

相対論的複素スカラー場の熱力学的性質に対する 化学ポテンシャル勾配からの影響の解析

三浦大輝 (新潟大/原子核理論)

本郷優

2023年8月29日 KEK研究会 「熱場の量子論とその応用」

研究背景：クォーク物質の相構造

・クォーク物質 → クォークやグルーオンが自由度として顕在化した量子多体系

e.g.)クォークグルーオン・プラズマ(QGP), カラー超伝導, Quarkyonic . . .

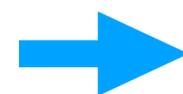
・さまざまな物質相が予言されている(QCD相図)

・宇宙初期や中性子星内部にクォーク物質の存在が予言

・クォーク物質の相構造の解明

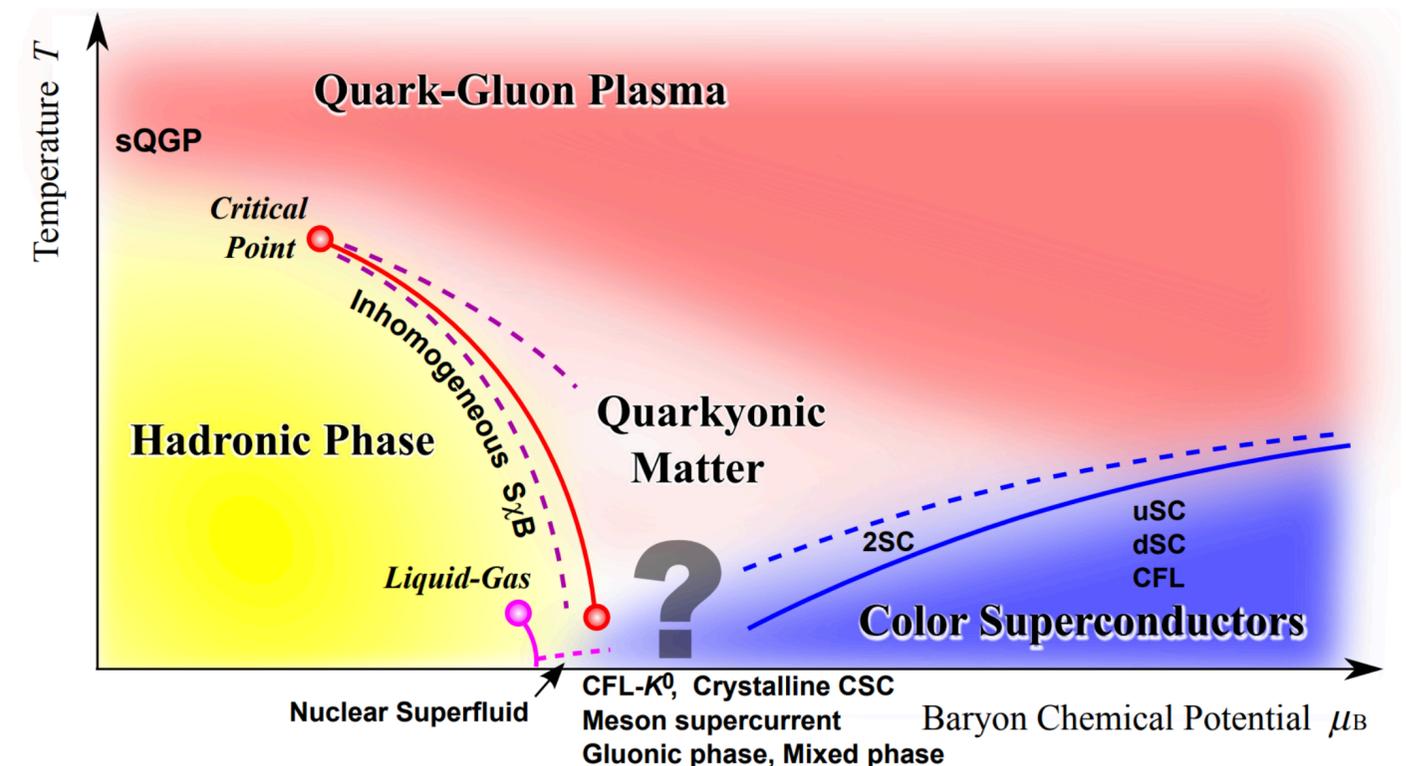
→宇宙における物質の初期状態とその進化の理解につながる

重イオン衝突：強い電磁場



外場中の場の理論

中性子星：強い電磁場+重力場



K. Fukushima and T. Hatsuda, *Rep. Prog. Phys.* 74 (2011) 014001

外場の存在により空間的に非一様になった量子多体系の熱力学的性質の解析

研究背景：非一様系の現状



一様系の平衡統計力学

e.g.) 自由複素スカラー場

$$\Omega(\beta, \mu) = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\omega_k + \frac{1}{\beta} \ln \left(1 - e^{-\beta(\omega_k + \mu)} \right) + \frac{1}{\beta} \ln \left(1 - e^{-\beta(\omega_k - \mu)} \right) \right]$$



(場の理論に基づいた)非一様系の平衡統計力学

- ・ 分配関数の定式化(経路積分表示)はされている [Masaru Hongo, *Ann. Phys.* (2017)]
- ・ 定常電場中の自由エネルギーについての解析 [I. A. Shovkovy, *Phys. Lett. B441* (1998)]



自由エネルギーに虚部あり。粒子対生成(Schwinger機構)が起き電流が流れるためと考察。

研究背景：非一様系の平衡状態

外場による非一様系でも平衡状態は実現しないのか？

外場中のハミルトニアン：
$$\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H}_0 - \int d^3x A_0(x) \hat{J}^0(x)$$

密度演算子の時間発展：
$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}_{\text{tot}}t} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}_{\text{tot}}t}$$

時間に依存しない定常解


