tilde{n}) \right]$

でcancelできる。（$M(p)$と$A^{(m)}$との結合を表す。）

$\mathscr{D}$の存在による

magnetic gauge symmetry breaking term

やったこと

✓ ２D compact scalar理論において、admissibility conditionとconsistentなmagnetic operator (monopole)を格子上で定義した。[Lüscher, 1982]

✓ ２D Two compact scalar理論においてWitten効果を格子上で定式化した。

✓ ２D Single compact scalar理論における混合’t Hooft anomalyを格子上で定式化した。

・２D back ground gauge fieldsのWitten効果に相当する’t Hooft anomalyを格子上で定式化した。

(Witten effect like) 't Hooft Anomaly（格子）

Two compact scalarに先ほどと同様にback groundを結合させる

$$
\begin{aligned}
S \equiv & \frac{R^2}{2\pi} \sum_{n \in \Gamma} \sum_{\mu, a} \sum_{a} \left\{ 1 - \cos[D\phi_a(n,\mu)] \right\} \\
& + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \left[A_\mu^{(m,1)}(\tilde{n}) D\phi_1(n+\hat{\mu},\nu) - D\phi_2(\tilde{n},\mu) A_\nu^{(m,2)}(n+\hat{\mu}) \right] \\
& + \frac{i}{2} \sum_{n \in \Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \left[N_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n}) \phi_1(n+\hat{\mu}+\hat{\nu}) + \phi_2(\tilde{n}) N_{\mu\nu}^{(m,2)}(n) \right] \\
& + \frac{i\theta}{4\pi^2} \sum_{n \in \Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} D\phi_2(\tilde{n},\mu) D\phi_1(n+\hat{\mu},\nu)
\end{aligned}
$$

't Hooft anomalyのための

local counter term

$$\theta \to \theta + 2\pi, \qquad A_\mu^{(m,1)}(\tilde{n}) \to A_\mu^{(m,1)}(\tilde{n}) - A_\mu^{(e,2)}(\tilde{n}), \qquad A_\mu^{(m,2)}(n) \to A_\mu^{(m,2)}(n) + A_\mu^{(e,1)}(n)$$

$$\boxed{N_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n}) \to N_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n}) - N_{\mu\nu}^{(e,2)}(\tilde{n}), \qquad N_{\mu\nu}^{(m,2)}(n) \to N_{\mu\nu}^{(m,2)}(n) + N_{\mu\nu}^{(e,1)}(n)}$$

（実は）連続理論では見えなかった整数背景場のshiftを仮定

[respect to $F_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n}) \to F_{\mu\nu}^{(m,1)}(\tilde{n}) - F_{\mu\nu}^{(e,2)}(\tilde{n})$, $F_{\mu\nu}^{(m,2)}(n) \to F_{\mu\nu}^{(m,2)}(n) + F_{\mu\nu}^{(e,1)}(n)$]

これらshiftのもとで格子上で't Hooft anomalyが導出できた。

$$S \to S \underbrace{- \frac{i}{2\pi} \sum_{n\in\Gamma} \sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} A_\mu^{(e,2)}(\tilde{n}) A_\nu^{(e,1)}(n+\hat{\mu})}_{\text{'t Hooft anomaly (on lattice)}} + 2\pi i \mathbb{Z}$$

Summary

✔ **2 D compact scalar理論において、admissibility conditionとconsistentなmagnetic operator (monopole)を格子上で定義した。** [Lüscher, 1982]

✔ **2 D Two compact scalar理論においてWitten効果を格子上で定式化した。**

✔ **2 D Single compact scalar理論における混合’t Hooft anomalyを格子上で定式化した。**

✔ **2 D back ground gauge fieldsのWitten効果に相当する’t Hooft anomalyを格子上で定式化した。**

重要なのは

・（少なくとも２D compact scalar理論では）**格子上に「穴」をあける**ことでMagnetic defect (monopole)を置くことができる。

・**gauge invarianceをrespectしたadmissibility condition**を場の配位に課した時、これから得られるゲージ不変でBianchi恒等式likeな関係式が't Hooft anomalyの導出において重要だった。

