超対称格子 Majorana 模型における超対称性の破れと厳密な基底状態

— kink と skink

三浦憂
共同研究者: 戸塚圭介、下村顕士

京大基研

August 25, 2023

Center for Gravitational Physics and Quantum Information
Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University

YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

目次

目次

超対称性 (SUSY)

$\mathcal{N}=1$ SUSY の代数

- 実超電荷: $R=R^{\dagger}$,
- フェルミオンパリティ: $(-1)^F$ s.t. $\left\{R,(-1)^F\right\}=0$,
- ハミルトニアン: $H=\frac{1}{2}R^2=\frac{1}{4}\{R,R\}$

H に対してこのような $R,(-1)^F$ があるとき、H は SUSY を持つという。

要するに $\cdots$

- H が R の 2 乗で表される系を考えるだけ
- $[R,H]=0$、$\left[(-1)^F,H\right]=0$
- 具体例 (自由粒子): $H=p^2/(2m)$、$R=p/\sqrt{m}$、$(-1)^F=P$ (パリティ)

超対称性 (SUSY)

SUSY を持つ系のスペクトラム構造

- H は半正定値、 $E \geq 0$
- $E = 0$ の状態 $\Leftrightarrow R\,|0.\text{g.s.}\rangle = 0$ と R で消滅する基底状態
- $E > 0$ の状態 $\Leftrightarrow (-1)^F = \pm 1$ のペアが R で互いに移り変わる:

$$R\,|E,+\rangle = \sqrt{2E}\,|E,-\rangle\,, \quad R\,|E,-\rangle = \sqrt{2E}\,|E,+\rangle$$

- 非相対論的な量子力学や格子模型でも考えることができる
  [1] E. Witten, 1982 など
- 本研究ではスピン (マヨラナフェルミオン) による格子模型で SUSY SSB の相図や厳密解を調べる
  [2-4] N. Sannomiya et al., 2016, 2017, 2019

本研究 1：超対称性の自発的破れ (SUSY SSB)

SUSY SSB の定義

- 基底状態のエネルギー密度 $E_{\mathrm{g.s.}}/L > 0 \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ SUSY SSB
  - [2-4] N. Sannomiya et al., 2016, 2017, 2019
  - 有限系では $E_{\mathrm{g.s.}} > 0$ と通常通り
    ($\Leftrightarrow R\,|\mathrm{g.s.}\rangle \neq 0$、$H$ が持つ SUSY 不変性が基底状態にはない!)

- $E_{\mathrm{g.s.}} = O(L)$ で発散し、$L \to \infty$ で $E_{\mathrm{g.s.}}$ が定義されない可能性!
- 有限系で常に $E_{\mathrm{g.s.}} > 0$ でも、無限系 $L \to \infty$ では $E_{\mathrm{g.s.}}/L \to 0$ と SUSY が回復する可能性!

  [5]E. Witten, 1982

本研究 1：

- ある超対称格子模型において、SUSY SSB の相図を調べた

本研究 2：SUSY SSB と NG フェルミオン

NG mode

- 通常の連続的対称性の SSB: NG ボゾンが出現
  非相対論での分散関係の分類理論あり
- SUSY SSB: NG フェルミオン (Goldstino) が出現
  非相対論での分散関係の分類理論がまだない

本研究 2：

- ある非相対論的な格子模型での、NG フェルミオンとみられる素励起を平均場近似で見つけた

さらに $\cdots$

- 厳密な基底状態を周期境界条件, 開放端境界条件の両方で見つけた

目次

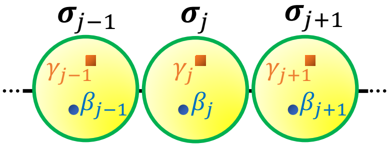
本研究で導入する模型 (1)

- 以下の 1 次元ハミルトニアン ($g \geq 0$ はパラメータ) は超対称性を持つ

$$H(g) := \frac{L}{2} + g \sum_j \underbrace{\left(\sigma^z_{j-1} - \sigma^x_j \sigma^x_{j+1}\right)}_{\text{臨界横磁場イジング}} + g^2 \sum_j \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \sigma^z_{j-1}\sigma^x_j\sigma^x_{j+1}\right)}_{\text{相互作用}}$$

- 超電荷は → のマヨラナフェルミオンを用いて

$$R(g) = \sum_j \left(\beta_j + \mathrm{i} g \beta_j \beta_{j+1} \gamma_j\right)$$



