相対論的流体力学における安定・高精度な数値手法

Based on arXiv:2306.12696

Speaker: 村瀬功一 (京大基研)
Nathan Touroux (阪大理、SUBATECH, 京大基研)
北沢正清 (阪大理、京大基研)
Marlene Nahrgang (SUBATECH)

熱場の量子論とその応用 (TQFT2023)、KEK、つくば

大自由度(場)･非線形･実時間発展

相対論的流体力学における安定・高精度な数値手法

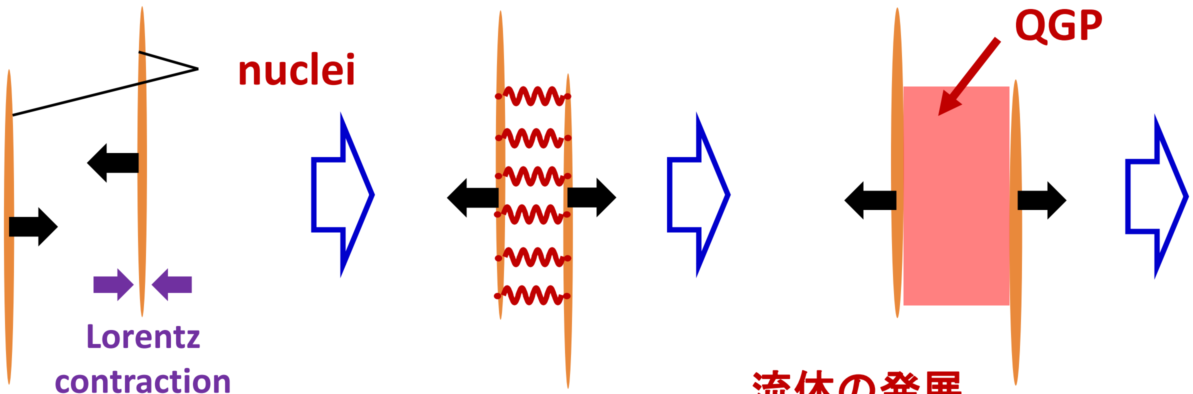
Based on arXiv:2306.12696

Speaker: 村瀬功一 (京大基研)
Nathan Touroux (阪大理、SUBATECH, 京大基研)
北沢正清 (阪大理、京大基研)
Marlene Nahrgang (SUBATECH)

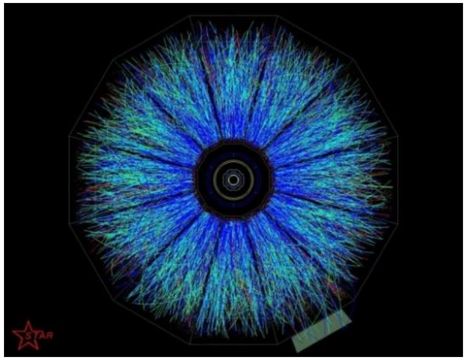
熱場の量子論とその応用 (TQFT2023)、KEK、つくば

相対論的流体力学の数値計算

高エネルギー重イオン衝突反応

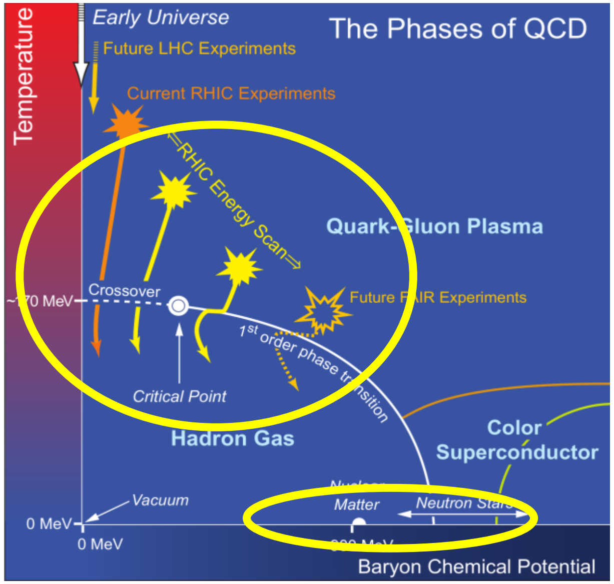


Hadrons

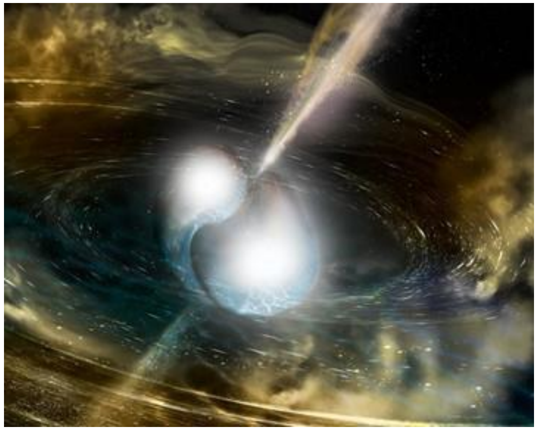


STAR Collaboration

QCD相図(予想図)



中性子星連星合体



想像図

数値相対論
= 計量$g_{\mu\nu}$の発展
+ 流体$T^{\mu\nu}$の発展

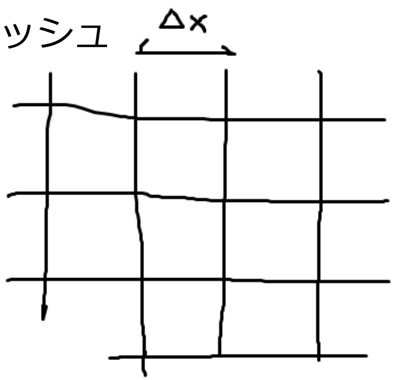
http://www.astronomy.com/news/2017/10/

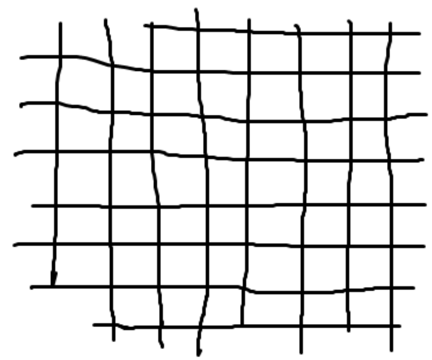
数値流体力学(CFD)の世界にようこそ(?)

計算効率と数値精度

数値計算のため時間・空間を離散化 → Δt, Δx

空間メッシュ





CFL条件
$\Delta t < c\Delta x$

計算量 ~ $O(1/\Delta x^3\ \Delta t)$ > $O(1/\Delta x^4)$

→ 離散化幅 Δx は計算効率に強い影響

動機・目標: できるだけ大きな Δx で計算量を抑えつつ (Δx, Δt) に対する近似の次数を上げて計算したい
+ 計算の安定性。

空間高次化 & 時間高次化

空間高次化(空間再構築)

周囲のセルからセル内の流体場のプロファイルを再構築(有限体積法)

MUSCL, PPM, PRM, ENO, WENO, ⋯

MUSCL	PPM	PRM	ENO, WENO
線形補間	2次補間	有理関数	複数の*n*次補間
+minmod	+minmod	+minmod	+選択 or 重み付け和

愚直な高次化 → 振動 (衝撃波や急激な物理量の変動で×)
→ Flux limiter (～あぶないとき自動で次数を下げる)

時間高次化

時間1ステップでステップ幅 Δt の高次まで一致させる

Euler法, TVDルンゲクッタ, 陰的ルンゲクッタ, ⋯

高次化: 解が時間的・空間的になめらかでない時 → ??

keywords: 線形安定性、全変動減少(TVD)、⋯

空間高次化 & 時間高次化

空間高次化(空間再構築)

周囲のセルからセル内の流体場のプロファイルを再構築(有限体積法)

MUSCL, PPM, PRM, ENO, WENO, …

MUSCL	PPM	PRM	ENO, WENO
線形補間	2次補間	有理関数	複数のn次補間
+minmod	+minmod	+minmod	+選択 or 重み付け和

愚直な高次化 → 振動 (衝撃波や急激な物理量の変動で×)
→ Flux limiter (～あぶないとき自動で次数を下げる)

時間高次化

時間1ステップでステップ幅 Δt の高次まで一致させる

Euler法, TVDルンゲクッタ, $\boxed{\text{陰的ルンゲクッタ}}$, …

高次化: 解が時間的・空間的になめらかでない時 → ??

