Stochastic tunneling in de Sitter Spacetime

D2 宮地大河（神戸大）
w/ 早田次郎（神戸大), 徳田順正（CTPU）
Based on : arXiv:2309.××××

2023/8/28 熱場の量子論とその応用

目次

1. Motivation
2. Stochastic approach
3. Hawking-Moss tunneling
4. Coleman-de Lucia tunneling
5. Summary and future work

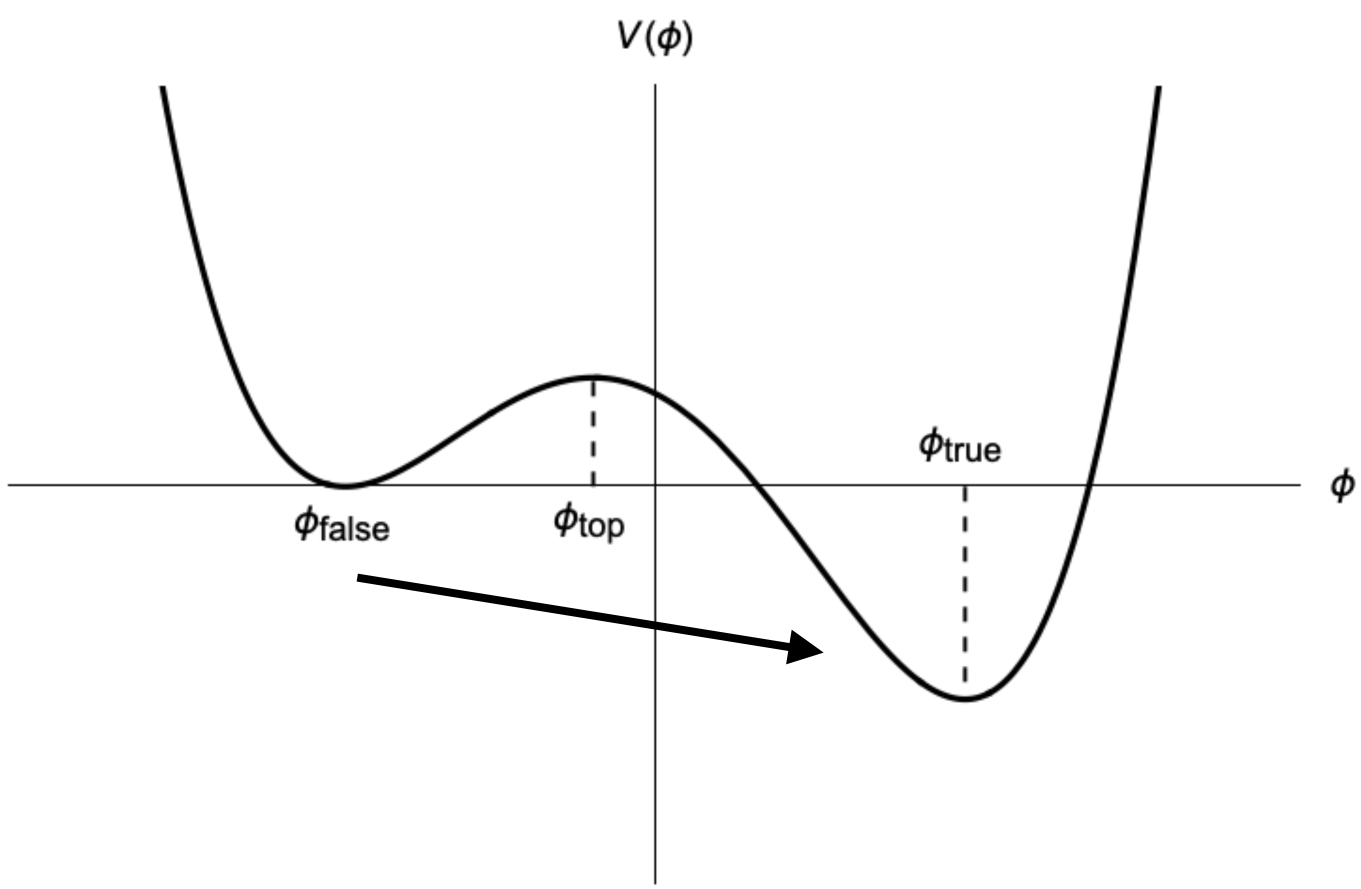
目次

1. Motivation
2. Stochastic approach
3. Hawking-Moss tunneling
4. Coleman-de Lucia tunneling
5. Summary and future work

宇宙論におけるトンネリング

初期宇宙においてトンネリングは重要な非摂動現象

- バブル同士の衝突による重力波 [Kosowsky, Turner, Watkins (1992)]
- Electro weak baryogenesis [Kuzmin, Rubakov, Shaposhnikov (1985)]
- Chain inflation [Freese, Spolyar (2005)]



