

---

# 回転する行列量子力学の相転移と black holeやQCDとの関係

---

熱場の量子論とその応用

2023年8月30日

Takeshi Morita (Shizuoka University)

Based on

T. Azuma (Setsunan), TM and H. Yoshida (Shizuoka) PTEP 2023

TM and H. Yoshida (Shizuoka) PRD 2020

# Introduction

Large-N 行列量子力学

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

string theory  
BH熱力学



large-N reduction  
dimensional reduction

$$A^I(x) \rightarrow X^I$$



D+1次元 pure YM

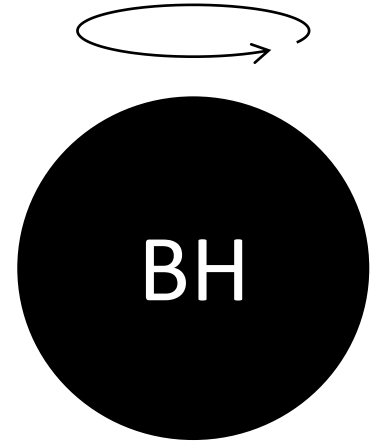
$$S = \frac{N}{4\lambda} \int_0^\beta dt \int d^D x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2.$$

# Introduction

## Large-N 行列量子力学

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

string theory  
BH熱力学

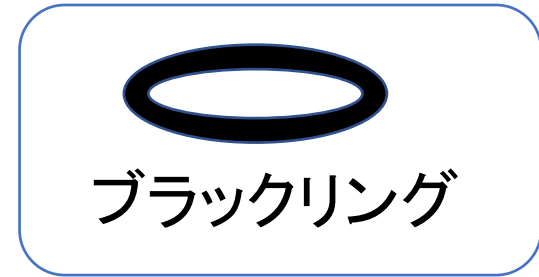


large-N reduction  
dimensional reduction

$$A^I(x) \rightarrow X^I$$



- ・角速度 → 符号問題
- ・虚数角速度 → 符号問題なし



## D+1次元 pure YM

$$S = \frac{N}{4\lambda} \int_0^\beta dt \int d^D x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2.$$

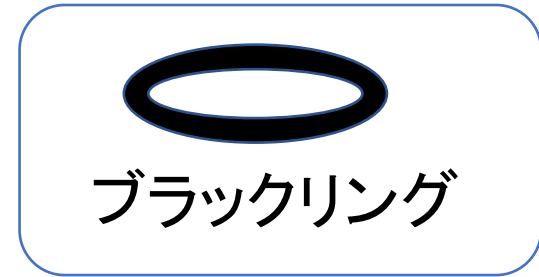
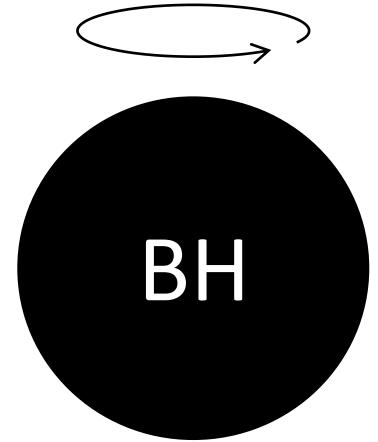
- 非自明なtopology
- No hair theorem
- dynamical相転移と裸の特異点

# Introduction

## Large-N 行列量子力学

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

string theory  
BH熱力学



- ・角速度 → 符号問題
- ・虚数角速度 → 符号問題なし

large-N reduction  
dimensional reduction

$$A^I(x) \rightarrow X^I$$

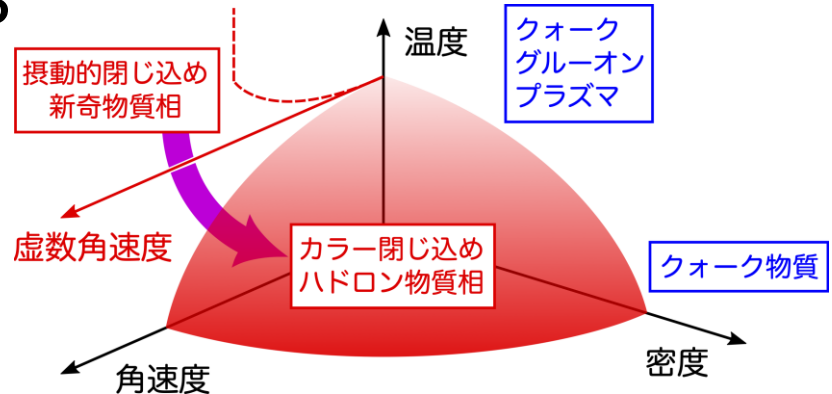


## D+1次元 pure YM

$$S = \frac{N}{4\lambda} \int_0^\beta dt \int d^D x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2.$$

D=3

Chen-Fukushima-Shimada PRL (2022)

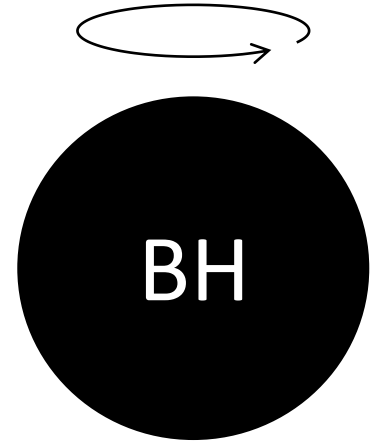


# Introduction

## Large-N 行列量子力学

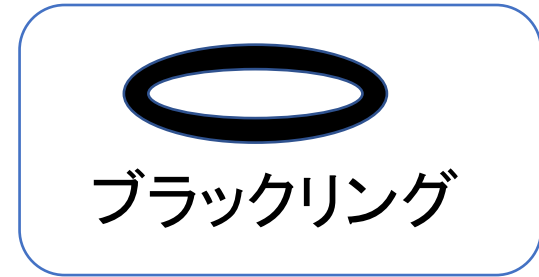
$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

string theory  
BH熱力学



やったこと

- 相構造(有限温度+角速度) by CLM, GE(近似計算)  
→ 回転量子多体系で第一原理計算(CLM)に成功  
(ブラックリングみたいなものはまだ未発見)
- 相構造(有限温度+虚数角速度) by GE(近似計算)
- 負の比熱状態の解析 by GE(近似計算)

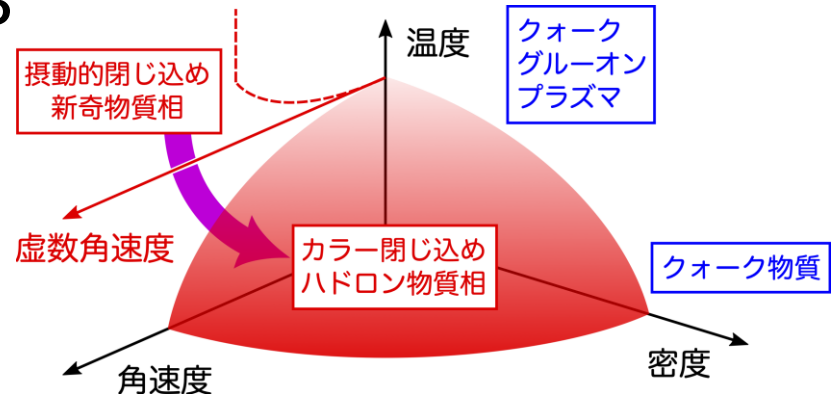


## D+1次元 pure YM

$$S = \frac{N}{4\lambda} \int_0^\beta dt \int d^D x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2.$$