Future direction: このmonopole構成の４D U(1), SU(N),...への拡張

（具体的にはWitten効果で't Hooft loopにWilson loopが伴うようなことを見たい。）

Back up

Dirac quantization

$$e^{i\phi(x)} = e^{i\phi(x')} \exp\left(i \sum_{(n,\mu)\in C_{xx'}} \partial\phi(n,\mu) \right)$$

一般にmagnetic defectを囲むような経路で一周すると、

$$e^{i\phi(x)} = e^{i\phi(x)} \exp\left(i \sum_{(n,\mu)\in C_{xx}} \partial\phi(n,\mu) \right) = e^{i\phi(x)} e^{2\pi i m} = e^{i\phi(x)}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Single valued!

by definitionでDirac quantization condition $m \in \mathbb{Z}$が守られている。

’t Hooft anomaly

大域的対称性をゲージ化してみた時に現れることがあるanomaly

RG不変という特別な性質を持つ→低エネルギーEFTへの制限

「ゲージ化する」→背景ゲージ場をうまく結合させる

’t Hooft anomalyが存在する時

$$Z \xrightarrow{\text{Gauge trans}} (\text{phase}) \times Z$$

背景場のみで書けている

<u>格子でやりたい</u>

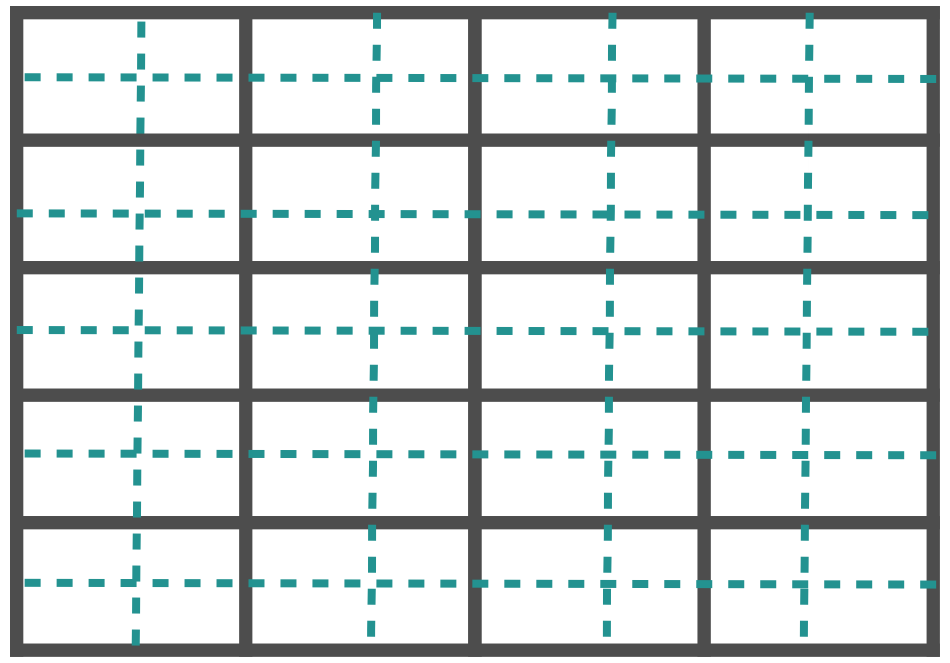
Setting（格子）

1 -form back ground gauge fields $A^{(e)}, A^{(m)}$に対応するlink変数

$$U^{(e)}(n,\mu), \quad U^{(m)}(\tilde{n},\mu) \quad \tilde{n} \equiv n + \frac{1}{2}\hat{1} + \frac{1}{2}\hat{2}$$ （dual lattice）

$$A_\mu^{(e)}(n) \equiv \frac{1}{i}\ln U^{(e)}(n,\mu), \qquad -\pi < A_\mu^{(e)}(n) \leq \pi,$$

$$A_\mu^{(m)}(\tilde{n}) \equiv \frac{1}{i}\ln U^{(m)}(\tilde{n},\mu), \qquad -\pi < A_\mu^{(m)}(\tilde{n}) \leq \pi,$$



$$F^{(e)}_{\mu\nu}(n) \equiv \frac{1}{i}\ln\left[U^{(e)}(n,\mu)U^{(e)}(n+\hat{\mu},\nu)U^{(e)}(n+\hat{\nu},\mu)^{-1}U^{(e)}(n,\nu)^{-1}\right]$$
$$= \Delta_\mu A^{(e)}_\nu - \Delta_\nu A^{(e)}_\mu + 2\pi N^{(e)}_{\mu\nu} \quad \text{（magneticは}e \to m, n \to \tilde{n}\text{としたもの）}$$