de Sitter 時空とトンネリング

・宇宙の時空は曲がっているので、重力がトンネリングに与える影響を考慮する必要がある。

・de Sitter 時空：Minkowski 時空と同じ最大対称な時空

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}d\mathrm{x}^2$$

- 非自明な時空の中でも扱いやすい
- 得られた結果はインフレーション中の現象論に応用可能

・この2点を踏まえてde Sitter 時空中のトンネリングを論じることにする。

虚時間法とトンネリング

・de Sitter 時空中のトンネリングを記述する鞍点解として有名なものが2つある。

- Coleman-de Luccia (CDL) インスタントン
- Hawking-Moss (HM) インスタントン

・どちらも虚時間法で論じられるトンネリング。

・ただし、HM インスタントンは一様な解 $\phi = \phi_{top}$ なので、偽の真空から真の真空への遷移として解釈しにくい。

・実時間形式で記述できれば、トンネリングとしての HM インスタントンの描像がはっきりする。

本研究の流れ

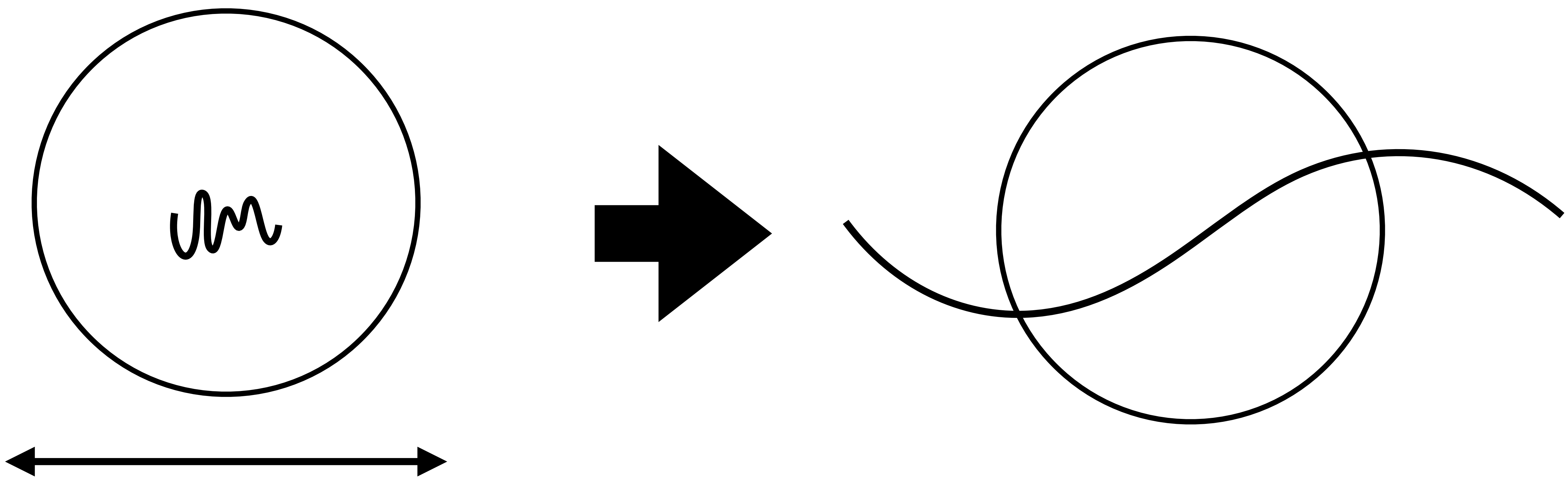
- Stochastic approach の導入
- Langevin 方程式の導出
- 経路積分形式を導入
- 鞍点近似でトンネル確率を評価する

目次

1. Motivation
2. Stochastic approach
3. Hawking-Moss tunneling
4. Coleman-de Lucia tunneling
5. Summary and future work

Stochastic approach のアイデア

（量子的な）短波長モードは宇宙の加速膨張に伴って
引き伸ばされ、（古典的な）長波長モードになる。



$$\sim \frac{1}{\varepsilon H}$$

A. A. Starobinsky and J. Yokoyama (1994)

加速膨張中に伴って長波長モードに転化する寄与を、ノイズとして取り扱った上で、長波長モードのダイナミクスを追う。

Langevin equation

・場と共役運動量について、IR パートのダイナミクスのみに注目

$$\phi = \phi_{IR}+\phi_{UV},\ \Pi = \Pi_{IR}+\Pi_{UV}$$

・簡単のため、空間一様性とslow-roll 近似を課した場合を考える

・Langevin equation (実質0+1次元の理論)

$$\dot{\phi}_{IR} = -\frac{1}{3H}V'(\phi_{IR}) + \xi^{\phi} \qquad (\xi^{\phi}：ノイズ)$$

・各時刻でランダムな値を取るノイズは次のような統計性を持つ

$$< \xi^{\phi}(t) > = 0, \quad < \xi^{\phi}(t)\xi^{\phi}(t') > = \frac{H^3}{4\pi^2}\delta(t-t')$$

経路積分表示

・実はLangevin 方程式と等価な経路積分表示がある（Martin-Siggia-Rose-Jansenn-de Dominicis functional integral）

$$p(\phi_c, t \,|\, \phi_c', t') = \int_{\phi_c(t')=\phi_c'}^{\phi_c(t)=\phi_c} \mathscr{D}(\phi_c, \Pi_\Delta) \, \exp\left[\int dt (\Pi_\Delta \dot{\phi}_c - H(\phi_c, \Pi_\Delta)) \right]$$

$$H(\phi_c, \Pi_\Delta) := -\frac{V'(\phi_c)}{3H}\Pi_\Delta - \frac{H^3}{8\pi^2}\Pi_\Delta^2$$ （赤字はノイズ項）