D=3

Chen-Fukushima-Shimada PRL (2022)

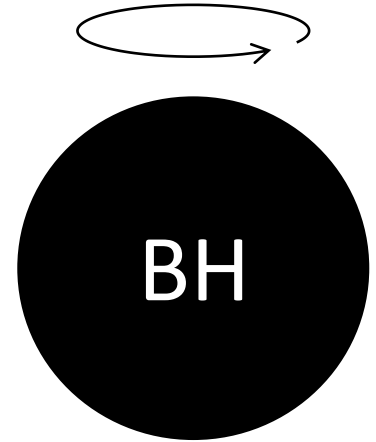


# Introduction

## Large-N 行列量子力学

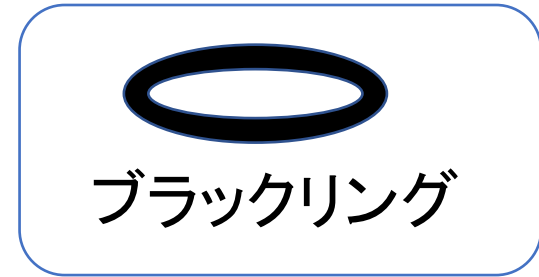
$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

string theory  
BH熱力学



やったこと

- 相構造(有限温度+角速度) by CLM, GE(近似計算) **Sec.3**  
→ 回転量子多体系で第一原理計算(CLM)に成功  
(ブラックリングみたいなものはまだ未発見)
- 相構造(有限温度+虚数角速度) by GE(近似計算) **Sec.4**
- 負の比熱状態の解析 by GE(近似計算) **Sec.2**

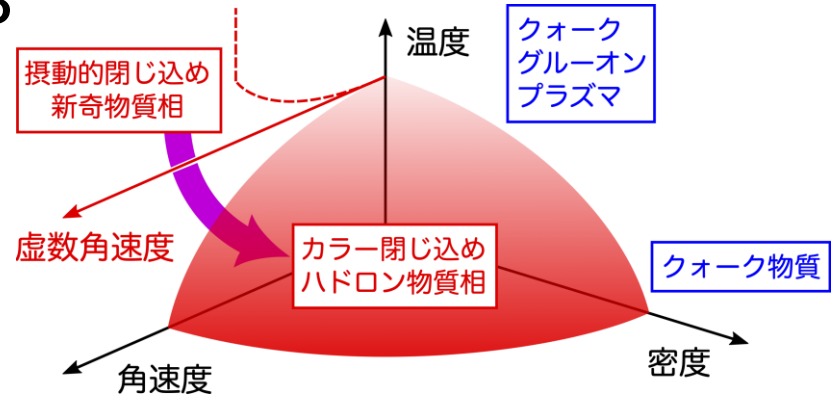


## D+1次元 pure YM

$$S = \frac{N}{4\lambda} \int_0^\beta dt \int d^D x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2.$$

D=3

Chen-Fukushima-Shimada PRL (2022)



## Sec. 2 Large-N 行列量子力学の熱力学 (No rotation)

Large-N 行列量子力学

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

string theory  
BH熱力学



4次元 Schwarzschild BHの温度  
M → 大で T → 小: 負の比熱

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k G M}$$

# Sec. 2 Large-N 行列量子力学の熱力学 (No rotation)

## ◆ Model

$$A^I(x) \rightarrow X^I(t)$$

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}. \longleftarrow S = \frac{N}{4\lambda} \int d^{D+1}x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2.$$

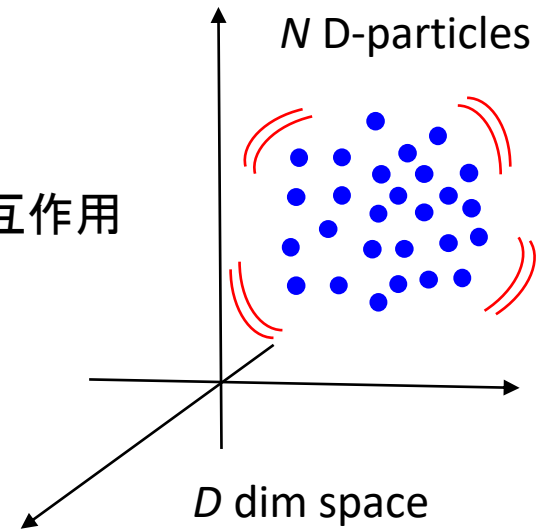
$$\begin{cases} X_{ij}^I : I = 1, \dots, D, i, j = 1, \dots, N & N \times N \text{ hermit matrix} \\ D_t X = \partial_t X - [A_t, X] \end{cases}$$

A toy model of N D-particles

$$X^I = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

粒子間の引力相互作用

N 個のD-particleの位置



有限温度でBHのように見える。



# Sec. 2 Large-N 行列量子力学の熱力学 (No rotation)

## ◆ Analysis of the model

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}. \quad X_{ij}^I : I = 1, \dots, D$$

Strong coupling  $\rightarrow$  non-perturbative analysis

- Monte Carlo(MC) [Aharony et al \(2002\)](#), [Kawahara-Nishimura-Takeuchi\(2006\)](#),  $\dots$
- Minimum sensitivity/Gaussian expansion (GE)  
[Kabat-Lifschytz\(2000\)](#), [Morita-Yoshida\(2020\)](#), [Brahma-Brandenberger-Laliberte\(2022\)](#)

GE

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} (D_t X^I)^2}_{S_0} - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\} + \underbrace{\left( \frac{1}{2} M^2 (X^I)^2 - \frac{1}{2} M^2 (X^I)^2 \right)}_{S_{\text{int}}}$$

$$F = \underbrace{F_{\text{tree}} + F_{1\text{-loop}} + F_{2\text{-loop}}}_{:= F_2(M)} + F_{3\text{-loop}} + \dots$$