keywords: $\boxed{\text{線形安定性}}$、全変動減少(TVD)、…

本研究

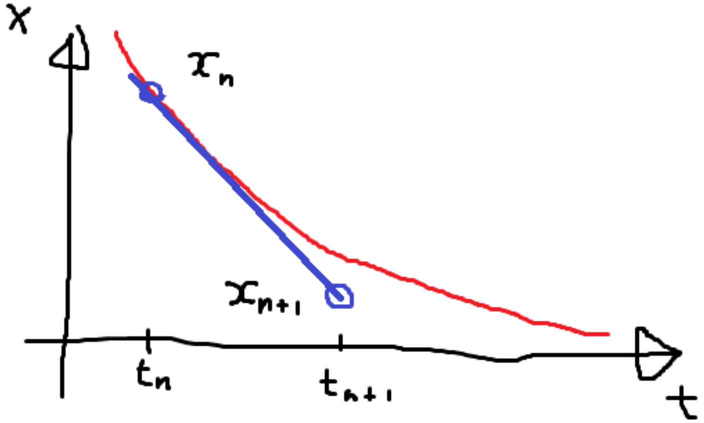
陰解法と線形安定性

常微分方程式 $$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t).$$

→線形化&対角化 $$\dot{x} = -\lambda x.$$ (Dahlquist eq)

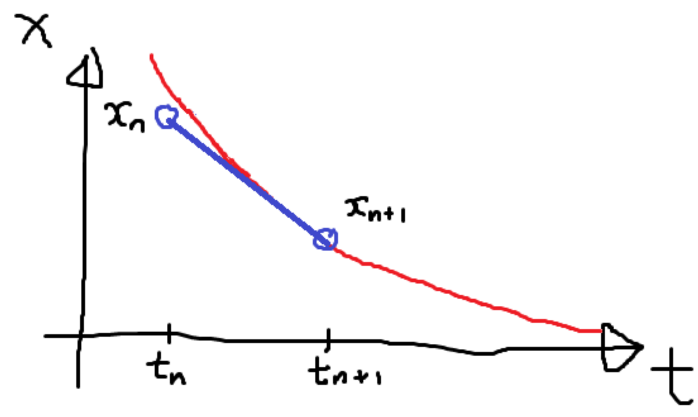
Euler法

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n)$$



陰的Euler法

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_{n+1})$$



陰解法と線形安定性

常微分方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t).$

→線形化&対角化 $\dot{x} = -\lambda x.$ (Dahlquist eq)

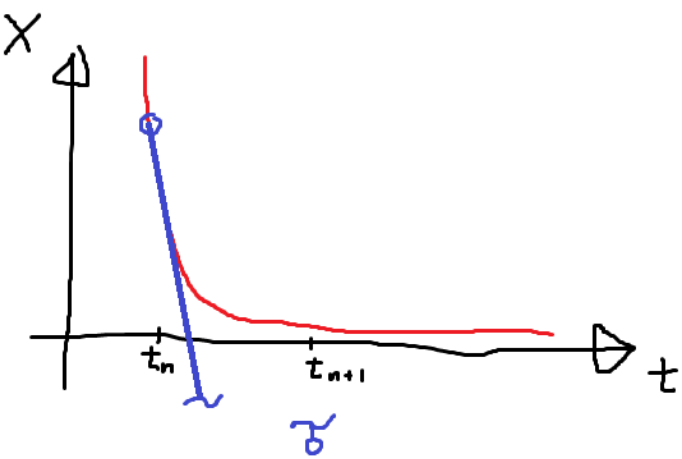
Euler法

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n)$$

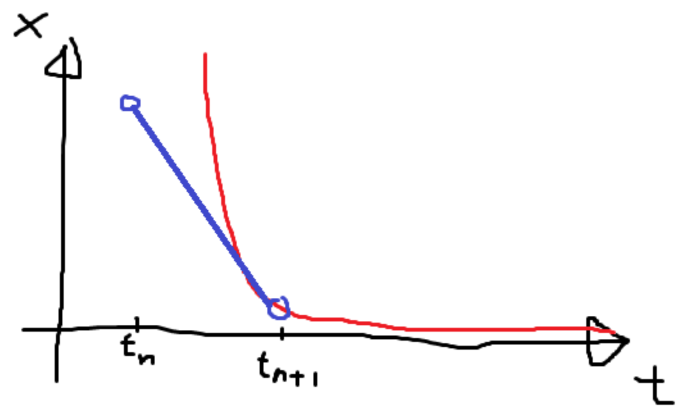
陰的Euler法

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_{n+1})$$

硬い方程式(stiff equation) = λ_{max} 大な方程式



陽解法は硬い方程式でX



陰解法は線形安定

アイディア

我々の手法(アイディア)

Implicit (陰解法) vs 比較用: Explicit (陽解法)

1段Gauss-Legendre法(2次)

$$k = f(x_n + (\Delta t/2)k),$$
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t k.$$

Heun法(2次)

$$k_1 = f(x_n),$$
$$k_2 = f(x_n + \Delta t k_1),$$
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t(k_1 + k_2)/2.$$

遅い? → 2つのポイント

① ***k*** について解く必要がある (*f* は"流体方程式")

→ **Fixed point 法**: 収束するまで逐次 *k* を代入し直す

(最初の *k* の guess として前ステップの *k* を再利用)

② 空間の領域によって収束の速さが著しく異なる

→ **早く収束した領域は逐次更新をスキップ**

※収束の速さは方程式の局所的な硬さに関係

収束判定 = 自動硬さ検出

数値精度&計算コストの検証

★比較:数値計算結果 vs 既知の解析解 ←定性的な確認

$\sim \Delta x \to 0, \Delta t \to 0$

今回の解析解 = **Riemann問題** / **Gubser flow**

↓今回は時間離散化に着目するのでこちらを定量的に調べる

★比較:数値計算結果 vs 小さな Δt の数値計算結果

$\sim \Delta x$ finite, $\Delta t \to 0$

"$\Delta t \to 0$ の収束の具合"

数値精度の指標

$$\Delta_{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{x}_j) = D(\epsilon_{\mathrm{num}}(\boldsymbol{x}_j), \epsilon_{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{x}_j)).$$

セル $\boldsymbol{x}_j$ 毎に求まる

→ max or 平均

$$D(e_1, e_2) = \frac{e_1 - e_2}{\max(|e_1|, |e_2|)}$$ 相対差

計算コストの指標

n_{KT} = (時間発展を通したセルあたりの時間微分評価回数の平均)

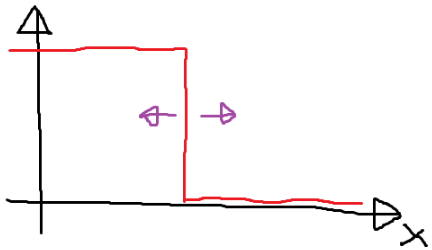
= (時間発展右辺評価回数) / (セル数)

解析解1: Riemann 問題

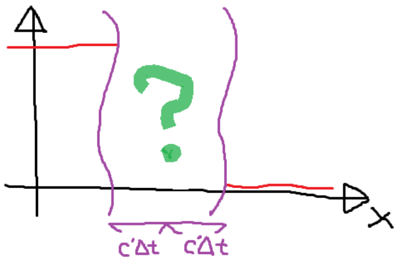
Lora-Clavijo, et al (2013)

= 一点で不連続な初期条件からの時間発展問題の総称 (衝撃波)

初期条件 (t = 0)

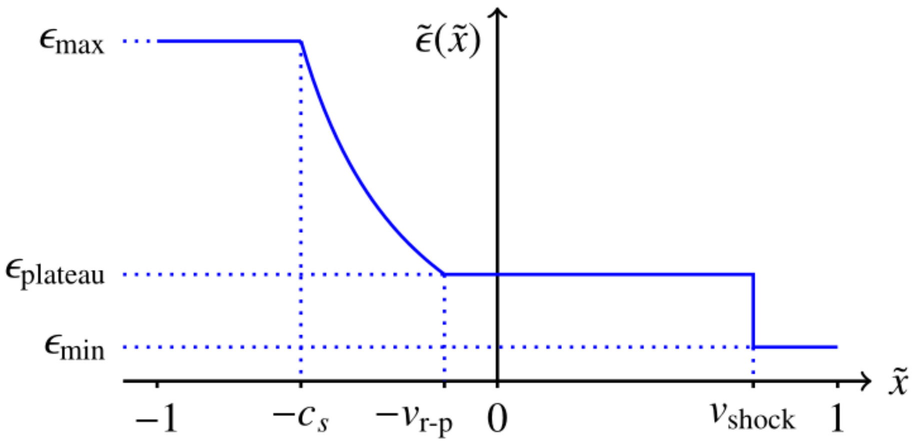


Δt 経過後?