・$p(\phi_c, t \,|\, \phi_c', t')$ は遷移確率

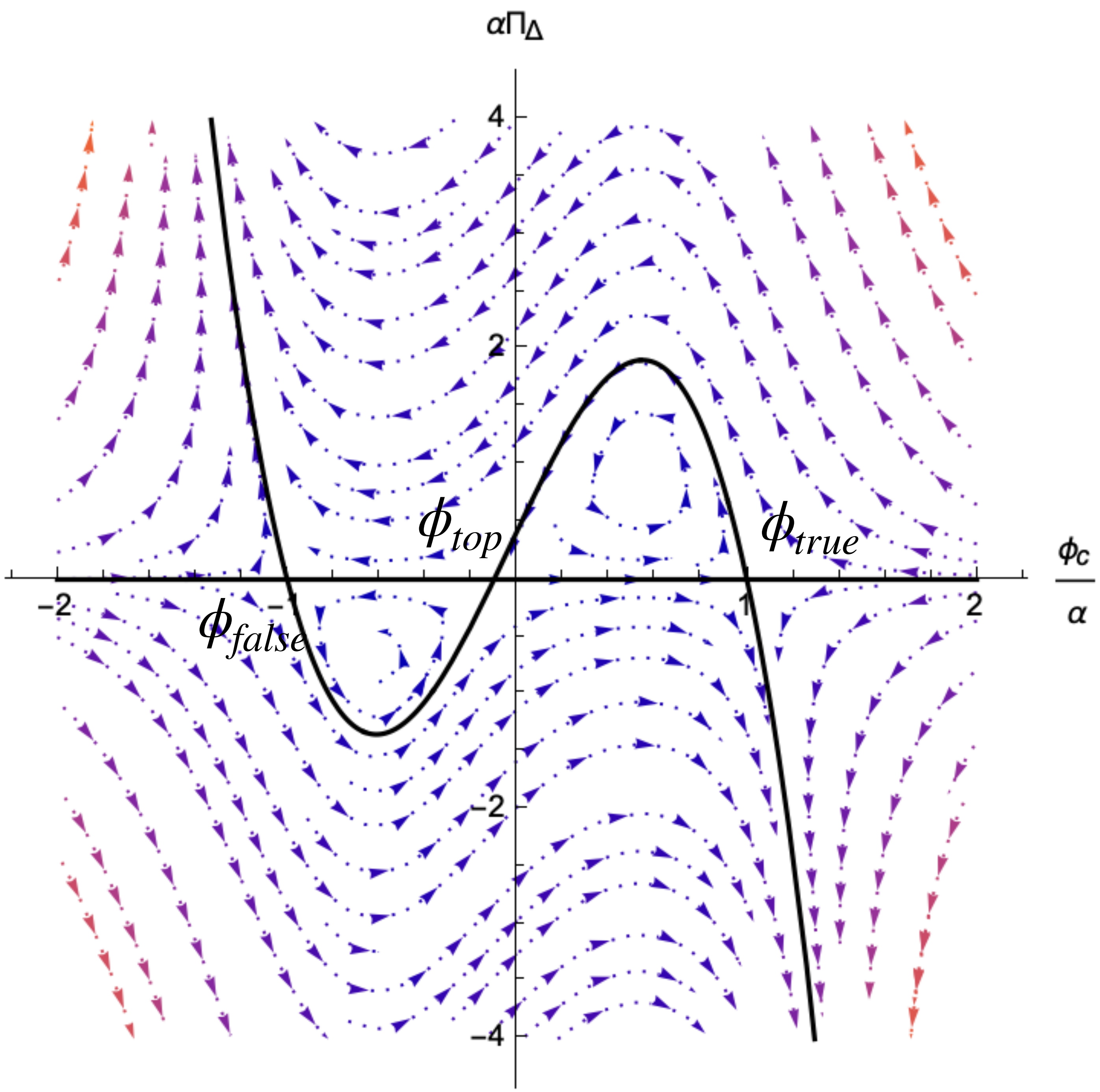
・ϕ_c' を偽の真空、ϕ_c をトンネリング後の配位（真の真空 or バブル）に指定することで、トンネル確率になる。