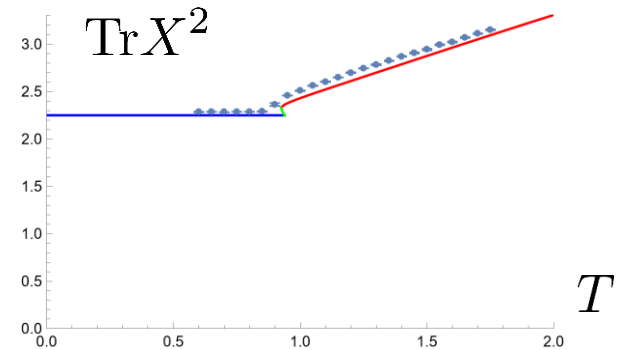
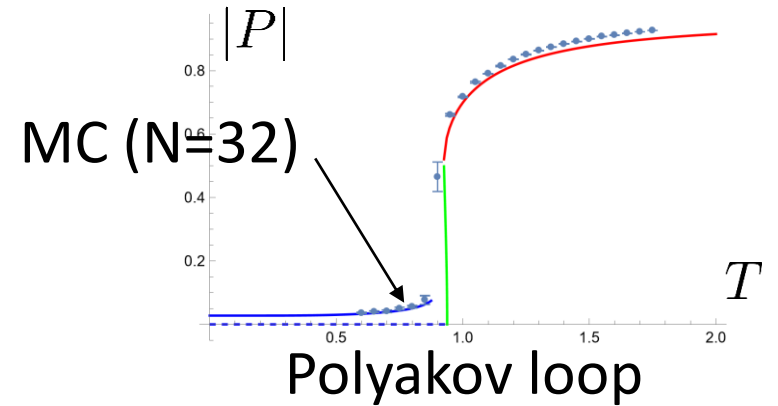
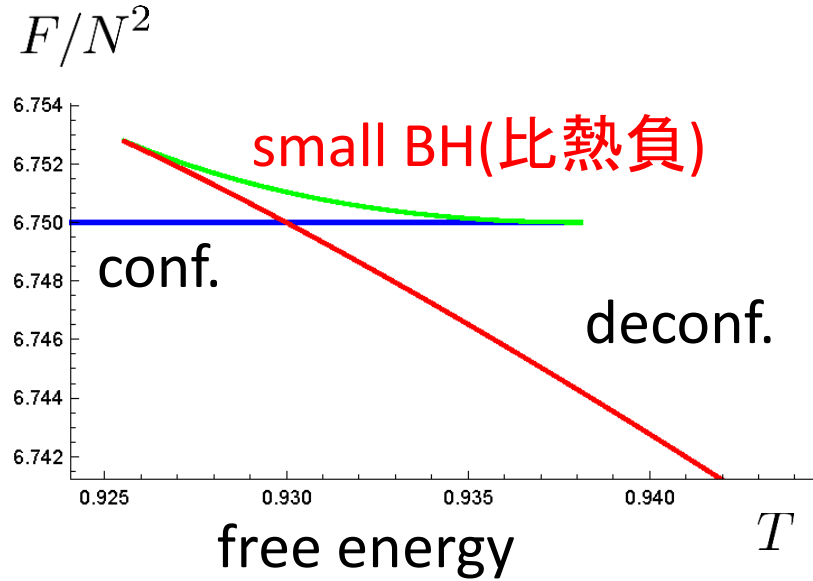
$\partial_M F_2 = 0 \rightarrow$  Fix the trial mass  $M$

# Sec. 2 Large-N 行列量子力学の熱力学 (No rotation)

Azuma-Morita-Yoshida (2023)

## ◆ GE vs MC (MCはCLMでない)

GE (2-loop)の結果 (large-N, D=9)



$$\left( \frac{\partial E}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad \text{比熱負} \rightarrow F \text{が下に凸} \right)$$

- GEとMCは良い一致 (誤差数%)
- 閉じ込め・非閉じ込め相転移が起こる.
- BHでも類似の相転移が知られている.

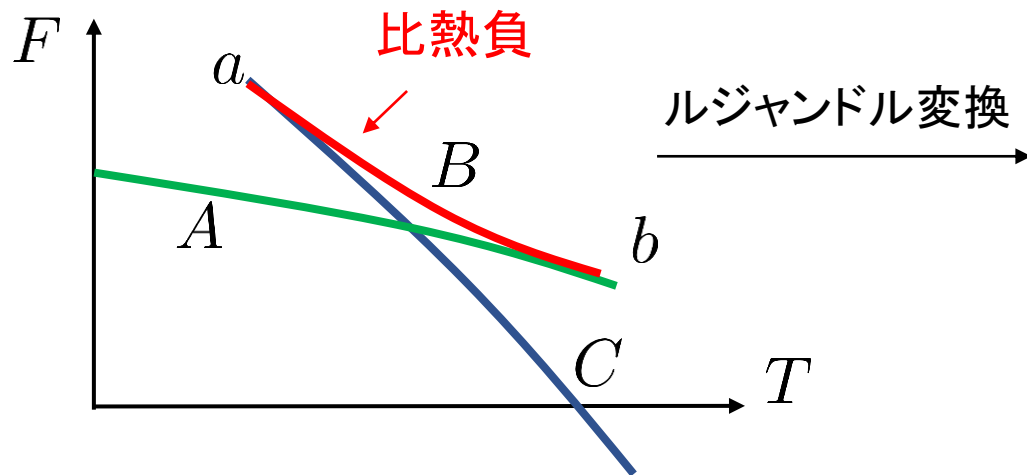
Aharony et al (2002)

# Sec. 2 Large-N 行列量子力学の熱力学 (No rotation)

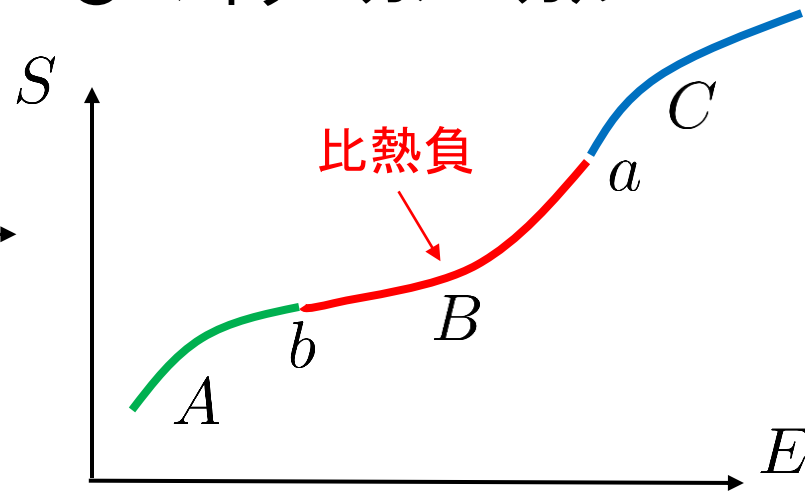
Azuma-Morita-Yoshida (2023)