$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}_{\text{tot}}}}{Z}$$

Z ：分配関数(規格化因子)

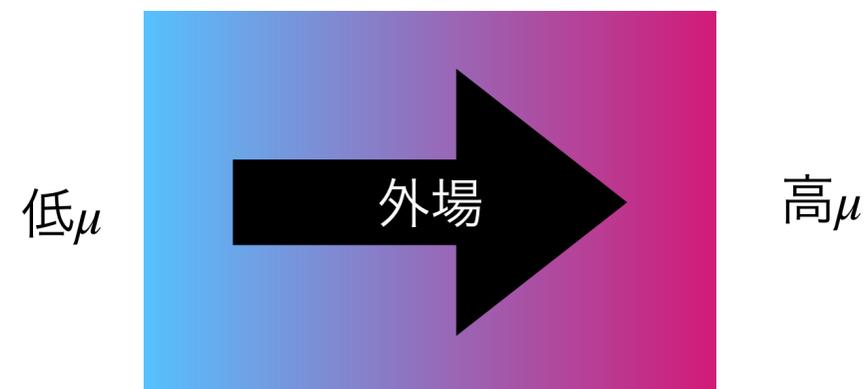
$\mu(x) = \mu + A_0(x)$ としても定常解

本研究の目的

✓ 高温+定常外場+境界条件で平衡状態が実現

研究目的

相対論的**自由複素スカラー場**の熱力学量(粒子数密度)に対して
電場の存在により**場所依存した化学ポテンシャル**の勾配の強さが与える効果を調べる



外場中の有限温度場の理論

虚時間 $t = -i\tau$, $0 \leq \tau \leq \beta$ を導入し分配関数を経路積分表示

分配関数の経路積分 with Euclidean Lagrangian

$$Z(\beta, \mu) = \text{Tr} e^{-\beta \int d^3x \left(\mathcal{H} - \mu(x) \hat{J}^0(x) \right)}$$

$$= \int_{\phi(\beta, \vec{x}) = \phi(0, \vec{x})} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E}$$

$$\mathcal{L}_E = \phi^*(\tau, \vec{x}) \left[-(\partial_\tau - \mu(x))^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(\tau, \vec{x})$$

$$\mu(x) = \mu + A_0(x)$$

ガウス積分&log

$$\log Z(\beta, \mu) = \# \text{Tr} \log (\text{固有値})$$

外場中の有限温度場の理論

一様・非一様系の違い

$$\mathcal{L}_E = \phi^*(\tau, \vec{x}) \left[-(\partial_\tau - \mu)^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(\tau, \vec{x})$$



$$\mathcal{L}_E = \phi^*(\tau, \vec{x}) \left[-(\partial_\tau - \mu(x))^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(\tau, \vec{x})$$

e.g.) 一様系の固有値 $E_{n,\vec{k}} = (\omega_n - i\mu)^2 + \vec{k}^2 + m^2$

化学ポテンシャルの場所依存性によりFourier変換のみでは解けない

分配関数の計算

外場の存在

固有値問題

高温極限による古典統計力学への移行

高温極限

$$i\omega_n = 2\pi i n T$$

$$m^2 + \omega_n^2$$

$n \neq 0$ は"重い"