目次

1. Motivation
2. Stochastic approach
3. Hawking-Moss tunneling
4. Coleman-de Lucia tunneling
5. Summary and future work

Hamilton flow

・先ほどのハミルトニアンから得られる (ϕ_c, Π_Δ) 上のflow



・ハミルトン運動方程式

$$\dot{\phi}_c = -\frac{V'(\phi_c)}{3H} - \frac{H^3}{4\pi^2}\Pi_\Delta$$

$$\dot{\Pi}_\Delta = \frac{V''(\phi_c)}{3H}\Pi_\Delta$$

・黒線は $H = 0$ に対応

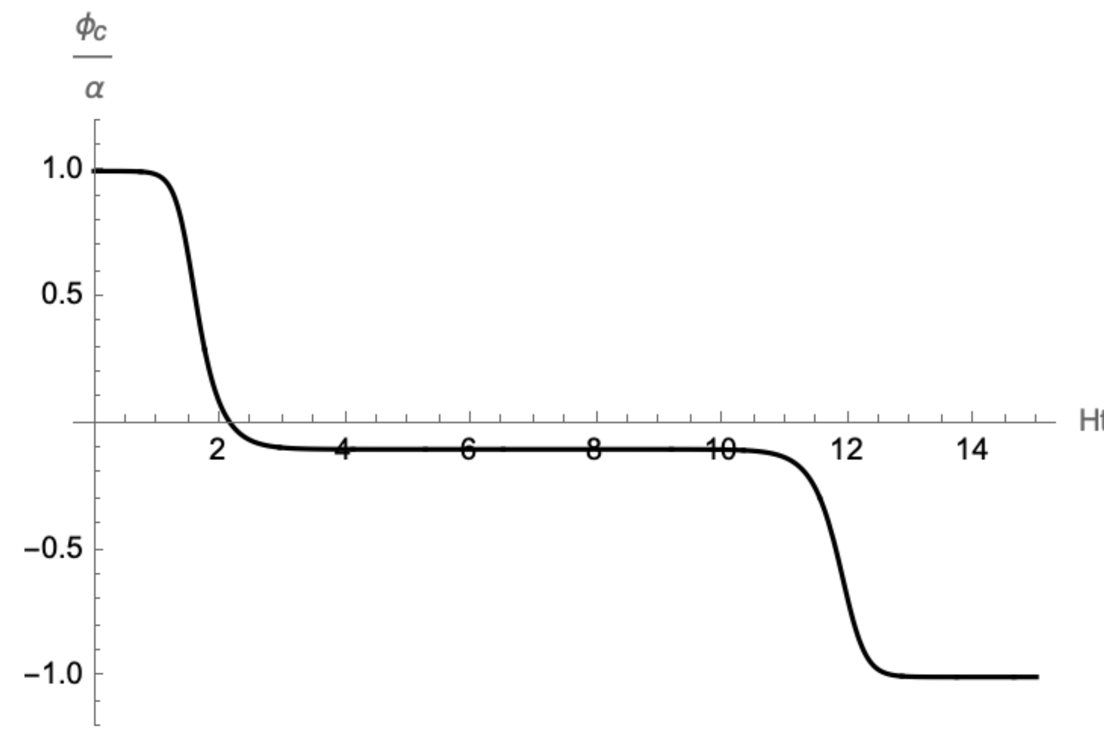
・偽の真空 ϕ_{false} から真の真空 ϕ_{true} へ至るflowが存在する。

V. Elgart and A. Kamenev (2004)

HM配位とトンネル確率

・先ほどの非自明な flow から右図の配位が得られる。

・この配位に対する作用はHMインスタントンの結果と完全に一致する。



$$I = \int_{t'}^{t} dt \left[\Pi_\Delta \dot{\phi}_c - H(\phi_c, \Pi_\Delta) \right] = -\frac{8\pi^2}{3H^4} \int_{t'}^{t_*} dt \dot{\phi}_c V'(\phi_c) = -\frac{8\pi^2}{3H^4} \Delta V$$

（非自明なflowの上では $\Pi_\Delta = 0, \ -\frac{8\pi^2}{3H^4} V'$ が満たされている）

目次

1. Motivation
2. Stochastic approach
3. Hawking-Moss tunneling
4. Coleman-de Lucia tunneling
5. Summary and future work

3+1次元の場合の定式化

- Langevin 方程式（近似なし）

$$\dot{\phi}_{IR} = a^{-3}\Pi_{IR} + \xi^{\phi}\ , \qquad \dot{\Pi}_{IR} = a\nabla^2\phi_{IR} - a^3 V'(\phi_{IR}) + \xi^{\Pi}$$

$$\langle 0|\,\xi^{\alpha}(t,\mathrm{x})\,|0\rangle = 0, \quad (\alpha,\beta = \phi,\Pi),$$

$$\langle 0|\,\xi^{\alpha}(t,\mathrm{x})\xi^{\beta}(t',\mathrm{x}')\,|0\rangle = \frac{1}{2\pi^2}\dot{k}_c(t)k_c(t)^2\frac{\sin(k_c(t)r)}{k_c(t)r}g^{\alpha\beta}(t)\delta(t-t')$$

- 対応する経路積分形式

$$p(\phi_c(\mathrm{X}),t\,|\,\phi'_c(\mathrm{X}),t') = \int_{\phi_c(t',\mathrm{X})=\phi'_c(\mathrm{X})}^{\phi_c(t,\mathrm{X})=\phi_c(\mathrm{X})}\mathscr{D}(\phi_c,\Pi_c,\phi_\Delta,\Pi_\Delta)\exp\left[\int d^4x\left(\Pi_\Delta\dot{\phi}_c - \phi_\Delta\dot{\Pi}_c - H(\phi_c,\Pi_c,\phi_\Delta,\Pi_\Delta)\right)\right]$$

$$H(\phi_c,\Pi_c,\phi_\Delta,\Pi_\Delta) = \frac{\Pi_c\Pi_\Delta}{a^3} - (a\nabla^2\phi_c - a^3V'(\phi_c))\phi_\Delta - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\int d^4x' X_\alpha(x)G^{\alpha\beta}(x,x')X_\beta(x')$$

$$G^{\alpha\beta}(x,x') = \langle 0|\,\xi^{\alpha}(x)\xi^{\beta}(x')\,|0\rangle$$