## ◆ Small BHと負の比熱

### ○ カノニカルアンサンブル



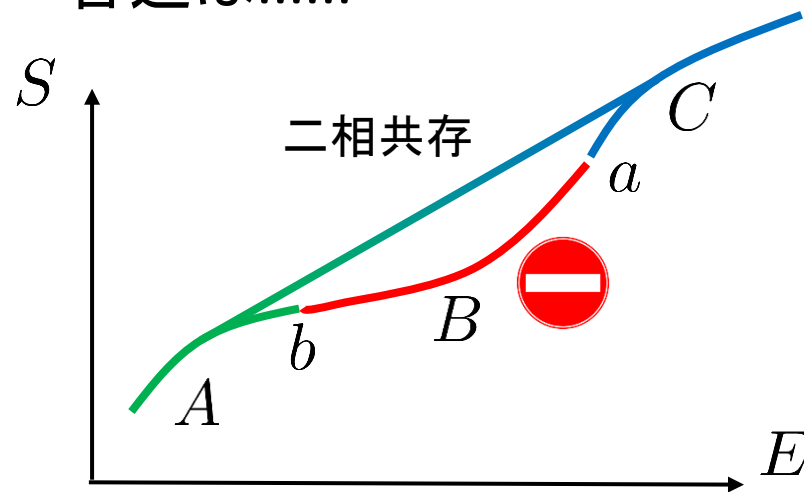
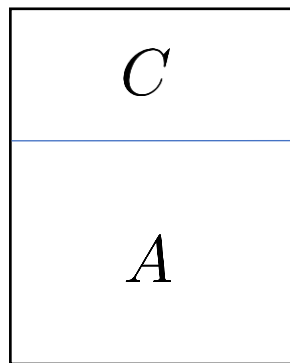
### ○ マイクロカノニカル



一次相転移系

普通は.....

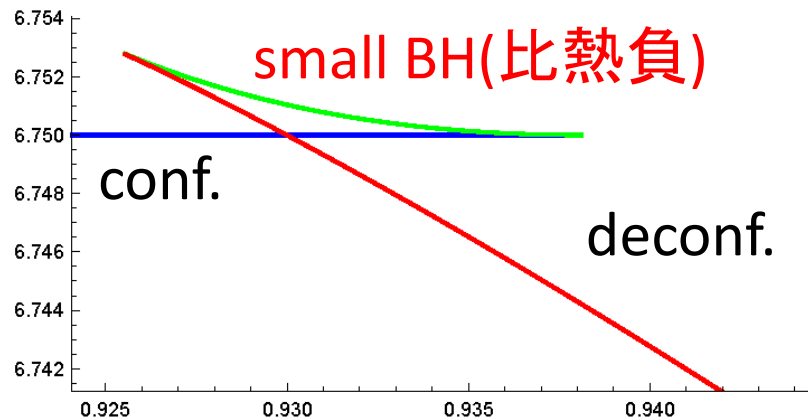
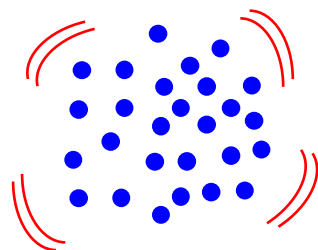
二相共存状態が実現し、  
比熱が負の状態は実現しない。



行列量子力学の場合 → 「遠距離力」で引きつけ合う。

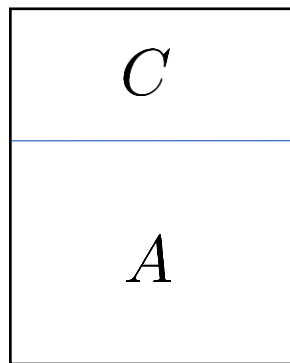
- 二相に分離できない
- 負の比熱が**マイクロカノニカル**で実現すると考えられている。  
(重力でも同様に負比熱のBH存在)

$N$  D-particles

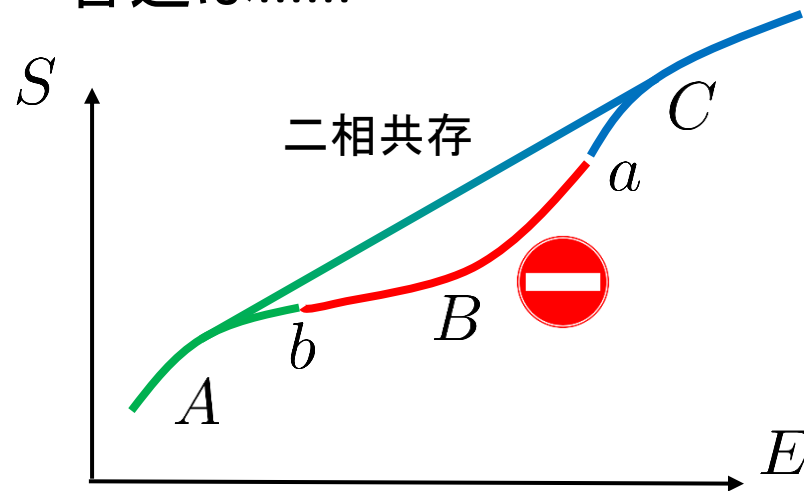


### 一次相転移系

二相共存状態が実現し、  
比熱が負の状態は実現しない。



普通は.....



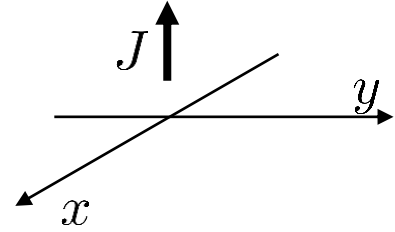
## Sec. 3 回轉行列量子力学の相轉移

## ◆ 回転系における符号問題

ex) 2dim QM

Euclidean action for (grand-)canonical ensemble

$$S = \int_0^\beta dt \dot{z}\dot{\bar{z}} + V(z, \bar{z}) \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$$



↓  $H - \mu J$       $\mu$ : 角運動量化学ポテンシャル (角速度)

$$J = xp_y - yp_x$$

$$S = \int_0^\beta dt \underline{(\dot{z} - \mu\bar{z})(\dot{\bar{z}} + \mu z)} + V(z, \bar{z})$$

$S \neq S^* \rightarrow$  符号問題

回転系では、普通のMCが使えない。

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}. \quad \mu_I: \text{chemical potential for angular momentum on } I\text{-th plane}$$