マヨラナフェルミオン:

$$\beta_j := \left(-\sigma^z_1\right)\cdots\left(-\sigma^z_{j-1}\right)\sigma^x_j$$

$$\gamma_j := \left(-\sigma^z_1\right)\cdots\left(-\sigma^z_{j-1}\right)\sigma^y_j$$

$$\{\beta_i, \beta_j\} = \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{i,j}$$

$$\{\beta_i, \gamma_j\} = 0$$

$$(-1)^F := \prod_{j=1}^{L} \left(-\sigma^z_j\right)$$

本研究で導入する模型 (2)

本研究で導入する模型 ($g \geq 0$ はパラメータ、1 次元 $S = 1/2$ スピン系)

$$H(g) := \frac{1}{2}R(g)^2 = \frac{L}{2} + g\sum_j \underbrace{\left(\sigma^z_{j-1} - \sigma^x_j\sigma^x_{j+1}\right)}_{\text{臨界横磁場イジング}} + g^2 \sum_j \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \sigma^z_{j-1}\sigma^x_j\sigma^x_{j+1}\right)}_{\text{相互作用}}$$

マヨラナフェルミオン表示では

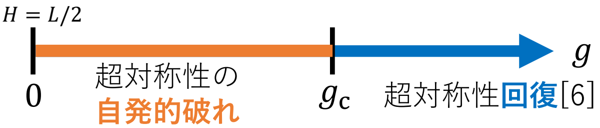
$$H(g) := \frac{1}{2}R(g)^2 = \frac{L}{2} + g\sum_j \mathrm{i}(\beta_{j+1} - \beta_j)\gamma_j + g^2 \sum_j \left(\frac{1}{2} + \beta_{j-1}\gamma_{j-1}\beta_{j+1}\gamma_j\right)$$

- 臨界点上の横磁場イジング模型に、相互作用 $\sigma^z_{j-1}\sigma^x_j\sigma^x_{j+1}$ を加えたもの
- 超対称性の手法を用いて基底状態を調べることができる

模型の SUSY SSB の相図

$$H(g) := \frac{1}{2}R(g)^2 = \frac{L}{2} + g\sum_j \left(\sigma^z_{j-1} - \sigma^x_j\sigma^x_{j+1}\right) + g^2\sum_j\left(\frac{1}{2} - \sigma^z_{j-1}\sigma^x_j\sigma^x_{j+1}\right)$$

- 周期境界条件において↓
  (無限系の SUSY SSB は境界条件によらない)



g	$H(g)$	$E_{\mathrm{g.s.}}/L$	SUSY SSB	備考
0	$L/2$	$1/2$	○	trivial
∞	$g^2\sum_j\left(\frac{1}{2} - \sigma^z_{j-1}\sigma^x_j\sigma^x_{j+1}\right)$	0	×	可解模型 [6]

[6] P. Fendley, 2019

目次

g_c の上限 1 (厳密解による上限)

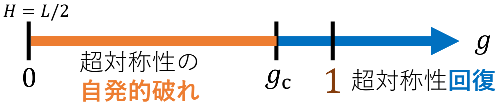
- 周期境界条件かつ $g = 1$ の場合、ハミルトニアンは以下の通り

$$H(g=1) = \sum_j \left(1 + \sigma^z_{j-1}\right)\left(1 - \sigma^x_j \sigma^x_{j+1}\right)$$

- よって以下のような trivial/topological 状態が 0 エネルギー基底状態!
- $g = 1$ で SUSY SSB は起きておらず、 $g_c < 1$!
- 超電荷による消滅条件 $R\,|0.\mathrm{g.s.}\rangle = 0$ からも理解できる

$$|\mathrm{triv}\rangle := |\cdots\downarrow\downarrow\downarrow\cdots\rangle$$

$$|\mathrm{topo}\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\cdots\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots\rangle \pm |\cdots\leftarrow\leftarrow\leftarrow\cdots\rangle\right)$$

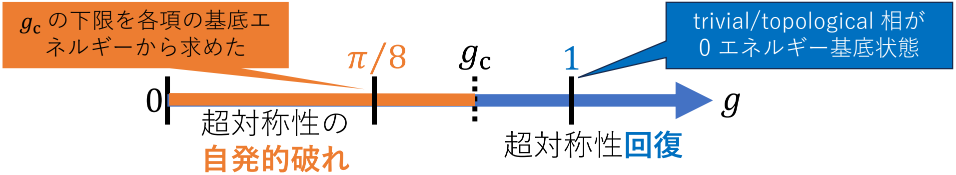


g_c の下限 $\pi/8$ (変分原理による下限)