$n = 0$ のみで近似

$$\phi(\tau, \vec{x}) \longrightarrow \phi(\vec{x})$$

古典統計力学へ(以降(1+0)次元で考える)

化学ポテンシャルの関数形と固有値方程式

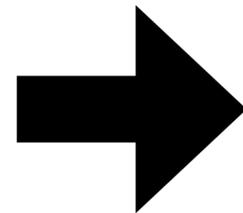
化学ポテンシャルの関数形

① $\mu(x) = bx$

$$\mu'(x) = b$$

② $\mu(x) = a/\cosh bx$

$$\mu'(x) = -ab \sinh bx / (\cosh bx)^2$$



固有値方程式

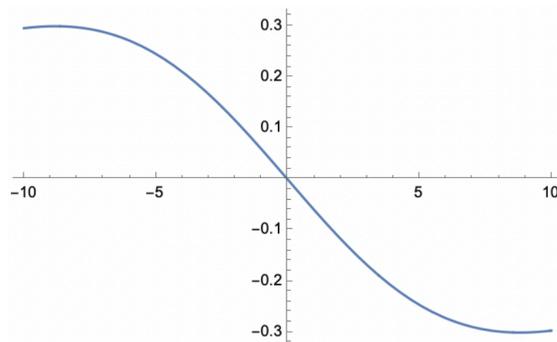
① $\left[-\frac{d^2}{dx^2} - b^2 x^2 \right] F_l(x) = \gamma_l F_l(x)$

Dirichlet境界条件 $F_l(-L/2) = 0 = F_l(L/2)$

② $\left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{a^2}{(\cosh bx)^2} \right] F_l(x) = \gamma_l F_l(x)$