（赤字はノイズ項）

ノイズ項とカットオフスケール

- IR と UV を分けるカットオフ $k_c(t) = \varepsilon a(t) H$
- この時の$g^{\alpha\beta}$ (in Bunch-Davies vacuum)

$$
\begin{cases}
g^{\phi\phi} = \dfrac{H^2\eta^2}{2k_c}\left(\dfrac{1}{k_c^2\eta^2}+1\right) = \dfrac{1}{2Ha^3}\left(\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-1}\right) \\
g^{\Pi\Pi} = \dfrac{k_c}{2H^2\eta^2} = \dfrac{Ha^3}{2}\varepsilon \\
g^{\phi\Pi} = g^{\Pi\phi *} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k_c\eta}+i\right) = -\dfrac{1}{2}\varepsilon^{-1}+\dfrac{i}{2}
\end{cases}
$$

- $\varepsilon \ll 1$ (super horizon)の時、$G^{\phi\phi}$ が支配的
  → HM インスタントンの結果も再現する
- $\varepsilon \gg 1$ (sub horizon)の時、$G^{\Pi\Pi}$ が支配的
  → この時、CDL トンネリングが支配的になっている

経路積分形式（CDL ver）

- 経路積分形式

$$p \simeq \int \mathscr{D}(\Pi_c, \phi_\Delta) \exp\left[\int d^4x \left(-\phi_\Delta \dot{\Pi}_c - H_{CDL}(\Pi_c, \phi_\Delta) \right) \right]$$

$$H_{CDL}(\Pi_c, \phi_\Delta) = -\left(a\nabla^2 \phi_c[\Pi_c] - a^3 V'(\phi_c[\Pi_c]) \right) \phi_\Delta - \frac{1}{2} \int d^4x' \phi_\Delta(x) G^{\Pi\Pi}(x, x') \phi_\Delta(x')$$

- non-local term を局所化して近似する

$$-\frac{1}{2} \int d^4x' \phi_\Delta(x) G^{\Pi\Pi}(x, x') \phi_\Delta(x') \simeq -\frac{H^2 \varepsilon}{6\pi} a^3 \phi_\Delta^2(x)$$

$$H_{CDL}(\Pi_c, \phi_\Delta) \simeq -\left(a\nabla^2 \phi_c[\Pi_c] - a^3 V'(\phi_c[\Pi_c]) \right) \phi_\Delta - \frac{H^2 \varepsilon}{6\pi} a^3 \phi_\Delta^2$$