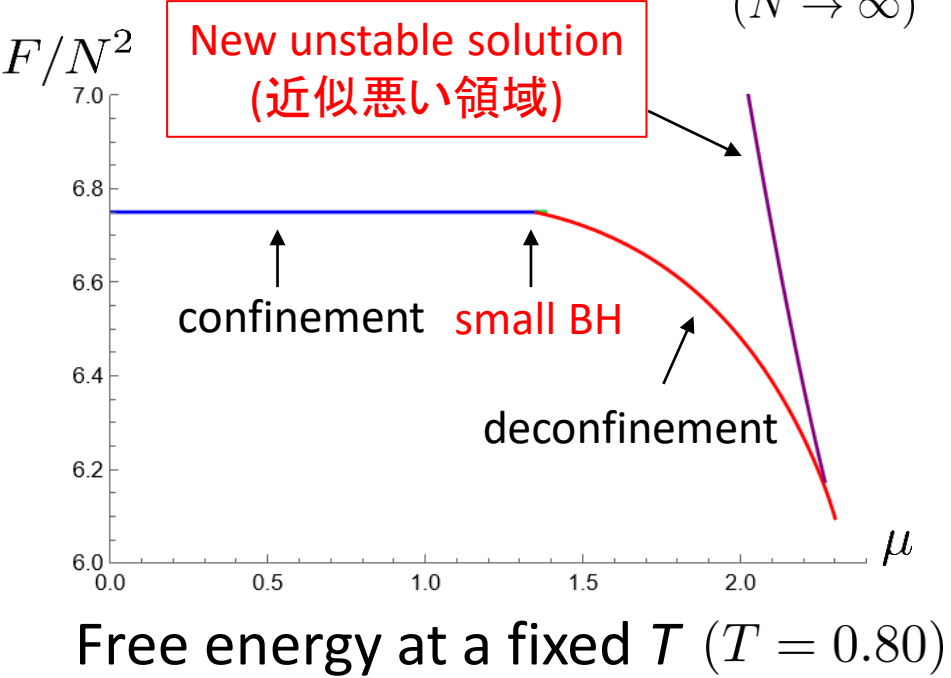
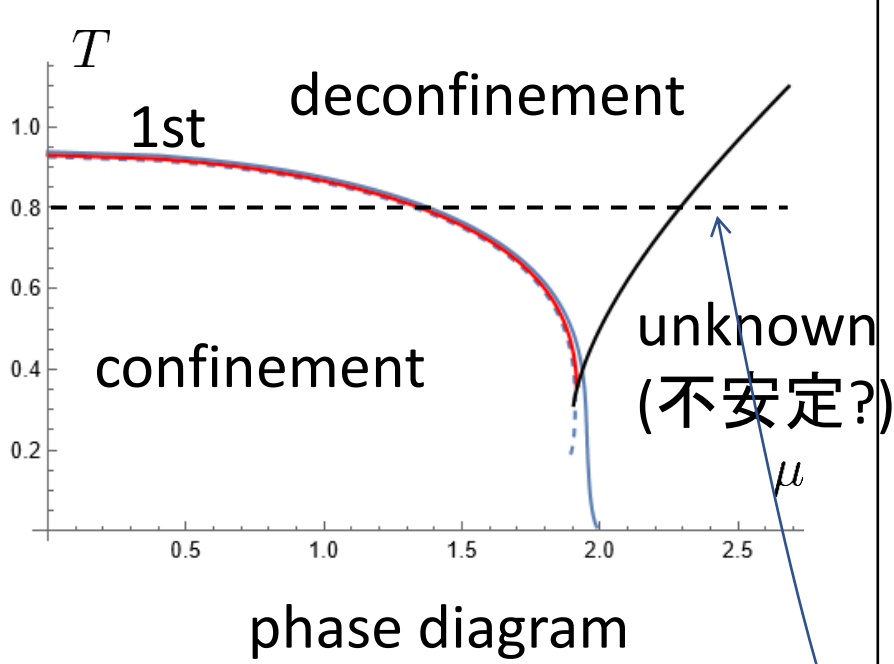
$$\longrightarrow S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \sum_{I=1}^{\tilde{D}} (D_t - \mu_I) Z^{\dagger I} (D_t + \mu_I) Z^I - \sum_{I,J=1}^D \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}$$

$\rightarrow$  符号問題  $\rightarrow$  Complex Langevin method (CLM)

◆ GE (2-loop)の結果 (D=9, 1平面回転)

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \sum_{I=1}^{\tilde{D}} (D_t - \mu_I) Z^{\dagger I} (D_t + \mu_I) Z^I - \sum_{I,J=1}^{\tilde{D}} \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}$$

( $N \rightarrow \infty$ )



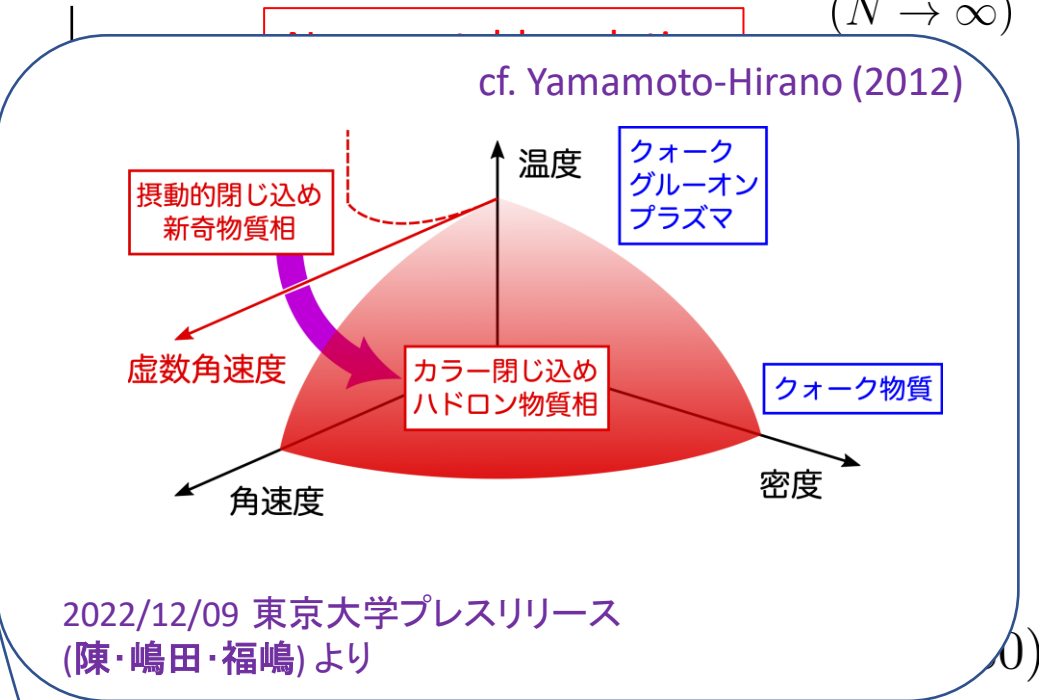
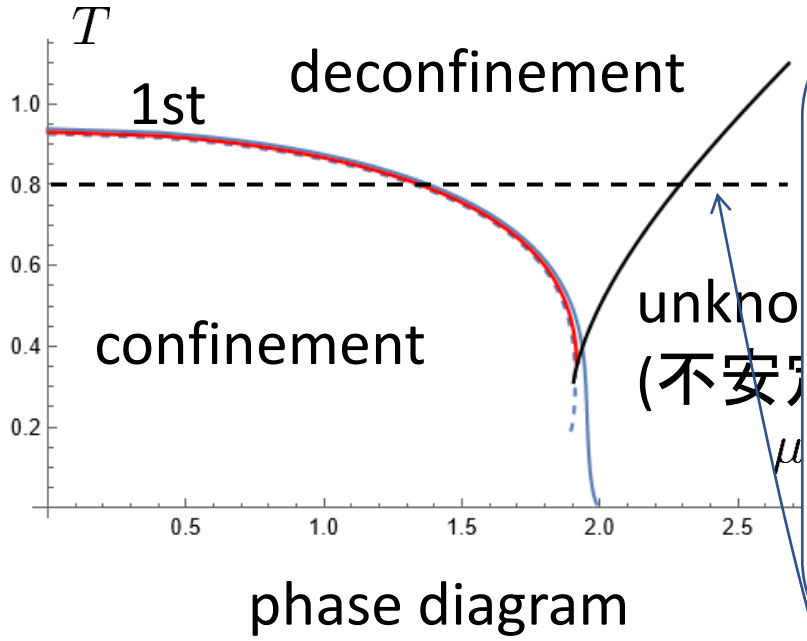
この点線に沿っての自由エネルギー