周期境界条件 $F_l(-L/2) = F_l(L/2)$

$$\gamma_l := E_l - m^2$$



高温+定常外場+境界条件

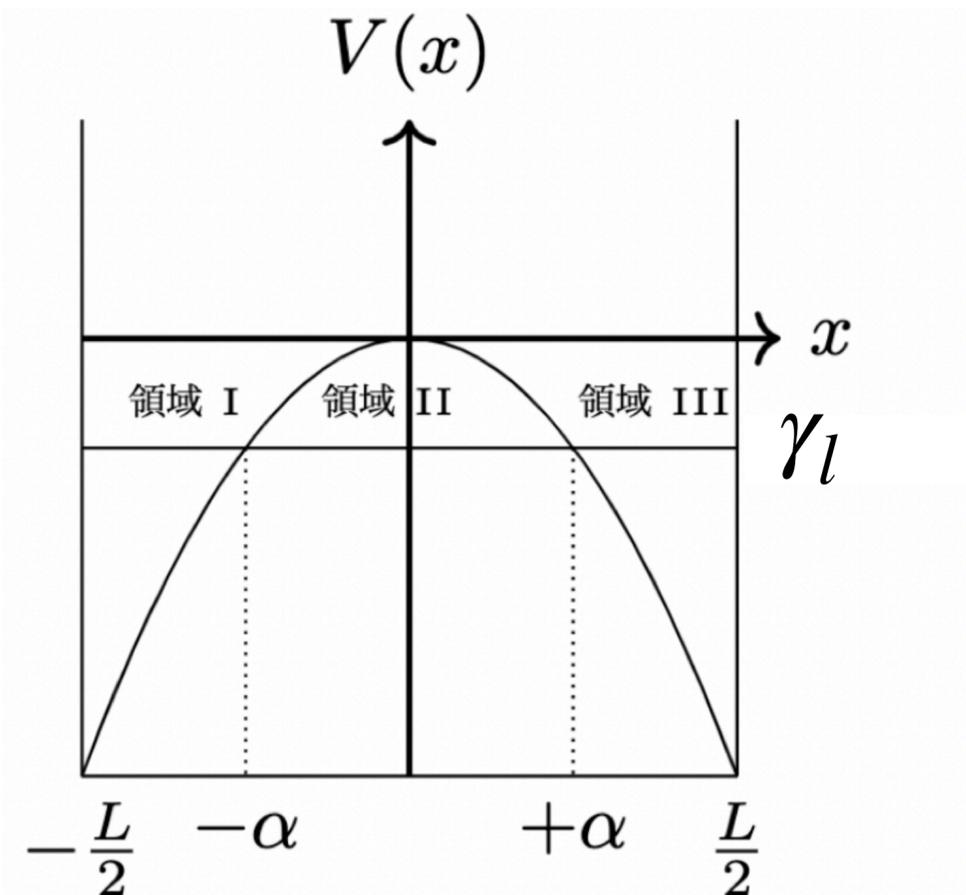
① $\mu(x) = bx$

① $\left[-\frac{d^2}{dx^2} - b^2 x^2 \right] F_l(x) = \gamma_l F_l(x)$ (IHO型)

✓ 厳密解(放物柱関数)