方程式系、問題設定、近似などにより色々な種類あり

相対論的完全流体における解析解 (模式図) (状態方程式 $p=e/3$)



(解析的に式で書けるが省略)

縦軸 エネルギー密度

横軸 x ~ = x/t

※時間が立つと時刻に比例して横に広がっていく。

解析解2: Gubser flow

S. S. Gubser, PRD 82, 085027 (2010)

完全流体軸対称解: 座標 $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$, $\tau = \sqrt{(t^2-z^2)}$

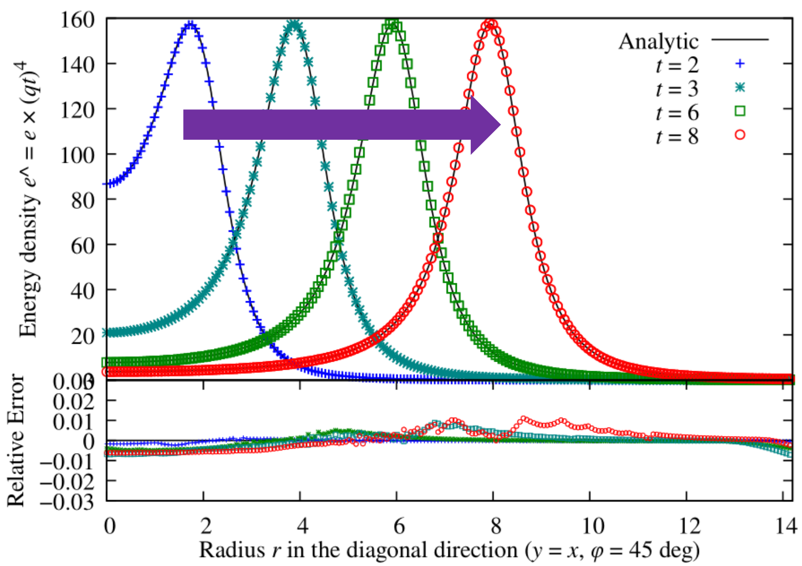
$$\epsilon(\tau, r) = \frac{\epsilon_0 (2q)^{8/3}}{\tau^{4/3}\left(1 + 2q^2(\tau^2 + r^2) + q^4(\tau^2 - r^2)^2\right)^{4/3}},$$

エネルギー密度

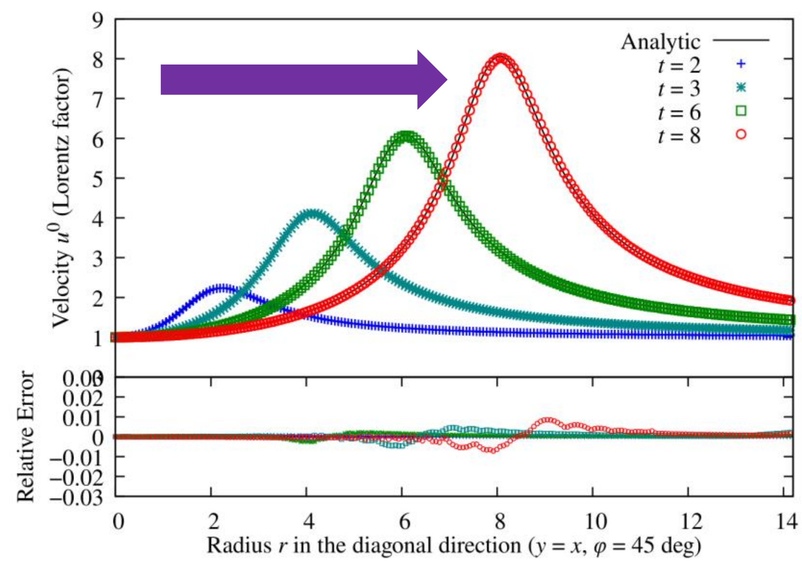
$$k(\tau, r) = \tanh^{-1}\frac{2q^2\tau r}{1 + q^2\tau^2 + q^2 r^2}$$

動径方向の flow rapidity
(u^0 = cosh k)

エネルギー密度 vs r の時間発展



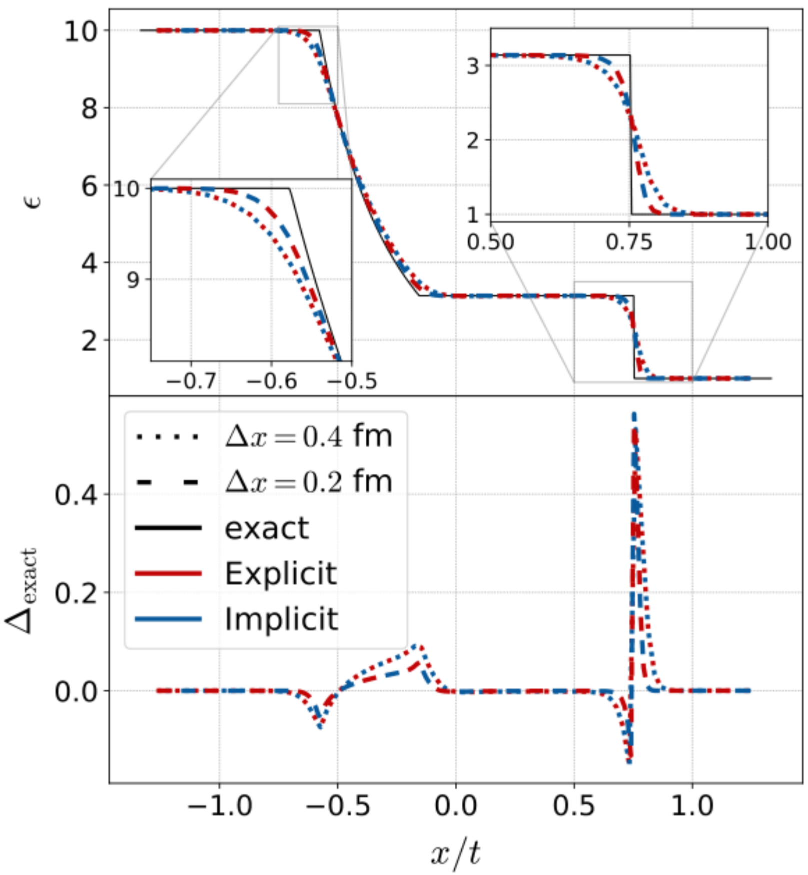
流速 u^0 (Lorentz factor) vs r の時間発展



結果

解析解1: Riemann 問題で比較

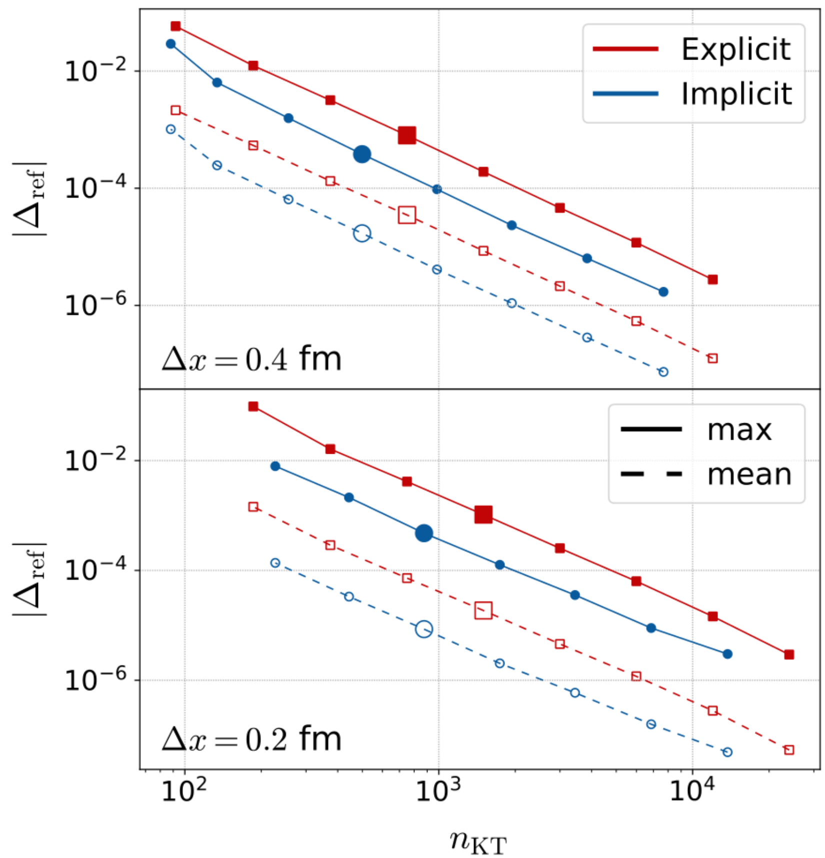
定性チェック(解析解と比較)