- 角速度により非閉じ込めが促進 → QCDでも同様の予測
- 角速度が大きいと近似破綻. 不安定化?
- 回転BHでも類似の相構造が知られている. Gubser-Mitra (2001)

◆ GE (2-loop)の結果 (D=9, 1平面回転)

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \sum_{I=1}^{\tilde{D}} (D_t - \mu_I) Z^{+I} (D_t + \mu_I) Z^I - \sum_{I,J=1}^{\tilde{D}} \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}$$

( $N \rightarrow \infty$ )



この点線に沿っての自由エネルギー

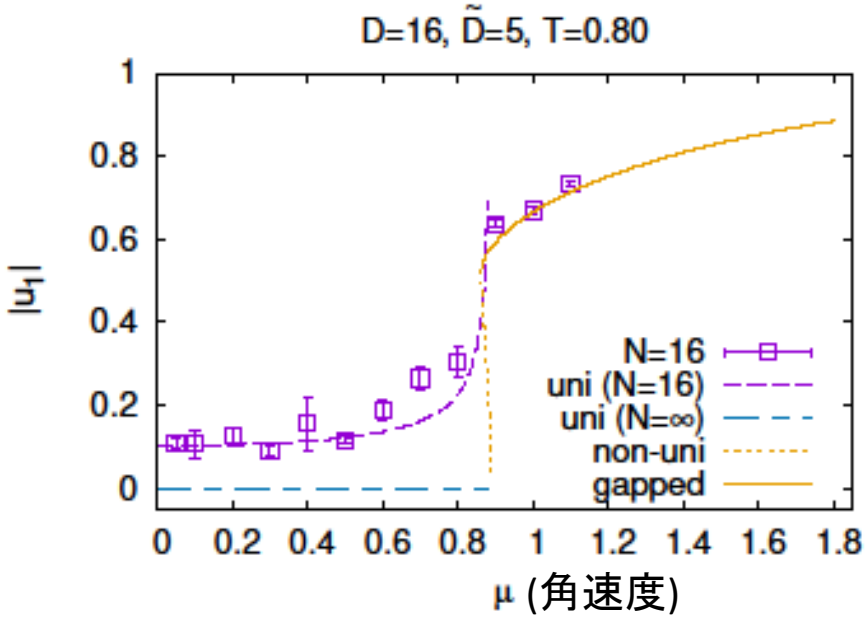
- 角速度により非閉じ込めが促進 → QCDでも同様の予測
- 角速度が大きいと近似破綻. 不安定化?
- 回転BHでも類似の相構造が知られている. Gubser-Mitra (2001)



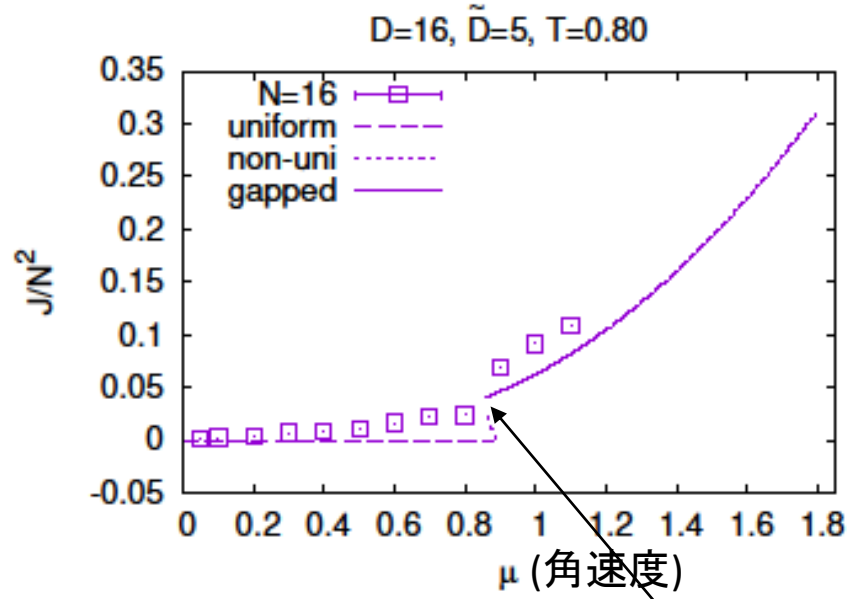
## ◆ CLMの結果

D=16 (5平面に同じ角速度) 温度を固定して,  $\mu$ (角速度)でプロット

### Polyakov loop



### 角運動量



- GEと良い一致 (角運動量は若干悪い.)
- CLMでも相転移を観測
- あまり $\mu$ が大きいとCLM破綻
- Small BHでは「角速度→大」で「角運動量→小」

