

スピンネットワークに基づく ハミルトニアン格子ヤン-ミルズ理論 の定式化

早田智也
慶應義塾大学

共同研究者:日高義将 (KEK)

文献: TH-Hidaka, arXiv:2305.05950 [hep-lat], arXiv:2306.12324 [hep-lat]

目標

$$i\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$$

QCD(YM)の時間発展を解きたい!

格子ゲージ理論

○ 格子化＋経路積分形式＋モンテカルロ

$$\langle O \rangle_{\text{QCD}} = \frac{1}{Z} \int dU e^{-S_{\text{YM}}} \det(D + m)^{N_f} O(U)$$



$$\langle O \rangle_{\text{QCD}} = \frac{1}{Z} \int dU e^{iS_{\text{YM}}} \det(iD - m)^{N_f} O(U)$$

符号問題

○ 格子化＋ハミルトニアン形式＋量子計算/TN

量子計算の形式的/技術的な困難

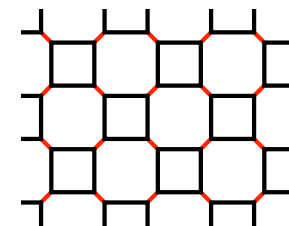
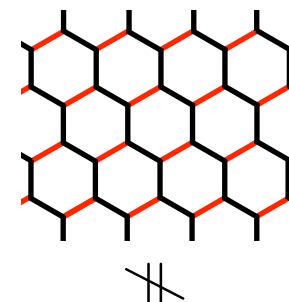
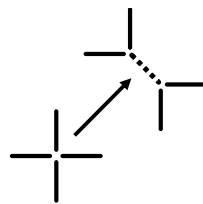
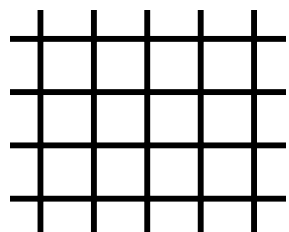
○ゲージ場のヒルベルト空間(ゲージ群)を有限自由度で近似する



○ユニタリ性の問題

- ・リンク変数 (演算子) のユニタリ性
- ・ヒルベルト空間のユニタリ同値性

$$U_a \sim \hat{S}^-$$
$$U_a U_a^\dagger \neq 1$$



○プラケット相互作用の実装の問題

量子群に基づく定式化を提案する！

SU(N)_k とグラフの変形ルールI

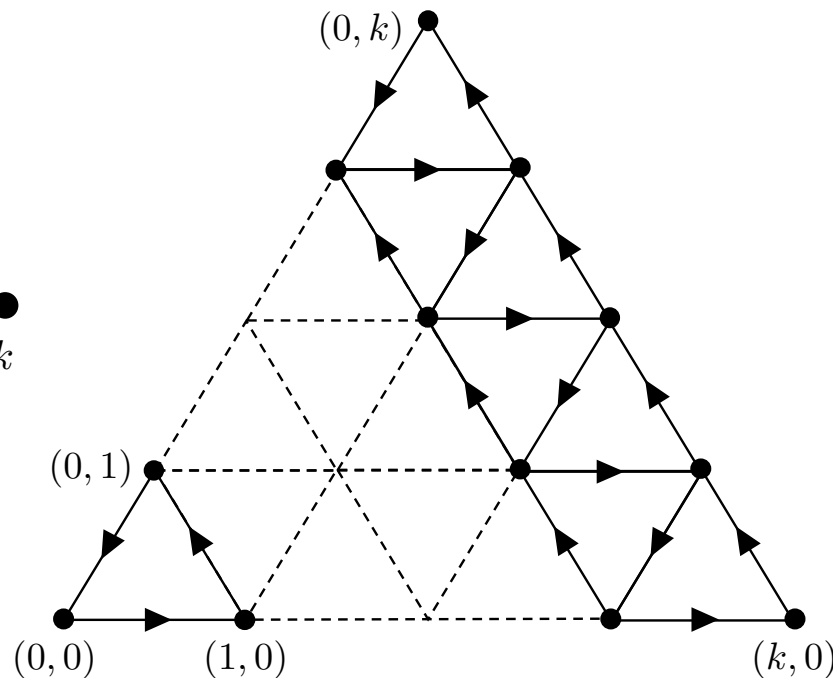
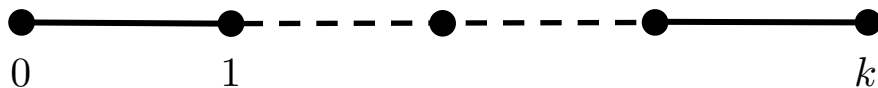
d_a 量子次元

○ Wilson line

$$\sqrt{d_a} U_a = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow a \\ \text{---} \end{array} \right.$$

$a = (p_a, q_a, \dots)$ Dynkin index

○ SU(2)_k, SU(3)_k, ...