t = 15 fm

衝撃波・不連続点近くで誤差大

数値精度&計算コスト

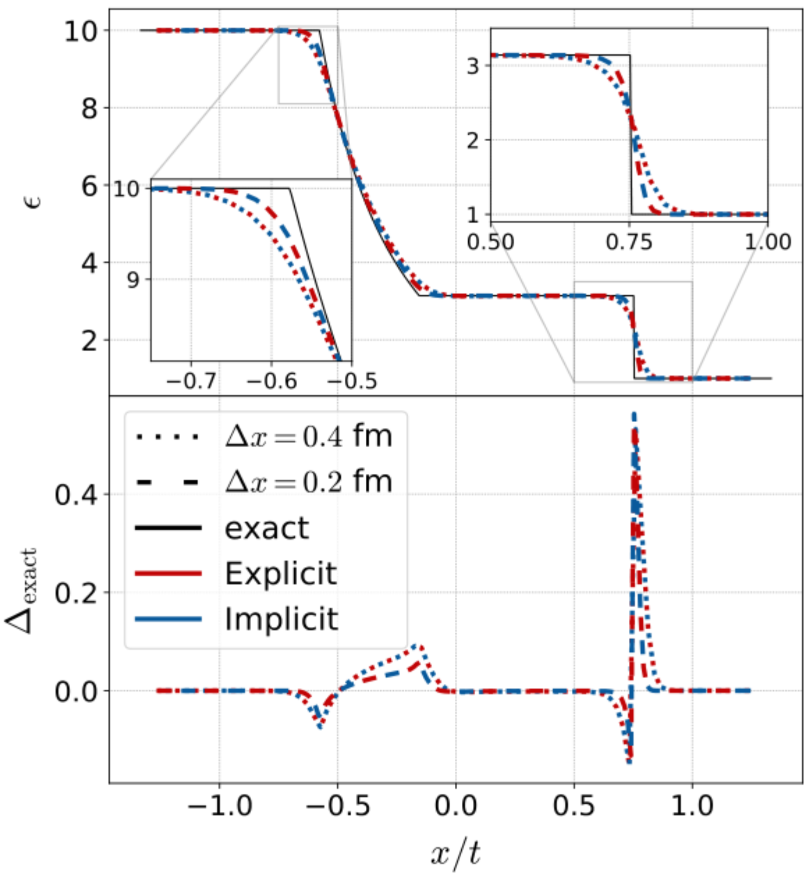


計算コスト →

←数値精度

解析解1: Riemann 問題で比較

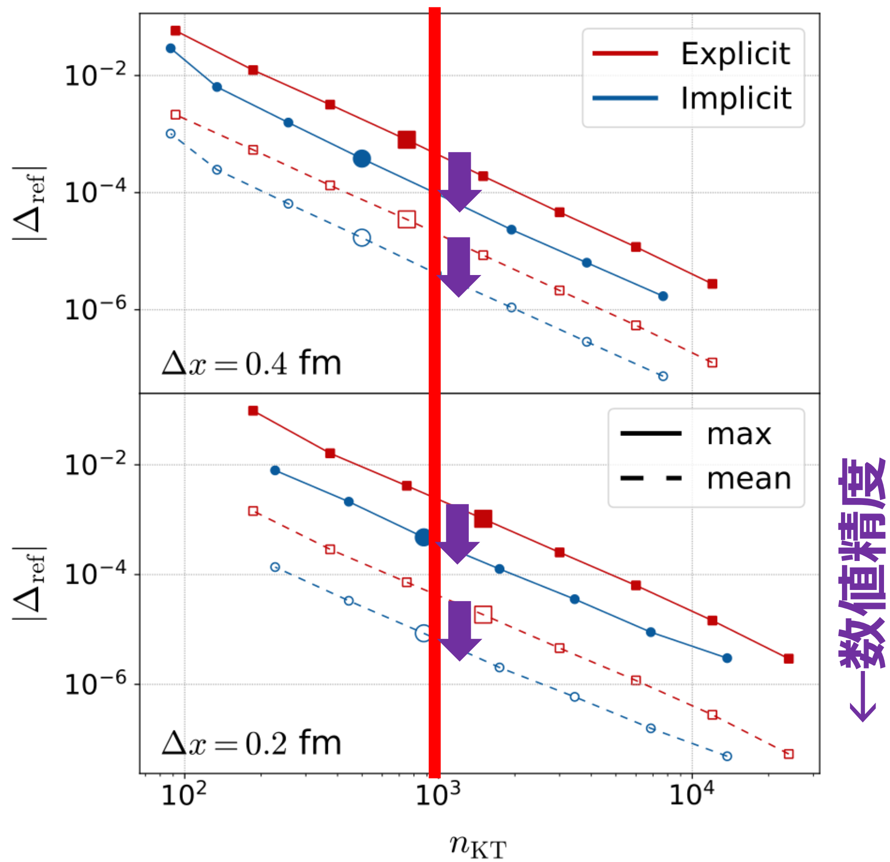
定性チェック(解析解と比較)



t = 15 fm

衝撃波・不連続点近くで誤差大

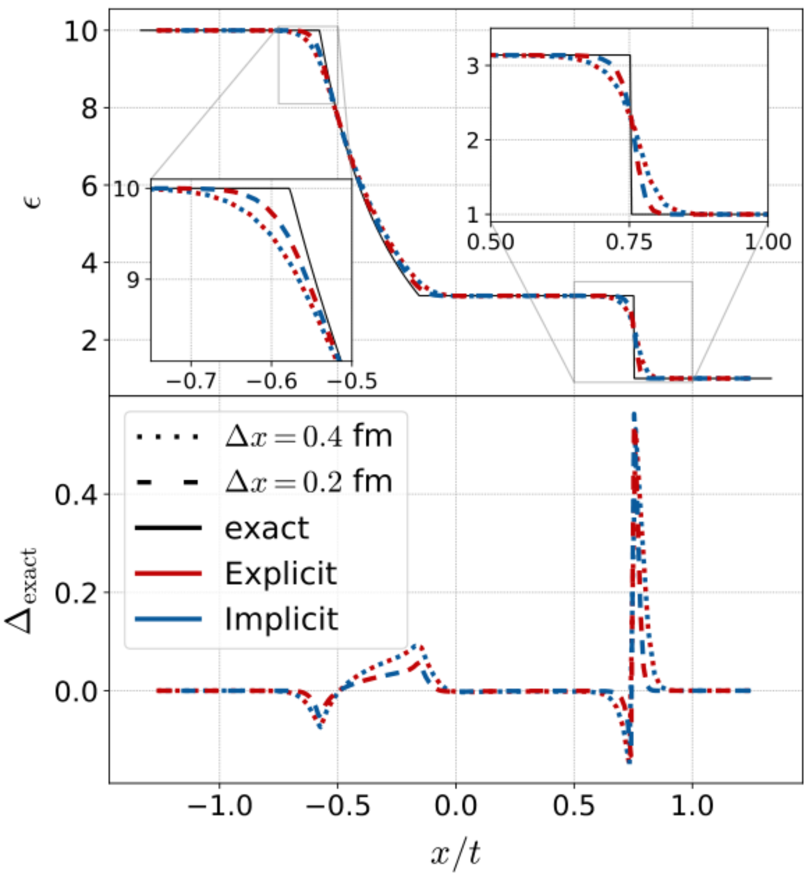
数値精度&計算コスト



計算コスト →

解析解1: Riemann 問題で比較

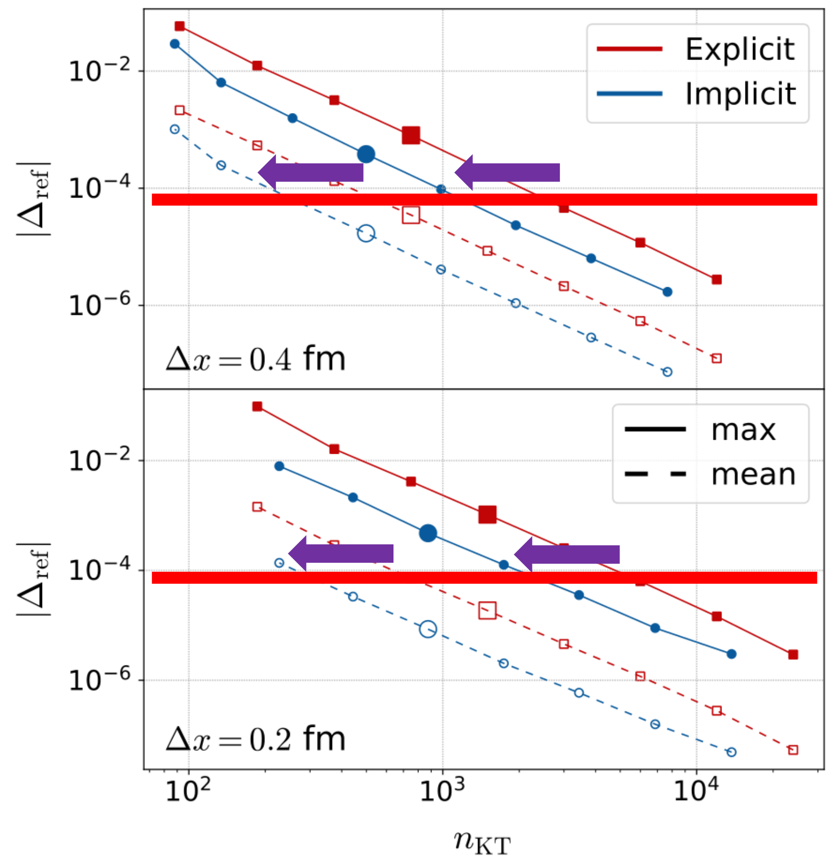
定性チェック(解析解と比較)