small BH

## Sec. 4 虚数角速度

## Large-N 行列量子力学

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

large-N reduction  
dimensional reduction

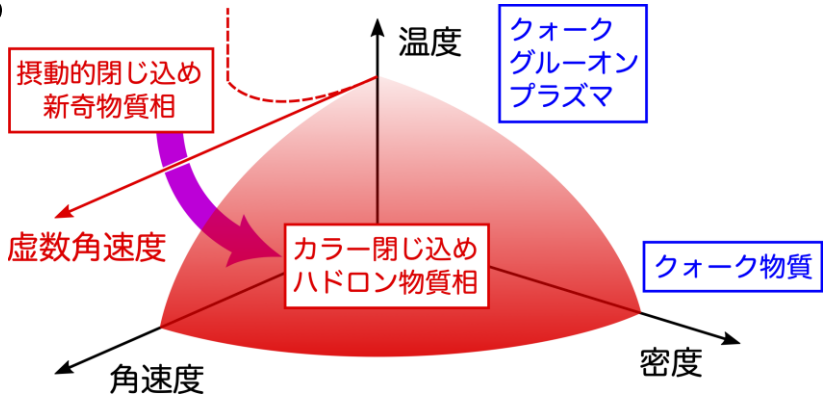
$$A^I(x) \rightarrow X^I$$



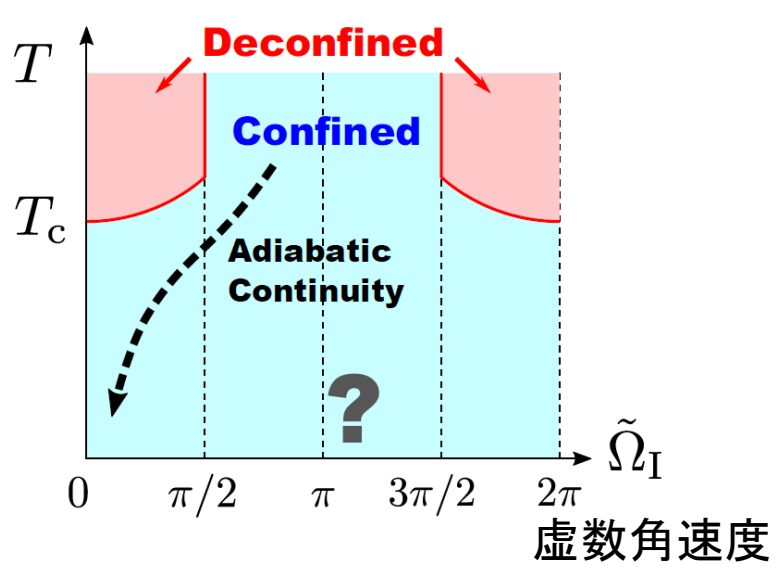
## D+1次元 pure YM

$$S = \frac{N}{4\lambda} \int_0^\beta dt \int d^D x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2.$$

D=3



Chen-Fukushima-Shimada PRL (2022)

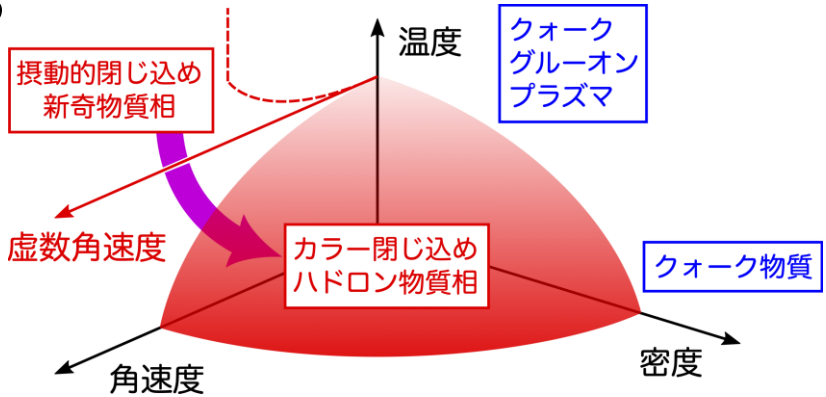


虚数角速度を増やすと  
 高温でも閉じ込めが起きる。  
 (回転の中心地点)  
 (理由は後で説明)

D=3

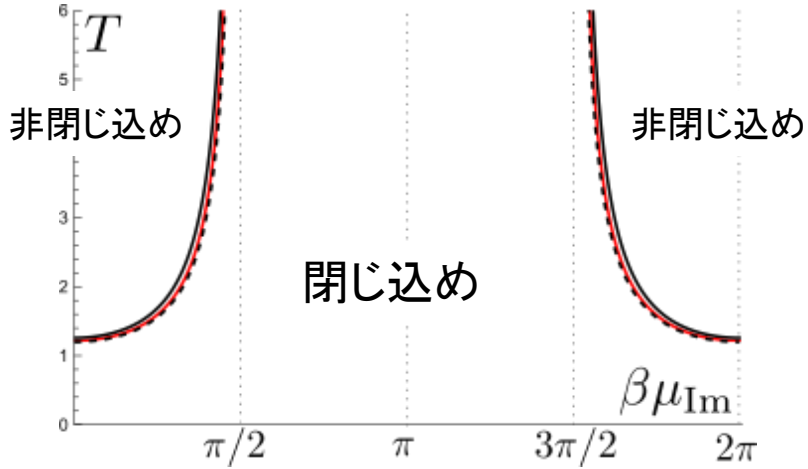
D+1次元 pure YM

$$S = \frac{N}{4\lambda} \int_0^\beta dt \int d^D x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2.$$



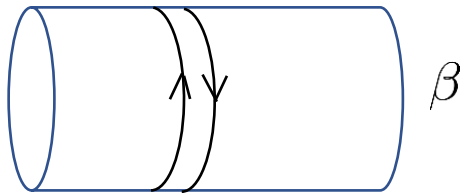
$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\} + \frac{1}{2} M^2 (X^I)^2 - \frac{1}{2} M^2 (X^I)^2 \quad X_{ij}^I : I = 1, \dots, D$$

## GEの結果(D=3, N=∞)



- Chen-Fukushima-Shimadaを再現
- T=∞での相転移点も一致
- 連続的に低温の閉じ込めとつながる

## ◆虚数角運動量で閉じ込めが起こる理由



$X_{ij}^I$  のthermal 1-loopの自由エネルギーへの寄与

$$\frac{(e^{-\beta(M-\mu)} + e^{-\beta(M+\mu)}) |P|^2}{\text{正}}$$

$P$  : Polyakov loop

$$\mu \rightarrow i\mu_{\text{Im}}$$

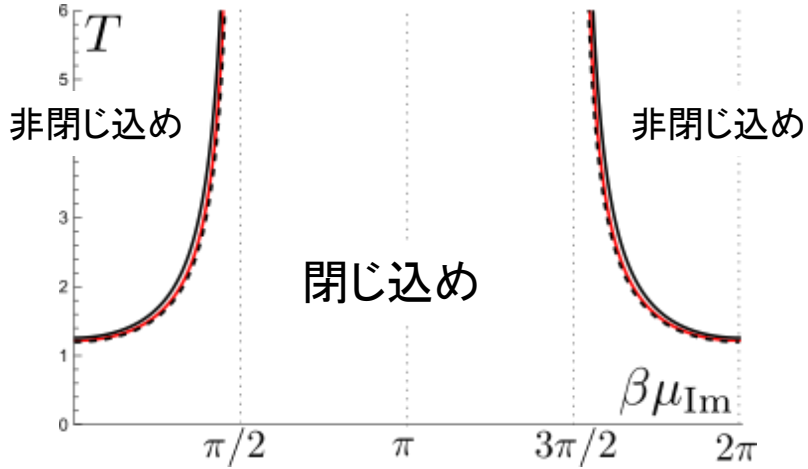
$$2e^{-\beta M} \sin(\beta\mu_{\text{Im}}) |P|^2$$