解けるポテンシャルの形は限定的

WKB近似 \longrightarrow 2つの転回点に近いときの固有値を除けば有用

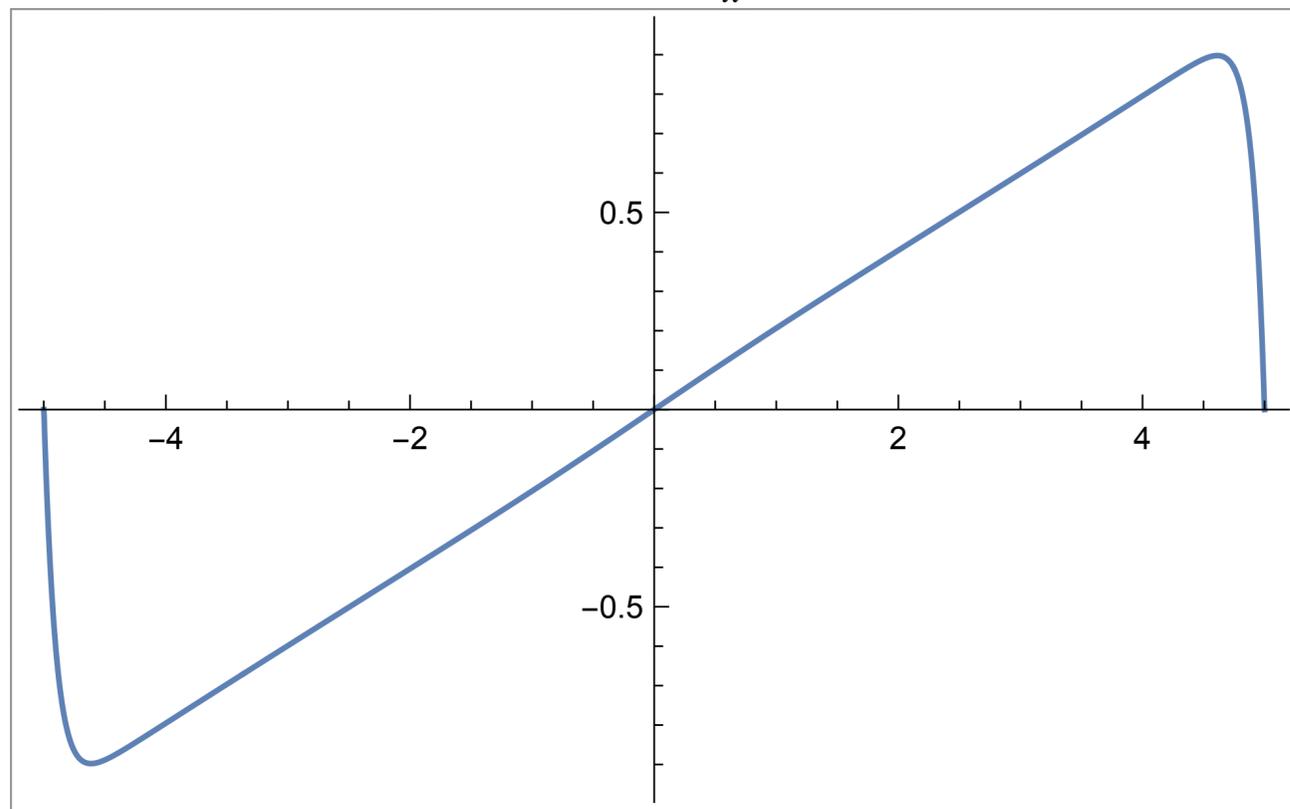


| l | X_l^{WKB} | X_l^{Exact} |
|-----|--------------------|----------------------|
| 1 | -0.148885 | -0.148201 |
| 2 | -0.0821604 | -0.0820096 |
| 3 | -0.0821603 | -0.0820095 |
| 4 | -0.0360516 | -0.0360792 |
| 5 | -0.0360086 | -0.0360367 |
| 6 | -0.0059679 | -0.00630521 |
| 7 | -0.00207897 | -0.00296688 |
| 8 | 0.0120608 | 0.0130392 |
| 9 | 0.0278458 | 0.0280178 |
| 10 | 0.04647 | 0.0466611 |

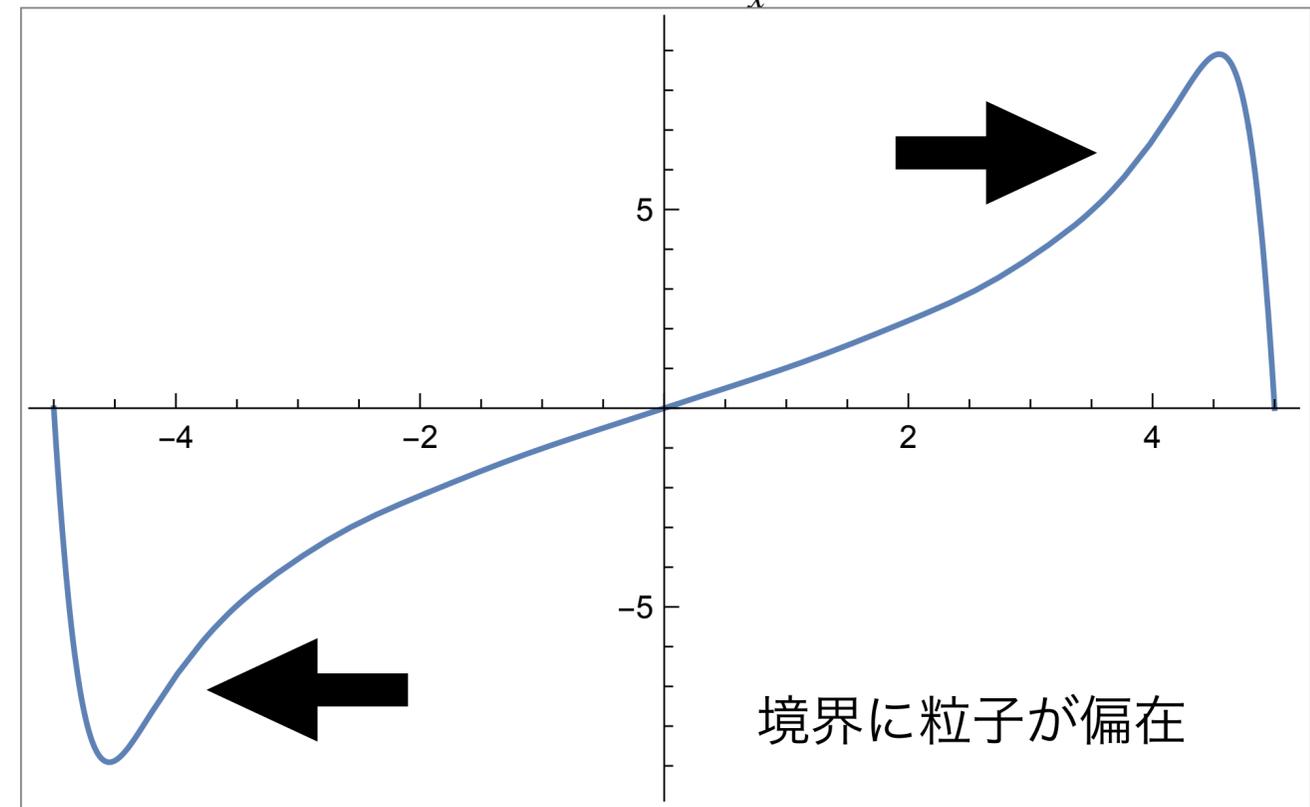
$\mu = bx$ での粒子数密度

$$\langle n(x) \rangle_{\text{eq.}} = \frac{2\mu(x)}{\beta L_x} \sum_l \frac{1}{E_l} F_l^*(x) F_l(x)$$