t = 15 fm

衝撃波・不連続点近くで誤差大

数値精度&計算コスト



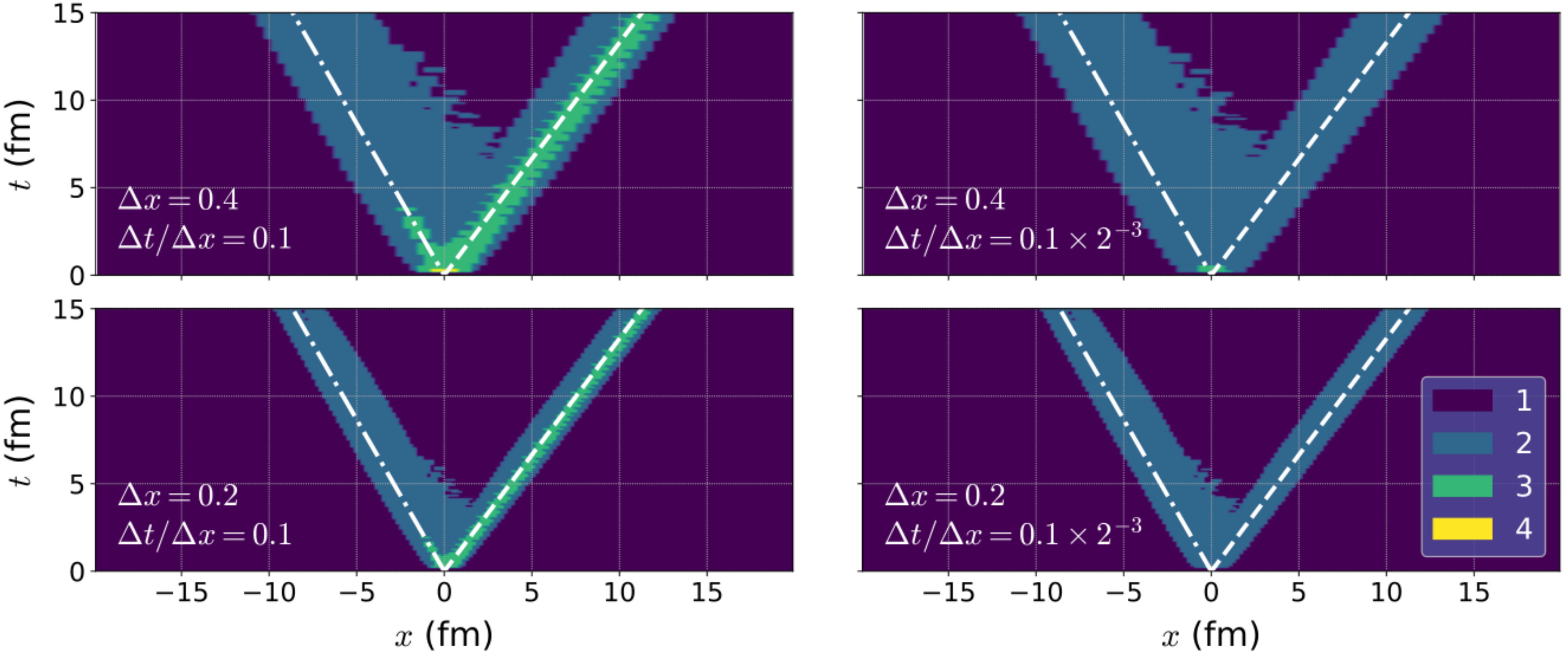
←数値精度

計算コスト →

★陰解法の方がより速く
正確に解くことができた(※)