SU(N)_k とグラフの変形ルールII

d_a 量子次元

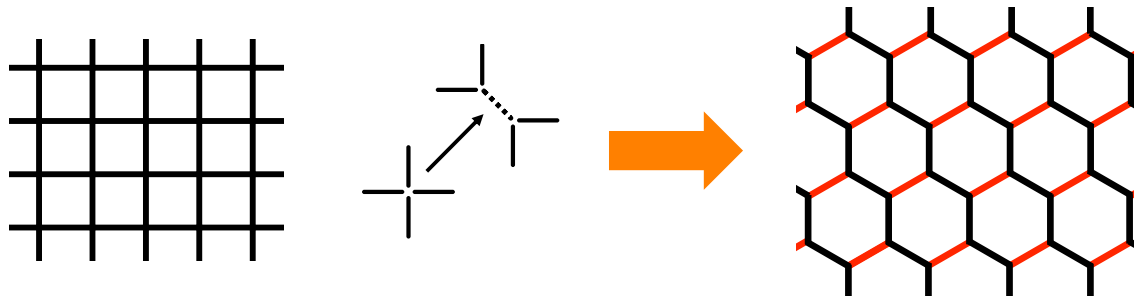
○ Wilson line

$$\sqrt{d_a} U_a = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right. a$$

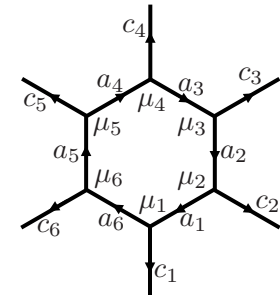
$a = (p_a, q_a, \dots)$ Dynkin index

○ 状態のグラフ表現 (2+1次元のYang-Mills理論)

重複度



$$\prod_{i=1}^6 |a_i\rangle |c_i\rangle |\mu_i\rangle =$$



・ 3点頂点にGauss law (singlet条件)を課す

SU(N)_k とグラフの変形ルールIII

d_a 量子次元

○ Wilson line

$$\sqrt{d_a} U_a = \begin{array}{c} | \\ \hline \uparrow \\ | \\ \hline \end{array} a$$

$a = (p_a, q_a, \dots)$ Dynkin index

Fusion rules

$$a \times b = \sum_c \underline{N_{ab}^c} c$$

○ 変形ルール

$$\begin{array}{c} c' \\ \uparrow \mu' \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \uparrow \mu \\ c \end{array} a \quad b = \delta_c^{c'} \delta_\mu^{\mu'} \sqrt{\frac{d_a d_b}{d_c}} \begin{array}{c} | \\ \hline \uparrow \\ | \\ \hline \end{array} c$$

$$\begin{array}{c} a \uparrow \\ | \\ b \uparrow \end{array} = \sum_{c, \mu} \sqrt{\frac{d_c}{d_a d_b}} \begin{array}{c} a \uparrow \quad b \uparrow \\ \text{---} \mu \text{---} \\ | \\ \text{---} \mu \text{---} \\ a \uparrow \quad b \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \searrow \mu \quad \swarrow \nu \\ \text{---} e \text{---} \\ \uparrow \nu \\ d \end{array} = \sum_{f, \rho, \sigma} \underline{[F_d^{abc}]}(e, \mu, \nu)(d, \rho, \sigma) \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \searrow \sigma \quad \swarrow \rho \\ \text{---} f \text{---} \\ \uparrow \sigma \\ d \end{array}$$

$SU(N)_k$ とグラフの変形ルールIV

○ ユニタリ性

$$[(F_d^{abc})^{-1}]_{(e,\mu,\nu)(d,\rho,\sigma)} = [(F_d^{abc})^\dagger]_{(e,\mu,\nu)(d,\rho,\sigma)} = [F_d^{abc}]_{(d,\rho,\sigma)(e,\mu,\nu)}^*$$