$b = 0.1 \quad m = 5 \quad L_x = 10$



$b = 1 \quad m = 5 \quad L_x = 10$



② $\mu(x) = a/\cosh bx$

$$\textcircled{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{a^2}{(\cosh bx)^2} \right] F_l(x) = \gamma_l F_l(x) \quad (\text{Pöschl-Teller型})$$

$$\gamma_l = -b^2 \left[-\left(l + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{b^2}} \right]^2 \longrightarrow E_l = m^2 - b^2 \left[-\left(l + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{b^2}} \right]^2$$

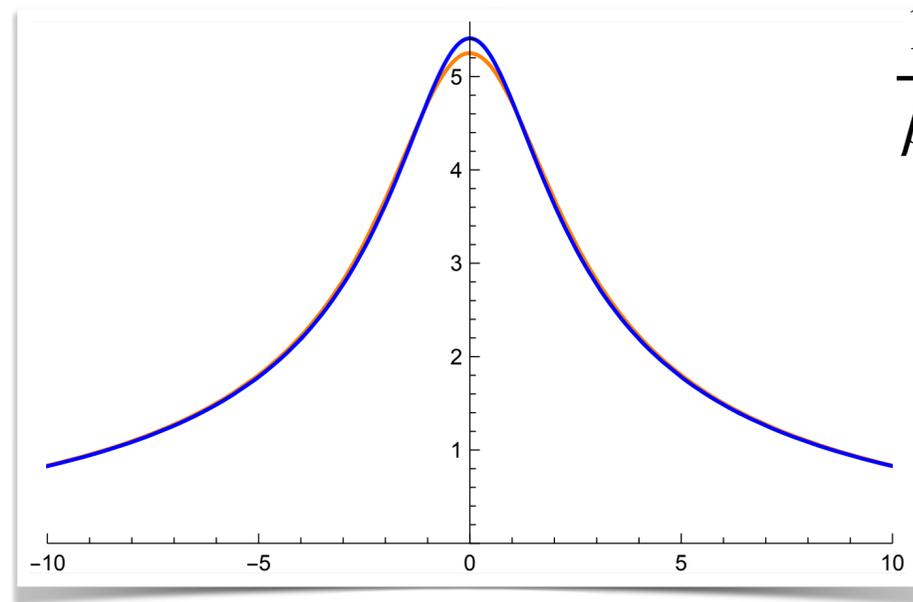
(LandauLifshitz-QuantumMechanics p.73) $l = 0, 1, 2, \dots$

$E_l = 0$ となるとき自由エネルギーは発散.