解析解1: Riemann 問題で比較

Fixed point 法の繰り返し回数空間分布



①多くの場合、繰り返し回数 1 回で十分。
②局所的に硬い部分で繰り返し回数が多くなる。

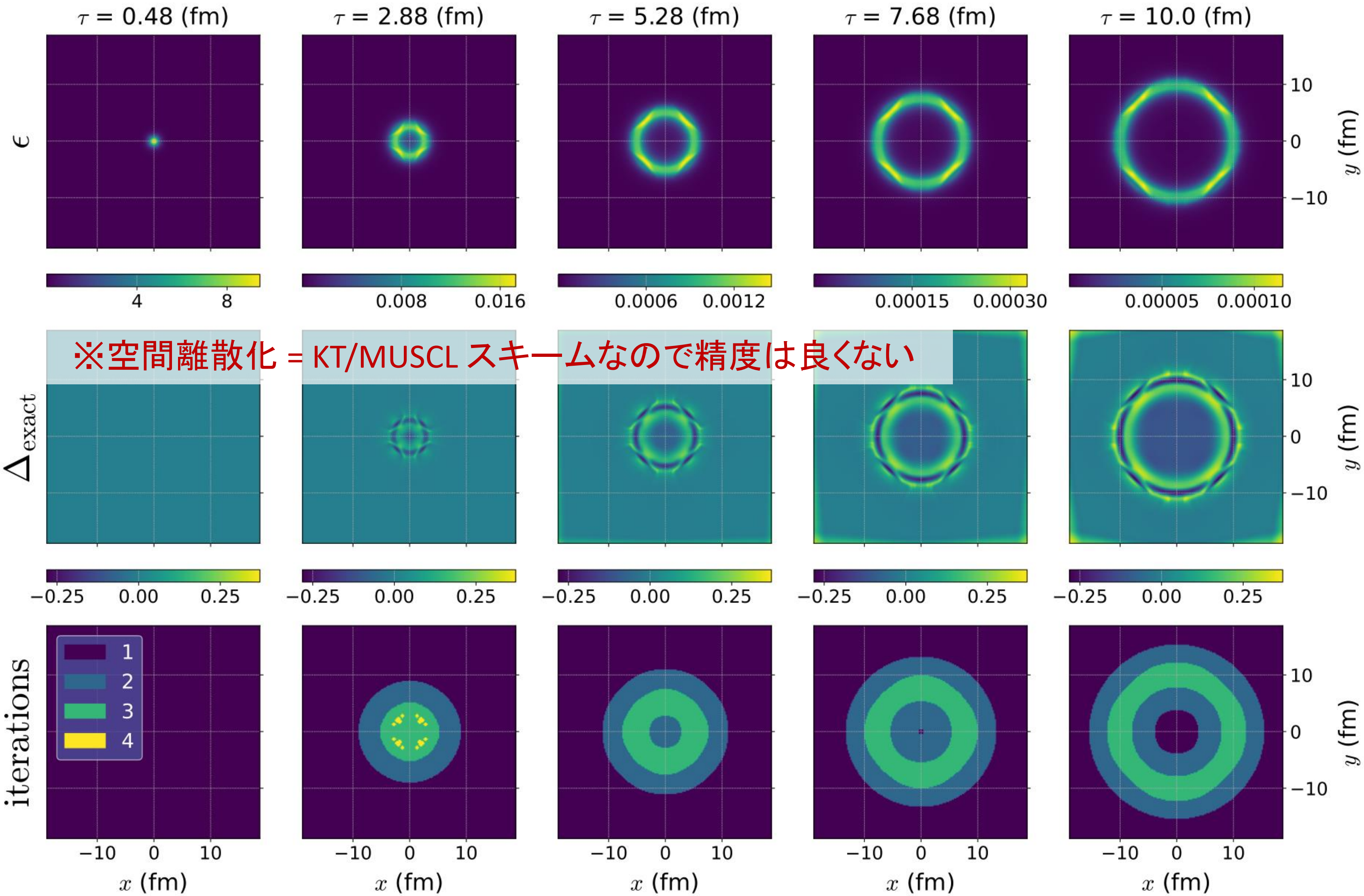
解析解2: Gubser flowで比較

***x*-*y*平面内** → 時間

エネルギー密度

厳密解との相対差

Fixed point 繰り返し回数

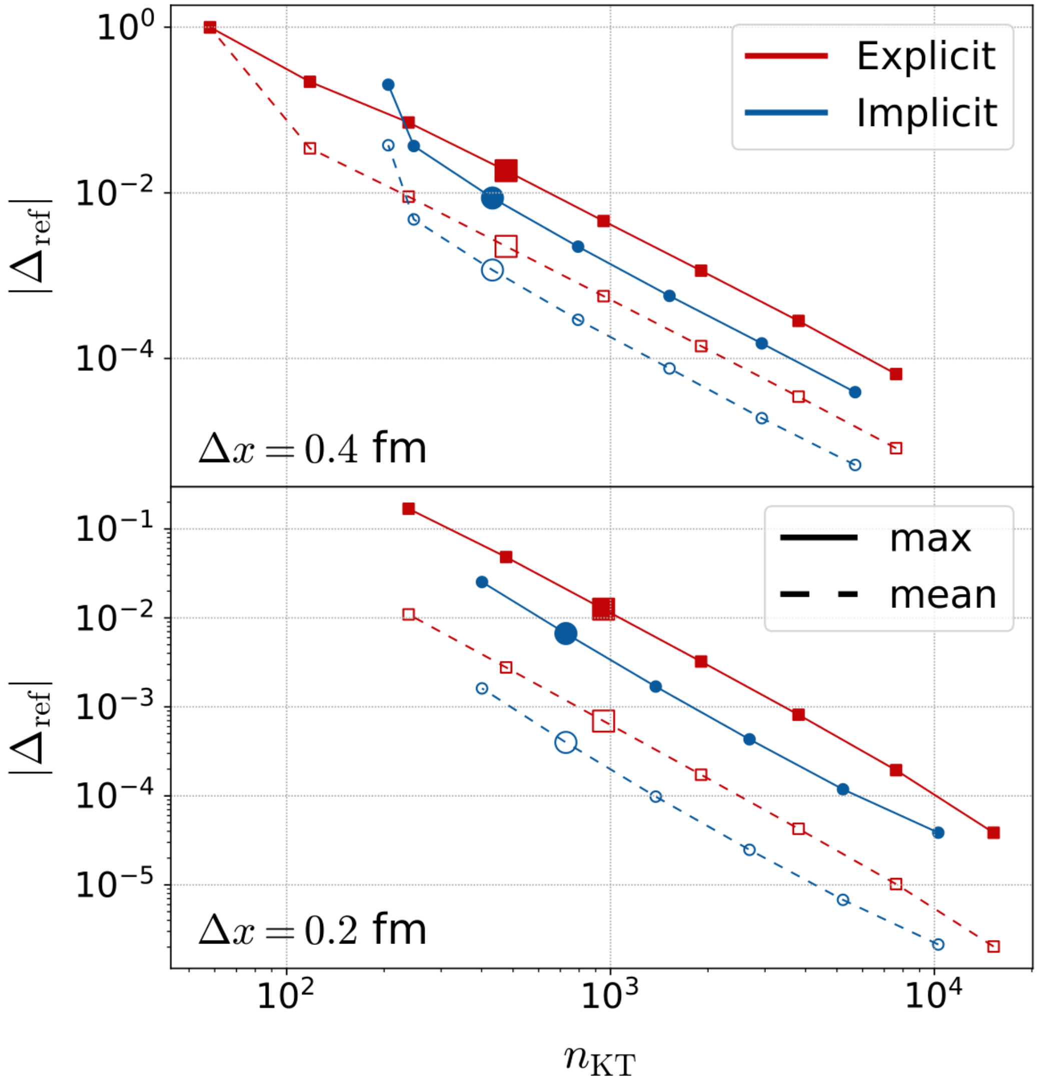


※空間離散化 = KT/MUSCL スキームなので精度は良くない

→ ほとんどの所: fixed point 繰り返し数は 1 or 2. 危ない所で 3-4 回

解析解2: Gubser flowで比較

Riemann問題のときと同様の結果



まとめ

まとめ

背景: 相対論的流体力学 in 高エネルギー重イオン衝突

- 安定・高効率・高精度な数値計算が重要

空間の離散化と時間の離散化

- 時間陰解法 = 線形安定

手法: 陰解法(2次Gauss-Legendre法)と陽解法(Heun法)を相対論的完全流体に対して実装・比較

- Fixed point 法 (初期guessに前ステップの値を利用)
- 自動局所硬さ検出 (局所的にfixed point収束を判定)

→陰解法が陽解法より高精度・高速

今後: 粘性流体・測定量の解析

BACKUP

方程式系のまとめ(粘性)

保存則

$$\bar{\partial}_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$
$$\bar{\partial}_\mu N_i^\mu = 0.$$

エネルギー運動量保存

電荷保存

$\bar{\partial}_\mu$ 共変微分

状態方程式

$$P = P(e,n)$$

構成方程式 (例)

$$\underline{\tau_\Pi \bar{\mathrm{D}}\Pi} + \sigma_\Pi \theta \Pi + \Pi = \underline{-\zeta\theta} + \xi_\Pi,$$
$$\underline{\tau_\pi \Delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \bar{\mathrm{D}}\pi^{\alpha\beta}} + \sigma_\pi \theta \pi^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} = \underline{2\eta\sigma^{\mu\nu}} + \xi_\pi^{\mu\nu},$$
$$\underline{\tau_{ij} \Delta^\mu{}_\alpha \bar{\mathrm{D}}\nu_j^\alpha} + \sigma_{ij}\theta\nu_j^\mu + \nu_i^\mu = \underline{\kappa_{ij} T \bar{\nabla}^\mu \frac{\mu_j}{T}} + \xi_i^\mu.$$

2次 緩和

Navier-Stokes

$$\mathrm{D} = u^\mu \partial_\mu,$$ 物質微分

$$\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu}\partial_\nu.$$ 空間微分

離散化と曲がった座標における保存則

保存則・拘束条件

経験上、既知の拘束条件･etc.を離散化誤差で
破ってしまうとすぐに計算が破綻する

→基本的に既知の拘束条件はすべて保つようにする

相対論的流体が満たすべき条件

1　保存則: 保存密度の空間積分が時間変化しない

2　$T^{00} \geq 0$　エネルギー密度は正

3　$T^{\mu}{}_{\nu}$　固有値 (内部エネルギー+主応力3つ) が正

4　$M_0^2 = g_{\mu\nu} T^{\mu 0} T^{\nu 0} \geq 0$　流体は時間的 (静止質量)