- $H(g)$ の基底状態を $|\mathrm{g.s.}\rangle$ として変分原理より

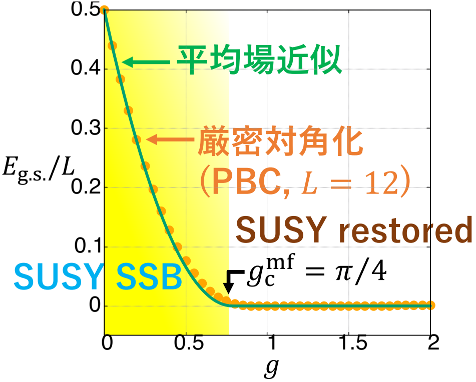
$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{g.s.}}/L &= \frac{\langle \mathrm{g.s.}|\, H(g)\, |\mathrm{g.s.}\rangle}{L} = \langle \mathrm{g.s.}| \left(\frac{1}{2} + gH_{\mathrm{free}}/L + g^2 H_{\mathrm{int}}/L \right) |\mathrm{g.s.}\rangle \\
&\geq \frac{1}{2} + gE^{\mathrm{free}}_{\mathrm{g.s.}}/L + g^2 E^{\mathrm{int}}_{\mathrm{g.s.}}/L = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{8}{\pi} g\right)
\end{aligned}
$$

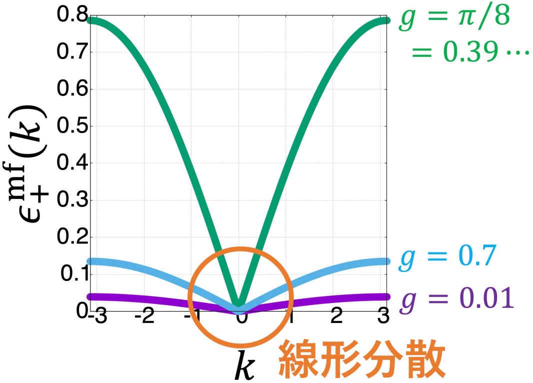
$\Rightarrow$ 少なくとも $g < \pi/8 = 0.39\cdots$ では $E_{\mathrm{g.s.}}/L > 0$ で、 SUSY SSB !



超場形式による平均場近似

- 超場形式で導入される SUSY SSB の秩序変数を用いて、SUSY SSB を自動で検知する平均場理論を構築できる





- 平均場理論での転移点 $g_c^{\mathrm{mf}} = \pi/4$ を得る
- 線形分散のバンドが $g < g_c^{\mathrm{mf}}$ でのみ出現 $\cdots$ NG フェルミオン

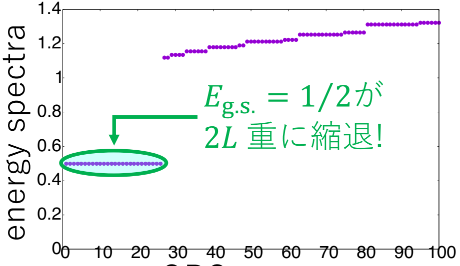
目次

開放端条件での厳密解

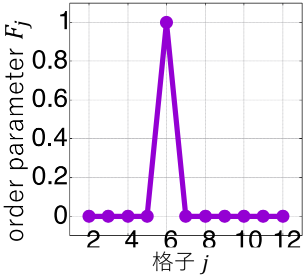
- $g=1$ で、開放端条件をとる: このとき、以下の kink 状態が基底状態 $(E_{\text{g.s.}}=1/2)$

$$\left|\cdots\downarrow\downarrow\underset{j}{\downarrow\uparrow}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots\right\rangle, \left|\cdots\downarrow\downarrow\underset{j}{\downarrow\uparrow}\leftarrow\leftarrow\leftarrow\cdots\right\rangle \quad (j=1,\cdots,L)$$

- $\uparrow$ の位置と $\rightarrow, \leftarrow$ の選び方で $2L$ 重に縮退、秩序変数も $\uparrow$ の位置に局在