CDL 配位

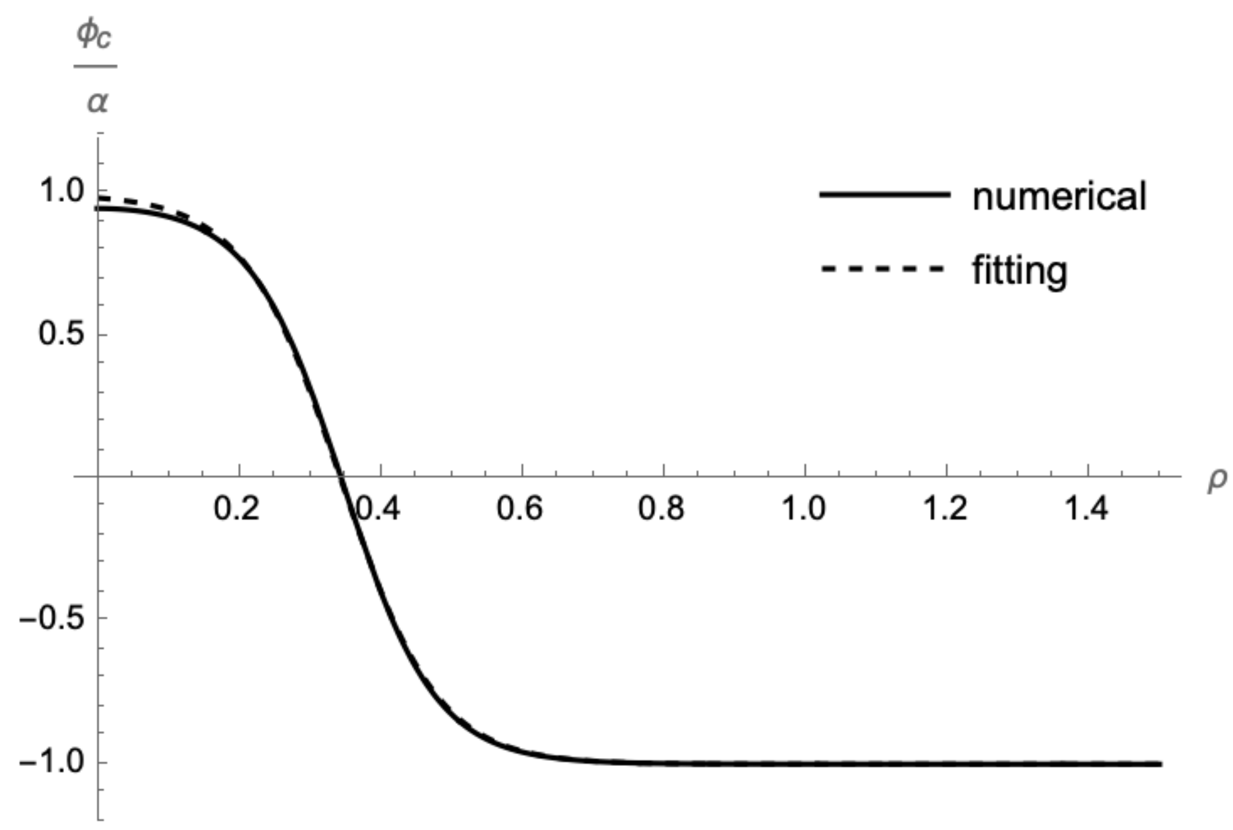
・H=0を満たす非自明な軌道上の運動方程式

$$\ddot{\phi}_c + 3H\dot{\phi}_c = V'(\phi_c) - a^{-2}\nabla^2\phi_c, \qquad (\phi_\Delta \neq 0)$$

・実は Euclidean AdS 時空上のKlein-Gordon 方程式
なので 、O(4) 対称性を課して解くことができる。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{3}{\tanh\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = \frac{V'(\phi_c)}{H^2}$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\phi_c = \phi_{false}, \quad \left.\frac{d\phi_c}{d\rho}\right|_{\rho=0} = 0$$



CDL トンネル確率

・この配位に対する作用を計算する

$$I \simeq \int_\Sigma d^4x \left[-\phi_\Delta \dot{\Pi}_c - H_{CDL}(\Pi_c, \phi_\Delta)\right] := -\frac{24\pi^2\alpha^2}{H^2\varepsilon}\tilde{I}(\mu, \bar{\rho})$$

・計算の結果、HM トンネリングより確率が大きいポテンシャルパラメータとカットオフスケール ε が確認できた

・CDL インスタントンとの関係はまだ不明（future work）

注）ε はUV パートでポテンシャルを線形近似した関係で上限がついている

目次

1. Motivation
2. Stochastic approach
3. Hawking-Moss tunneling
4. Coleman-de Lucia tunneling
5. Summary and future work

Summary

- Stochastic approach に経路積分形式を導入し、トンネル確率を定式化した。
- Hawking-Moss インスタントンの結果を再現する自然な配位を見つけた
- Coleman-de Luccia インスタントン的な配位を見つけ、トンネル確率を計算し、HM よりも大きくなるパラメータを確認した

Future work

- Euclidean method との関係
- 他のreal-time formalismとの関係 (ex: Lefschetz thimble method, 初期量子ゆらぎの時間発展)
- 他の散逸やノイズがある系に応用できるか (ex: Warm inflation)

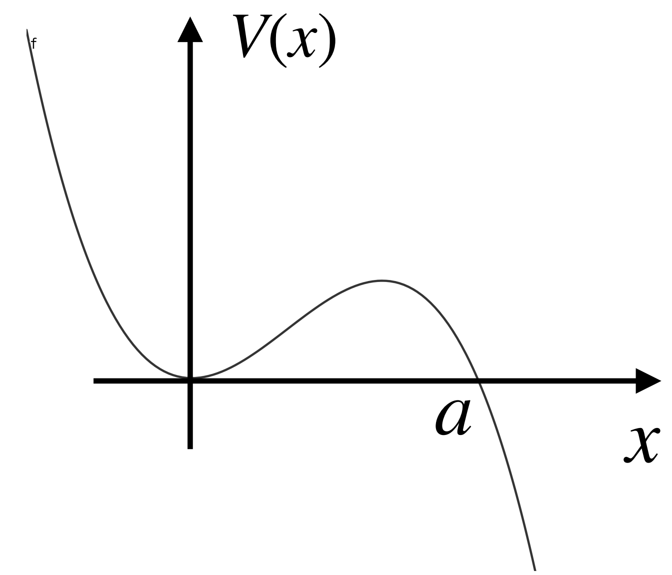
ご清聴ありがとうございました

Back up

Decay rate in QM

量子力学の場合、トンネリングの確率はWKB法を用いて
次のように評価できる。

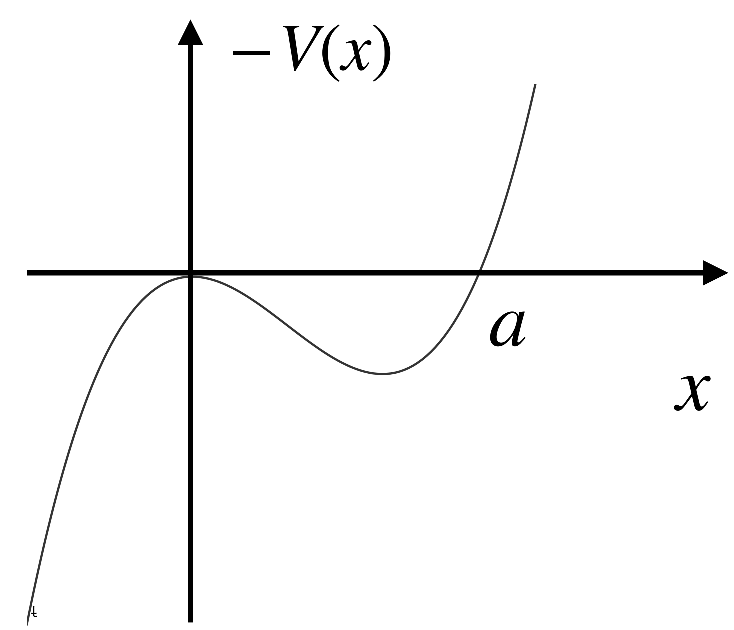
$$P_{decay} \sim \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_0^a dx\sqrt{2V(x)}\right]$$