5　$\pi^{\mu\nu} u_\nu = 0, \;\; \nu_i^\mu u_\mu = 0$　散逸流は空間的

数値流体力学

離散化

連続の場は直接計算機で取り扱えないので有限自由度で表す。
空間を小さなマス目に分割してマス目上で場の値を定義。

保存スキーム

= 保存則に離散化誤差がないもの

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,\ \partial_\mu N^\mu = 0$$

→ 有限体積法 (FVM) を使うことが多い

※各セルの中の保存電荷の**総量**

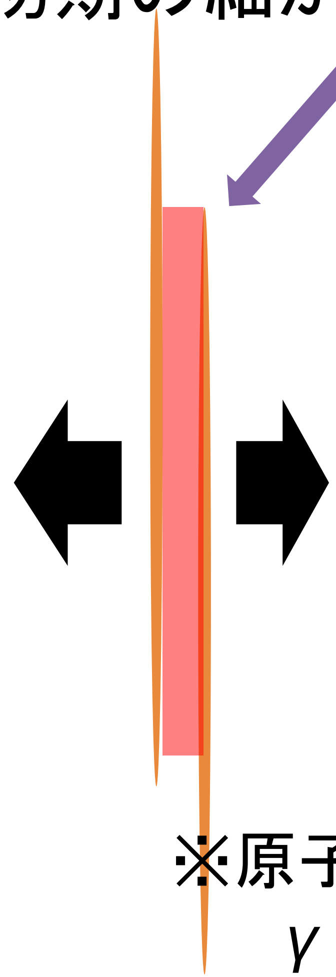
動的変数 = 保存量の分布

時間発展 = 保存量の移動

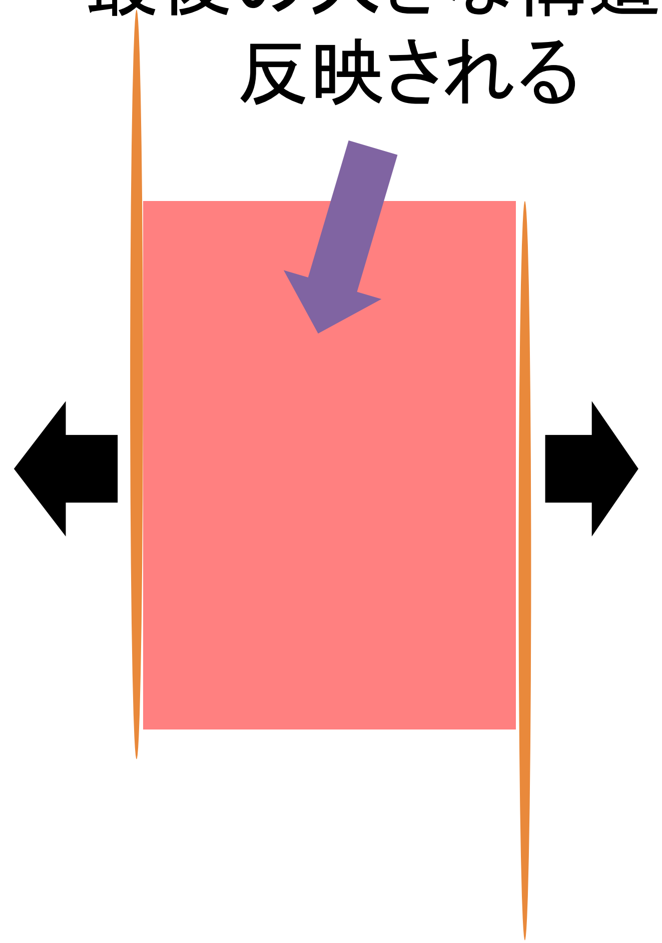
膨張座標系

高エネルギー原子核衝突反応における縦膨張

初期の細かい構造が



最後の大きな構造に
反映される



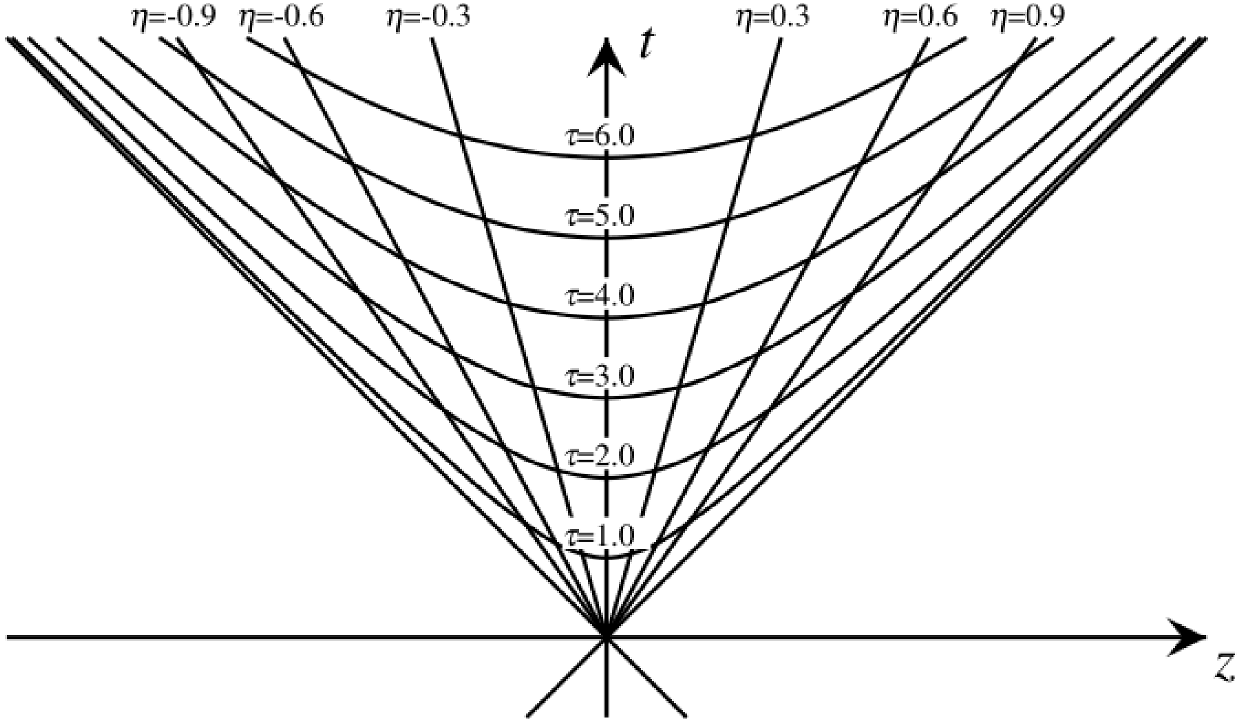
※原子核ローレンツ収縮
$\gamma \sim 2700\text{-}3700$

膨張座標系

*τ-η*座標系 (**R**^{1,1}Milne座標系⊕**R**^{2})

$$t = \tau \cosh \eta_s,$$
$$z = \tau \sinh \eta_s.$$

単なる膨張系ではなくこのように取る
物理的理由もあるが略



一般座標上の保存則

bar 添字 = Minkowski座標基底
bar なし添字 = 曲線座標の自然基底

Minkowski座標での保存則 (flatな時空)

$$\partial_{\bar{\alpha}} T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \qquad \partial_{\bar{\alpha}} N_i^{\bar{\alpha}} = 0.$$

divergence 型なのでFVMで厳密に保存させられる

任意の座標における保存則

$$0 = \bar{\partial}_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\underline{\sqrt{-g}}} \partial_\mu (\underline{\sqrt{-g}} T^{\mu\nu}) + \underline{\Gamma^\nu{}_{\xi\mu} T^{\mu\xi}},$$

$$0 = \bar{\partial}_\mu N_i^\mu = \frac{1}{\underline{\sqrt{-g}}} \partial_\mu (\underline{\sqrt{-g}} N_i^\mu),$$

変な形!!

テンソル基底の変化分だけおつりの項が出てくる。
(縮約を取っている添字については
ヤコビアン √(-g) に吸収させられる)

一般座標上の保存則

テンソル密度 (一般の座標変換性を考慮した共変量)

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu}(x) \equiv \sqrt{-g}T^{\mu\nu} \text{ and } \mathfrak{N}_i^{\mu}(x) \equiv \sqrt{-g}N_i^{\mu}$$

$$\partial_\mu \mathfrak{N}_i^\mu = 0.$$ → FVM OK!

$$\partial_\mu \mathfrak{T}^{\mu\nu} + \Gamma^\nu{}_{\xi\mu}\mathfrak{T}^{\mu\xi} = 0,$$ → ???

何がいけないのか?

一般座標上の保存則

保存するエネルギー運動量

そもそもの保存量はMinkowski座標での並進対称性に
由来するエネルギー運動量

$$\mathcal{P}^{\bar{\alpha}} = \int d^3x \mathcal{T}^{0\bar{\alpha}}$$

Minkowski座標系での保存量密度の各成分について、
一般座標系での保存流を考える

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\bar{\alpha}} = 0. \qquad \text{OK?}$$

× 原子核衝突の対称性 (現象のBoost invariance) を破る

× 計算格子の端の方で $\gamma \sim 3000$ の分だけ保存量が
無駄に大きくなり誤差が蓄積する

一般座標上の有限体積法

作戦

$$\partial_\mu \mathfrak{T}^{\mu\bar{\alpha}} = 0.$$

(1) この段階で離散化をしてから、
(2) その後で一般座標のテンソル密度で書き表し直す

$$\mathfrak{T}^{0\bar{\alpha}}(x+\hat{0}/2) = \mathfrak{T}^{0\bar{\alpha}}(x-\hat{0}/2) - \sum_i \frac{\Delta x^0}{\Delta x^i}[\mathfrak{T}^{i\bar{\alpha}}(x+\hat{i}/2) - \mathfrak{T}^{i\bar{\alpha}}(x-\hat{i}/2)].$$

一般座標の上での保存するFVMの公式

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^{0\mu}(x+\hat{0}/2) = &\ \underline{g^\mu{}_\nu(x+\hat{0}/2;x)}[\underline{g^\nu{}_\xi(x;x-\hat{0}/2)}\mathfrak{T}^{0\xi}(x-\hat{0}/2)\\ &-\frac{1}{\Delta V}\sum_i \Delta x^0 \Delta S_i(\underline{g^\nu{}_\xi(x;x+\hat{i}/2)}\mathfrak{T}^{i\xi}(x+\hat{i}/2) - \underline{g^\nu{}_\xi(x;x-\hat{i}/2)}\mathfrak{T}^{i\xi}(x-\hat{i}/2))],\end{aligned}$$