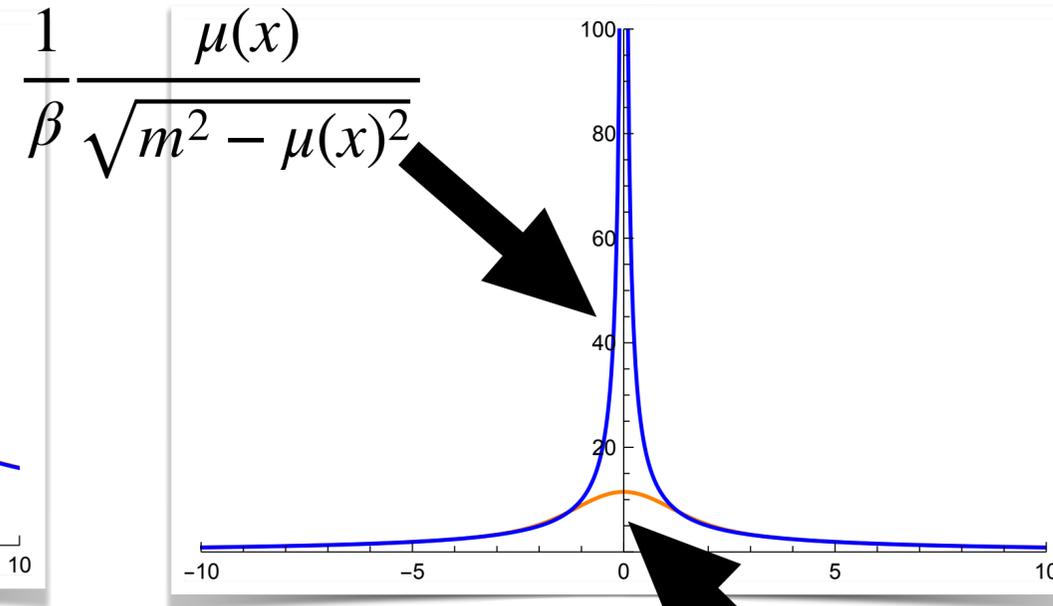
$$a = m\sqrt{1 + \frac{b}{m}} > m$$

$\mu(x) = a/\cosh bx$ での粒子数密度

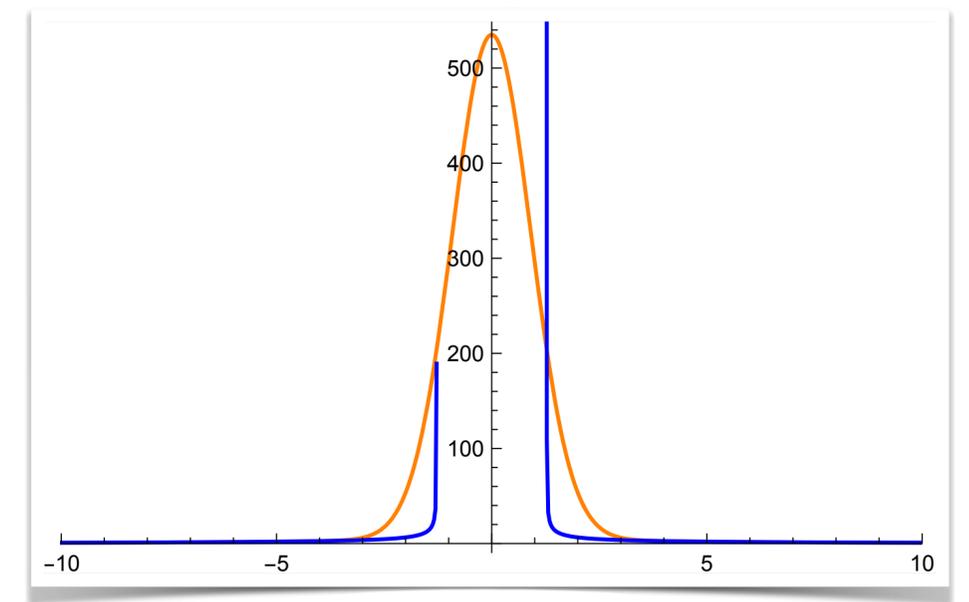
$a = 5.9, b = 0.1, m = 6$



$a = 6, b = 0.1, m = 6$



$a = 6.049, b = 0.1, m = 6$



$$\frac{2\mu(x)}{\beta L_x} \sum_l \frac{1}{E_l} F_l^*(x) F_l(x)$$

まとめと展望



外部電場の存在により化学ポテンシャルが場所依存した複素スカラー場について古典統計力学の範囲で固有値問題を解いた.



粒子数密度を ① $\mu(x) = bx$ ② $\mu(x) = a/\cosh bx$ の2つの関数形について求めた.



①については勾配 b の大きさに応じて粒子数密度が偏在的な振る舞いを示すことを確認した.

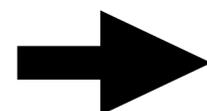


②については熱力学的不安定性を引き起こす際の化学ポテンシャルの大きさがナイーブに考えた時とズれることを確認した.

展望

有限温度で量子統計をやりたい.

(ゼロ温度)Schwinger機構による真空崩壊率は一様定常電場の場合ではあるが $e^{-\frac{m^2}{E}}$ のように m^2 で抑制される.



弱い外場中なら平衡量子統計力学が正当化される？