虚時間 $t = -i\tau$ を導入して変形すると

$$P_{decay} \sim \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left(\frac{\dot{x}(\tau)^2}{2} + V(x)\right)\right] := \exp\left(-\frac{S_E[x]}{\hbar}\right)$$

ここで S_E はユークリッド作用。



軌道 $x(\tau)$ は次の境界条件を満たす。

$$x(\tau = \pm\infty) = 0, \quad x(\tau = 0) = a$$

Decay rate in QFT (Flat spacetime)

この形式を場の量子論へ拡張すると

$$P_{decay} \sim \exp\left(-S_E[\phi]\right)$$

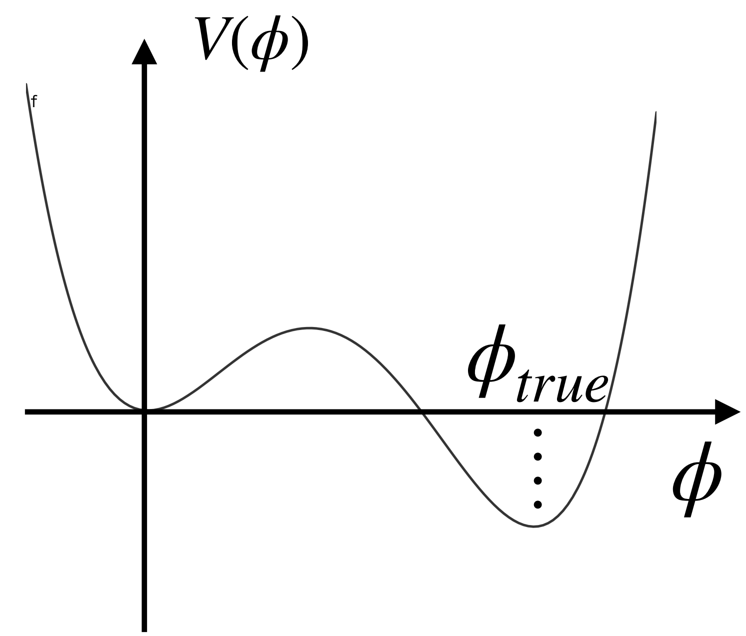
ここでユークリッド作用は

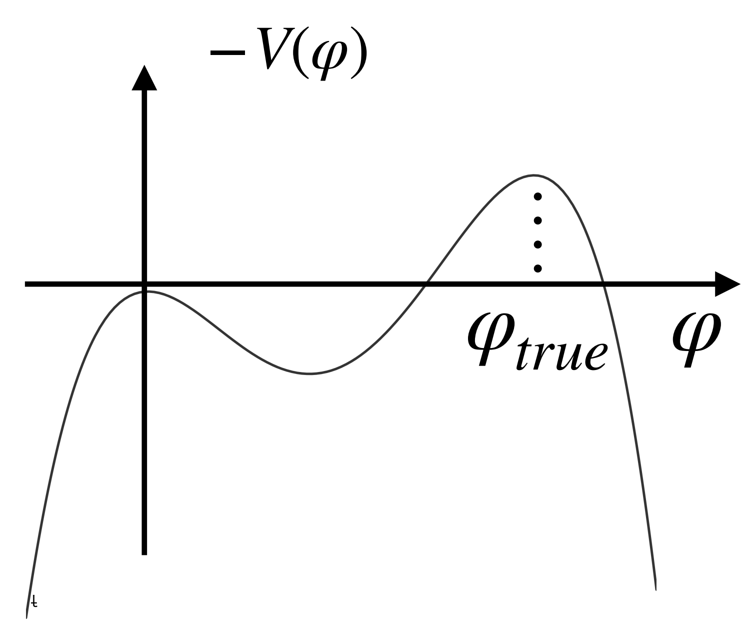
$$S_E = \int d^2x \left[\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)\right]$$

スカラー場ϕが満たす境界条件は

$$\begin{cases} \phi(\tau,\vec{x})\Big|_{|\vec{x}|=\infty} = 0, \quad \phi(\tau,\vec{x})\Big|_{\tau=\pm\infty} = 0 \\ \dfrac{d\phi(0,\,x)}{d\tau} = 0 \end{cases}$$