$\beta\mu_{\text{Im}} = \pi$  で **adjoint fermion**と同じ**負**となる  
→ 「閉じ込め」を促進

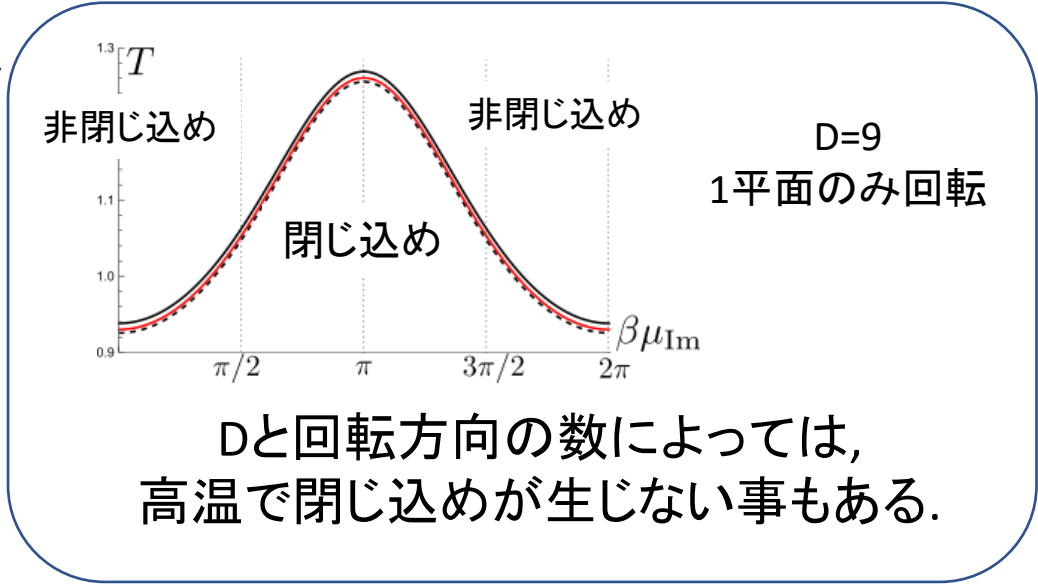
# Sec. 4 虚数角速度

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}$$

GEの結果(D=3, N=∞)



- Chen-Fukushima-Shimadaを再現
- T=∞での相転移点も一致
- 連続的に低温の閉じ込めとつながる



$$\frac{(e^{-\beta(M-\mu)} + e^{-\beta(M+\mu)}) |P|^2}{\text{正}}$$

$P$  : Polyakov loop

$$\mu \rightarrow i\mu_{\text{Im}}$$

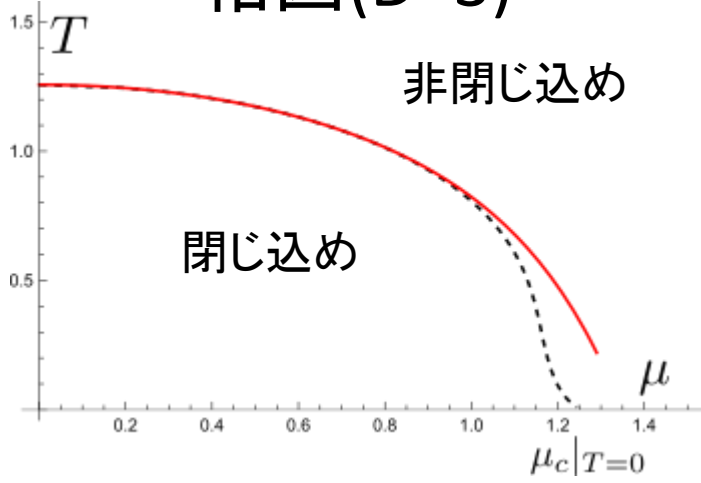
$$2e^{-\beta M} \sin(\beta\mu_{\text{Im}}) |P|^2$$

$\beta\mu_{\text{Im}} = \pi$  で **adjoint fermion**と同じ**負**となる  
→ 「閉じ込め」を促進

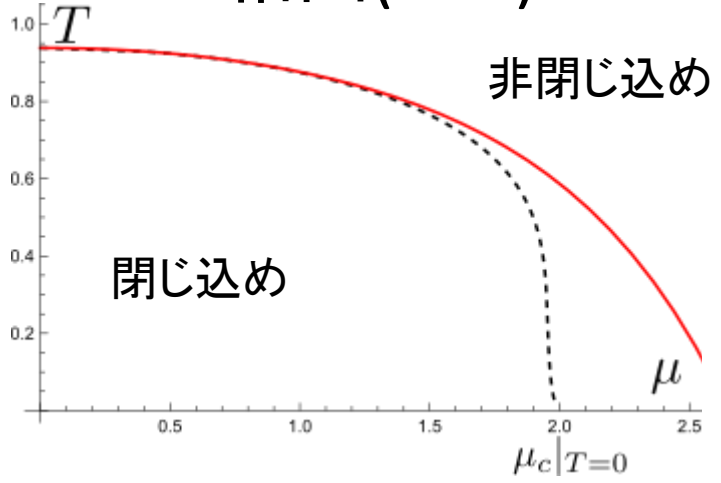
## (おまけ)角速度 vs 虚数角速度の解析接続 (GE)

(100%一致すれば, 符号問題回避)

### 相図(D=3)



### 相図(D=9)



点線: (実)角速度  
実線: 虚数角速度の解析接続

D=3,9ともに1平面の回転

→ 角速度が小さければある程度一致

# Summary

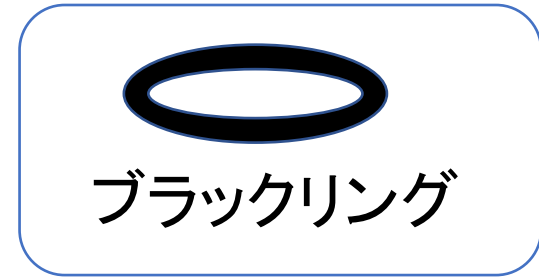


# Summary

## Large-N 行列量子力学

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

string theory  
BH熱力学



- ・角速度 → 符号問題
- ・虚数角速度 → 符号問題なし

large-N reduction  
dimensional reduction

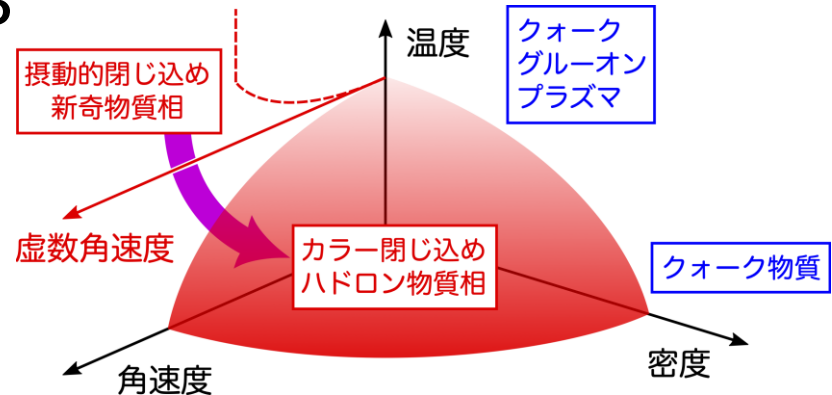
$$A^I(x) \rightarrow X^I$$



## D+1次元 pure YM

$$S = \frac{N}{4\lambda} \int_0^\beta dt \int d^D x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2.$$

D=3





- 行列のブラックリング解?
- 負の比熱の更なる理解

Micro-canonical ensembleの直接解析

- 虚数角速度をもったBH
- 回転超対称性行列量子力学 (string) Azuma-Morita (on going)
- 回転酒井杉本模型 (Holography)