$$g^\mu{}_\nu(x;y) \equiv g^\mu{}_{\bar{\alpha}}(x) g^{\bar{\alpha}}{}_\nu(y)$$

y→x のベクトルの平行移動

時空が歪んでいる場合にも自然に適用可能

一般座標上の有限体積法

一般座標の上での保存するFVMの公式

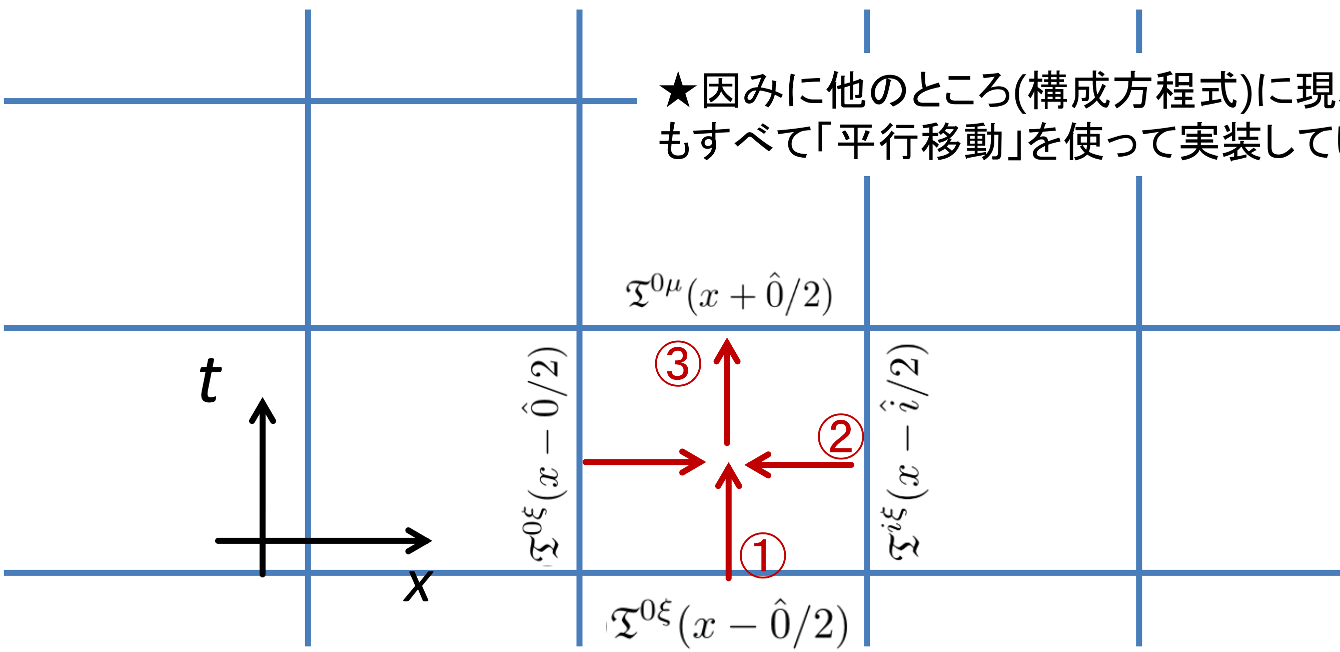
$$
\mathfrak{T}^{0\mu}(x+\hat{0}/2) = \underbrace{g^{\mu}{}_{\nu}(x+\hat{0}/2;x)}_{③}[\underbrace{g^{\nu}{}_{\xi}(x;x-\hat{0}/2)}_{①}\mathfrak{T}^{0\xi}(x-\hat{0}/2)
$$
$$
-\frac{1}{\Delta V}\sum_i \Delta x^0 \Delta S_i(\underbrace{g^{\nu}{}_{\xi}(x;x+\hat{\imath}/2)}\mathfrak{T}^{i\xi}(x+\hat{\imath}/2) - \underbrace{g^{\nu}{}_{\xi}(x;x-\hat{\imath}/2)}_{②}\mathfrak{T}^{i\xi}(x-\hat{\imath}/2))],
$$

$$
g^{\mu}{}_{\nu}(x;y) \equiv g^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}(x)\, g^{\bar{\alpha}}{}_{\nu}(y)
$$

y→*x* のベクトルの平行移動

時空が歪んでいる場合にも自然に適用可能

★因みに他のところ(構成方程式)に現れる共変微分もすべて「平行移動」を使って実装している



散逸流の直交性

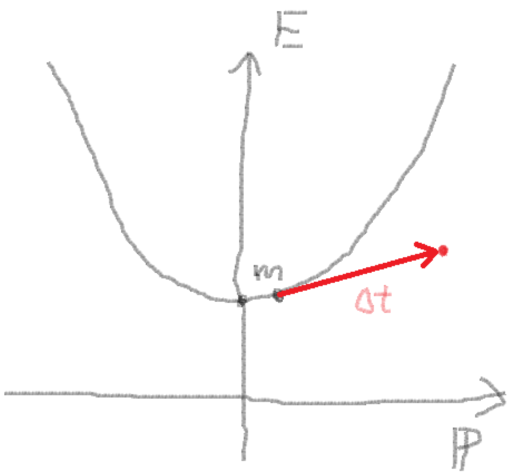
散逸流と流速の直交性

$$\pi^{\mu\nu}u_\nu = 0, \qquad \nu_i^\mu u_\mu = 0$$ 拘束条件

微分形の方程式はもちろんこれを保持する。
しかし時間方向に離散化すると崩れてしまう。

もっと簡単な例: 相対論的粒子の運動

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma F^\mu \qquad p^2 = m^2$$ 拘束条件



Euler 法で有限の時間幅だけ
進むと確実に曲面の外に出てしまう

(A) はみ出た後に射影する作戦。
射影 = 一番近い点に移す
→ どうやって"距離"を定義する?

(B) 初めから曲面上のパラメータについての運動方程式を考える

散逸流の表現

局所静止系で見ると

$$u^I = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \pi^{\mu\nu} u_\nu = 0, \qquad \nu_i^\mu u_\mu = 0$$

$$\nu_i^I = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\boldsymbol{\nu}}_i \end{pmatrix} \qquad \pi^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\pi} \end{pmatrix}$$

局所静止系(ガリレイ系)のテンソル基底で表現すれば良い!
※局所静止系の基底をとると言っても
局所静止系におけるSO(3)回転の自由度は残っている

局所静止系の基底の構成

①座標の自然基底を正規直交化

$$e^{\mu}{}_{\tilde{a}} = \mathrm{diag}(1, 1/\tau, 1, 1),$$
$$e^{\tilde{a}}{}_{\mu} = \mathrm{diag}(1, \tau, 1, 1).$$

②流速の方向にBoost (回転せずに一回のBoostで移る)

$$e^{I}{}_{\tilde{a}} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^0 & -\tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \\ -\tilde{\boldsymbol{u}} & 1 + \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}}{1+\tilde{u}^0} \end{pmatrix},$$
$$e^{\tilde{a}}{}_{I} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^0 & \tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \\ \tilde{\boldsymbol{u}} & 1 + \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}}{1+\tilde{u}^0} \end{pmatrix},$$

接続の計算

変なテンソル基底を取っているので共変微分が滅茶苦茶になる。

→接続係数を計算する。

$$\Gamma^{\tilde{a}}{}_{\tilde{b}\tilde{c}} = e^{\tilde{a}}{}_{\mu}\partial_{\tilde{c}}e^{\mu}{}_{\tilde{b}} + e^{\tilde{a}}{}_{\mu}e^{\nu}{}_{\tilde{b}}e^{\xi}{}_{\tilde{c}}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\xi},$$

$$\Gamma^{\tilde{a}}{}_{\tilde{b}\tilde{c}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{\tilde{c}} \\ \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{\tilde{c}} & (\tilde{\Omega}_{\tilde{c}})_{[ij]} \end{pmatrix}\right]^{\tilde{a}}{}_{\tilde{b}}$$

$$\Gamma^{I}{}_{JK} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\mathbf{\Gamma}}^{\mathrm{T}}_{K} \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{K} & \hat{\Omega}_{K} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_K \equiv -\frac{\partial_K \tilde{u}^0 + \tilde{\mathbf{\Gamma}}_K \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}}{1+\tilde{u}^0}\tilde{\boldsymbol{u}} + \partial_K \tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{u}^0 \tilde{\mathbf{\Gamma}}_K + \tilde{\Omega}_K \tilde{\boldsymbol{u}},$$

$$\hat{\Omega}_K \equiv \tilde{\Omega}_K + \left(\frac{\partial_K \tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{\Omega}_K \tilde{\boldsymbol{u}}}{1+u^0} + \tilde{\mathbf{\Gamma}}_K\right)\tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} - \tilde{\boldsymbol{u}}\left(\frac{\partial_K \tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{\Omega}_K \tilde{\boldsymbol{u}}}{1+u^0} + \tilde{\mathbf{\Gamma}}_K\right)^{\mathrm{T}}$$

構成方程式

構成方程式の本質的構造

$$\Delta^{I}{}_{K}\bar{\mathrm{D}}\nu_i^{K} = Y_i{}^{J},$$
$$\Delta^{IJ}{}_{KL}\bar{\mathrm{D}}\pi^{KL} = Y^{IJ},$$

$$\mathrm{D}\pi^{KL} = -\hat{\Omega}^{I}{}_{Ku}\pi^{KJ} - \hat{\Omega}^{J}{}_{Lu}\pi^{IL} + Y^{IJ},$$
$$\mathrm{D}\nu_i^{K} = -\hat{\Omega}^{I}{}_{Ju}\nu_i^{J} + Y_i{}^{J}.$$

$$\hat{\Omega}^{I}{}_{Ju} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & -a^2 \\ 0 & -a^2 & 0 & a^1 \\ 0 & a^3 & -a^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a} \equiv \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_u^{*} + \left(\frac{\mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_u^{*} \times \tilde{\boldsymbol{u}}}{1 + \tilde{u}^0} + \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_u \right) \times \tilde{\boldsymbol{u}}$$

回転速度 *a* に伴うコリオリ力的な力

高エネルギー重イオン衝突実験

目的

- QGP などのQCD物質の平衡の性質
  - 状態方程式、粘性・拡散係数などの輸送係数
  - 臨界点、一次相転移、…
- ジェット(高エネルギー粒子)
  - エネルギー損失の仕方
- ハドロンの性質
  - ハドロン間相互作用、物質中での性質の変化
- …
- 衝突反応自体のダイナミクスの理解
  - 初期状態
  - ハドロン化

Xe+Xe衝突 (5.44 TeV) の様子 (3D)

研究: 原子核の変形の効果と熱ゆらぎ

各設定4000事象の計算
- 変形/球形 Xe+Xe
- 流体ゆらぎあり/なし

アニメーションは変形&流体ゆらぎあり