この境界条件を満たすようなスカラー場の配位はバウンスと呼ばれている。

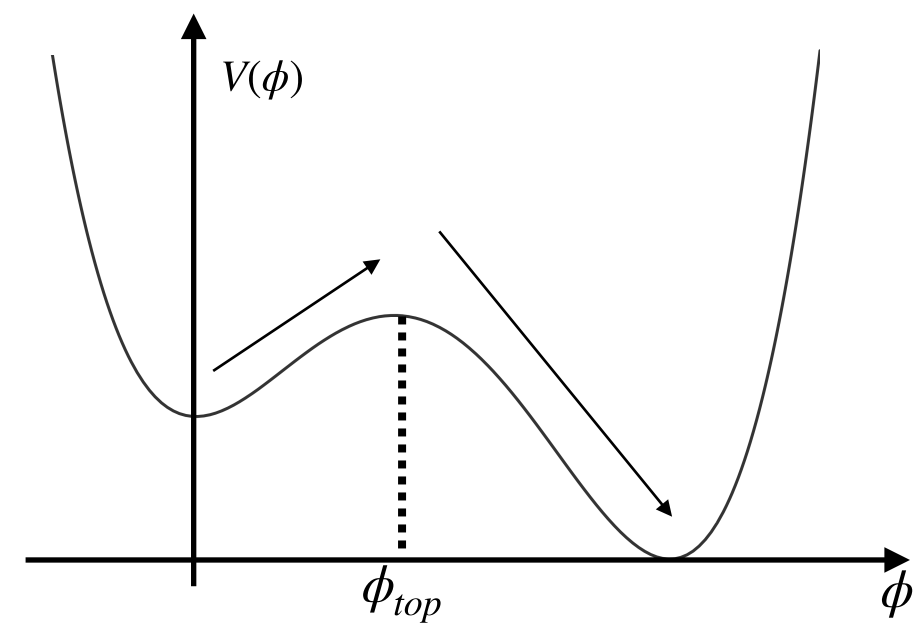




Hawking-Moss インスタントン

・Klein-Gordon 方程式 (in Euclidean de Sitter spacetime)

$$\partial_\tau^2 \phi + 3\frac{a'}{a}\partial_\tau \phi + \frac{1}{a^2}\nabla^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$



・Hawking-Moss インスタントン

$$\phi = \phi_{top} \, (= \text{const.})$$

・真空崩壊率

$$\Gamma \sim \exp\left[-\frac{8\pi^2}{3H^4}\left(V(\phi_{top}) - V(0) \right) \right] = \exp\left[-\underbrace{\left(\frac{H}{2\pi}\right)^{-1}}_{\text{de Sitter温度}} \underbrace{\frac{4\pi}{3H^3}}_{\text{Habble体積}} \underbrace{\left(V(\phi_{top}) - V(0) \right)}_{\text{エネルギー密度}} \right]$$

Langevin equationの導出

Klein-Gordon 方程式 (in de Sitter spacetime)

$$\partial_t^2\phi + 3H\partial_t\phi - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

場と共役運動量をIRとUVのパートに分ける。

$$\hat{\phi} = \phi_{IR} + \hat{\phi}_{UV}$$
$$\hat{\pi} = \pi_{IR} + \hat{\pi}_{UV}$$

$\hat{\phi}_{UV}$ は次のようなモード展開をしている。($k_c = \epsilon a(t)H$)

$$\hat{\phi}_{UV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\theta(k-k_c)[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\phi_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\phi_k^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

$$\hat{\pi}_{UV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\theta(k-k_c)[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\dot{\phi}_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\dot{\phi}_k^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

Langevin equationの導出

また、モード関数$\phi_k(t)$は次をみたす。

$$\partial_t^2 \phi_{\boldsymbol{k}} + 3H\partial_t \phi_{\boldsymbol{k}} + \frac{k^2}{a^2}\phi_{\boldsymbol{k}} + \frac{\partial^2 V(\phi_{IR})}{\partial \phi^2}\phi_{\boldsymbol{k}} = 0$$

この時、Klein-Gordon方程式は次のようになる。

$$\dot{\phi}_{IR} = a^{-3}\pi_{IR} + \xi^{\phi}$$

$$\dot{\pi}_{IR} = a\,\nabla^2 \phi_{IR} - a^3 \frac{\partial V}{\partial \phi} + \xi^{\pi}$$

ここで、ξ^{ϕ}, ξ^{π} はUVパートからくる量子的なノイズ

$$\xi^{\phi} = \dot{k}_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta(k - k_c)[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\phi_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\phi^*_k(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

$$\xi^{\pi} = \dot{k}_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta(k - k_c)[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\dot{\phi}_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\dot{\phi}^*_k(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

Langevin equationの導出

Bunch-Davis真空を仮定する。

$$a_{\boldsymbol{k}}|0>_{BD} = 0, \quad \forall \boldsymbol{k}$$

$$\phi_{\boldsymbol{k}} \propto e^{-ik\eta}, \quad k|\eta| \gg 1, \quad (\eta\text{は共形時間})$$

さらに、

・一様等方性 ($\nabla\phi = 0$)

・late-time limit ($k|\eta| \ll 1 \Rightarrow \xi^{\pi} \sim 0$)

・slow-roll近似 ($\dot{\phi}^2 \ll 2V, \quad |\ddot{\phi}| \ll 3H\dot{\phi}$)

を課すと、最終的に次の表式が得られる。