OBC, $L=13$



開放端条件での厳密解 $\cdots$ kink と skink

- この kink 状態は $E_{\text{g.s.}} = 1/2 > 0$ を持ち、SUSY のペアを成している。それを見るには、kink 状態を $(-1)^F = \prod_{j=1}^{L}(-\sigma_j^z)$ の固有状態に取る:

$$|j,\text{kink}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\cdots\downarrow\downarrow\underset{j}{\downarrow\uparrow}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots\rangle + |\cdots\downarrow\downarrow\underset{j}{\downarrow\uparrow}\leftarrow\leftarrow\leftarrow\cdots\rangle\right)$$

$$|j,\text{skink}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\cdots\downarrow\downarrow\underset{j}{\downarrow\uparrow}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots\rangle - |\cdots\downarrow\downarrow\underset{j}{\downarrow\uparrow}\leftarrow\leftarrow\leftarrow\cdots\rangle\right)$$

- これらは超電荷の作用によって入れ替わる SUSY のペアを成す:

$$R(g=1)\,|j,\text{kink}\rangle = -\,|j,\text{skink}\rangle$$

$$R(g=1)\,|j,\text{skink}\rangle = -\,|j,\text{kink}\rangle$$

目次

まとめ・今後の展望

まとめ

- $g=1$ で周期境界条件を取ると、基底状態は triv/topo が縮退
- SUSY SSB の転移点 g_c の上限・下限を求めた、$\pi/8 \leq g_c \leq 1$
- 超場形式 + 平均場理論によって SUSY SSB 及び NG フェルミオンの出現を定性的に捉えた、線形分散の NG フェルミオンが出現
- $g=1$ で開放端境界条件を取ると、基底状態は kink/skink が縮退

今後の展望

- NG フェルミオンの分散の次数を諸不等式により一般に定める
- 平均場理論を空間的に不均一な秩序変数に拡張
- kink-skink 解における NG フェルミオンの出現を調べる
- Witten 指数の活用

超場形式

- マヨラナ超場 $B_j(t,\theta) := \beta_j(t) + \theta\sqrt{2}F_j(t), \quad \Gamma_j(t,\theta) := \gamma_j(t) + \theta\sqrt{2}G_j(t)$

超場による作用の表式

$$S = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\theta \sum_j \left(\frac{1}{4} B_j \mathcal{D} B_j + \frac{1}{4} \Gamma_j \mathcal{D} \Gamma_j - \frac{1}{\sqrt{2}} (B_j + \mathrm{i} g B_j B_{j+1} \Gamma_j) \right)$$

θ 積分を実行 (フェルミオンと補助場による作用の表式)

$$\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}t \sum_{j=1}^{L} \Big(&\frac{1}{4}\beta_j \mathrm{i}\dot{\beta}_j + \frac{1}{4}\gamma_j \mathrm{i}\dot{\gamma}_j + \frac{1}{2}F_j^2 + \frac{1}{2}G_j^2 \\ &- F_j\{1 + g(\mathrm{i}\beta_{j+1}\gamma_j - \mathrm{i}\beta_{j-1}\gamma_{j-1})\} - gG_j \mathrm{i}\beta_j\beta_{j+1} \Big) \end{aligned}$$

超場形式による平均場近似

- $F_j = \{R, \beta_j\}/2 = 1 + g(\mathrm{i}\beta_{j+1}\gamma_j - \mathrm{i}\beta_{j-1}\gamma_{j-1}) = 1 + g\left(\sigma^z_{j-1} - \sigma^x_j\sigma^x_{j+1}\right)$、
  $G_j = \{R, \gamma_j\}/2 = g\mathrm{i}\beta_j\beta_{j+1} = -g\sigma^y_j\sigma^x_{j+1}$
  と F_j, G_j は無限小超対称変換
- 有限系で SUSY unbroken とすると $R\,|\mathrm{g.s.}\rangle = 0, \langle\mathrm{g.s.}|\, R = 0$
  $\Rightarrow \langle F_j\rangle_{\mathrm{g.s.}} = \langle G_j\rangle_{\mathrm{g.s.}} = \langle\mathrm{g.s.}|\,\{R, *\}\,|\mathrm{g.s.}\rangle = 0$

対偶により

有限系で $\langle F_j\rangle_{\mathrm{g.s.}} \neq 0$ または $\langle G_j\rangle_{\mathrm{g.s.}} \neq 0 \Rightarrow$ SUSY SSB
有限系において、$\langle F_j\rangle_{\mathrm{g.s.}}$ や $\langle G_j\rangle_{\mathrm{g.s.}}$ は SUSY SSB の秩序変数

- 無限系でも、$\langle F_j\rangle_{\mathrm{g.s.}}$ や $\langle G_j\rangle_{\mathrm{g.s.}}$ の空間平均は秩序変数として機能