また、共変微分に対応するものは次の通り

$$D\phi(n,\mu) \equiv \frac{1}{i}\ln\left[e^{-i\phi(n)}U^{(e)}(n,\mu)e^{i\phi(n+\hat{\mu})}\right], \qquad -\pi < D\phi(n,\mu) \leq \pi$$
$$= \Delta_\mu\phi(n) + A^{(e)}_\mu(n) + 2\pi\ell^{(e)}_\mu(n)$$

gauge変換性は、

$$\phi \mapsto \phi - \Lambda^{(e)}, \qquad A^{(e,m)}_\mu \mapsto A^{(e,m)}_\mu + \Delta_\mu\Lambda^{(e,m)} + 2\pi L^{(e,m)}_\mu$$

$$N^{(e,m)}_{\mu\nu} \mapsto N^{(e,m)}_{\mu\nu} - \Delta_\mu L^{(e,m)}_\nu + \Delta_\nu L^{(e,m)}_\mu, \qquad \ell^{(e)}_\mu(n) \mapsto \ell^{(e)}_\mu(n) - L^{(e)}_\mu(n)$$

’t Hooft anomaly（連続）

先ほどの理論にbackground gauge fields $A^{(e,a)}\,A^{(m,a)}$ $(a=1,2)$をcoupleさせる。

$$
\begin{aligned}
&S_\theta[\phi_a, A^{(e,a)}, A^{(m,a)}] \\
&= \int_{M_2} \sum_a \left[d\phi_a + A^{(e,a)}\right] \wedge \star \left[d\phi_a + A^{(e,a)}\right] - \frac{i\theta}{4\pi^2} \int_{M_2} \left[d\phi_1 + A^{(e,1)}\right] \wedge \left[d\phi_2 + A^{(e,2)}\right] \\
&\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{M_2} \sum_a A^{(m,a)} \wedge \left[d\phi_a + A^{(e,a)}\right]
\end{aligned}
$$

$$\theta \to \theta + 2\pi, \qquad A^{(m,1)} \to A^{(m,1)} - A^{(e,2)}, \qquad A^{(m,2)} \to A^{(m,2)} + A^{(e,1)}$$

とすると

$$Z_{\theta+2\pi}[A^{(e,a)}, A^{(m,1)} - A^{(e,2)}, A^{(m,2)} + A^{(e,1)}]$$
$$= \exp\left[-\frac{i}{2\pi}\int_{M_2} A^{(e,1)} \wedge A^{(e,2)}\right] Z_{\theta}[A^{(e,a)}, A^{(m,1)}, A^{(m,2)}]$$

Anomaly詳しい計算

B.g. coupled two compact scalar理論において

$$S_{\theta+2\pi} - S_\theta = -\frac{i}{2\pi}\int_{M_2}\left[d\phi_1 + A^{(e,1)}\right]\wedge\left[d\phi_2 + A^{(e,2)}\right]$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\int_{M_2}\left[\underbrace{d\phi_1 \wedge d\phi_2}_{\in\mathbb{Z}} + A^{(e,1)}\wedge d\phi_2 - A^{(e,2)}\wedge d\phi_1 + A^{(e,1)}\wedge A^{(e,2)}\right].$$

’t Hooft anomalyを出したいので右辺をback groundのみで書きたい

Actionの相互作用項$\frac{i}{2\pi}\int_{M_2}\sum_a A^{(m,a)}\wedge\left[d\phi_a + A^{(e,a)}\right]$を睨むと$A^{(m)}$

を$A^{(e)}$だけずらせば良いと分かる。

「穴」の上でのdual latticeの取り方