○ pentagon方程式

$$\begin{aligned} & \sum_{\delta} [F_e^{fcd}]_{(g,\beta,\gamma)(l,\nu,\delta)} [F_e^{abl}]_{(f,\alpha,\delta)(k,\mu,\lambda)} \\ &= \sum_{h,\sigma,\psi,\rho} [F_g^{abc}]_{(f,\alpha,\beta)(h,\psi,\sigma)} [F_e^{ahd}]_{(g,\sigma,\gamma)(k,\rho,\lambda)} [F_k^{bcd}]_{(h,\psi,\rho)(l,\nu,\mu)} \end{aligned}$$

- ・ ‘格子間’のユニタリ同値性を保証する

量子群に基づく格子ゲージ理論の定式化

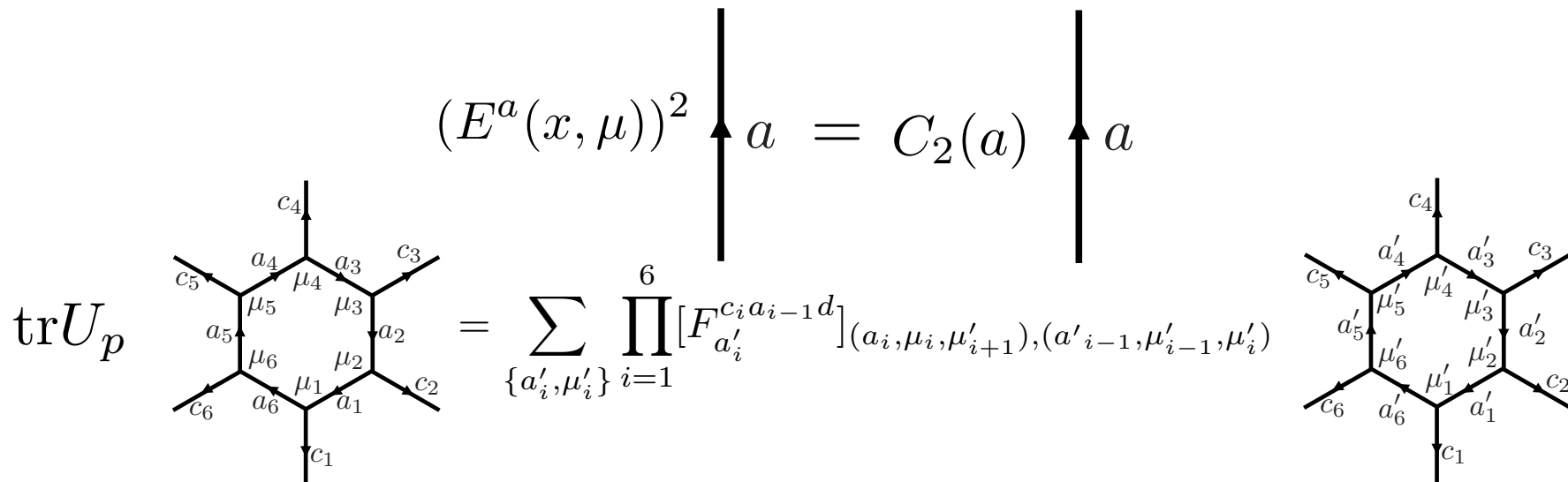
○ Kogut-Susskindハミルトニアン

$$K = 1/g^4$$

$$H = \sum_{\mathbf{x}, \mu} \frac{1}{2} E^{a^2}(\mathbf{x}, \mu) - \frac{K}{2} \sum_{p \in P} (\text{tr} U_p + \text{tr} U_p^\dagger)$$

○ 状態への作用(ハニカム格子を採用)

TH-Hidaka, arXiv:2306.12324 [hep-lat]



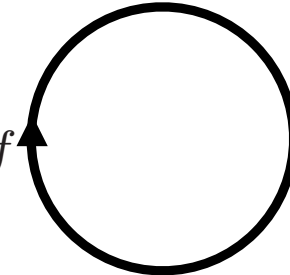
平均場近似

TH-Hidaka, arXiv:2306.12324 [hep-lat]

○ 変分波動関数

$$|\Psi\rangle = \prod_{f \in \mathcal{F}} \sum_{a_f} \psi(a_f) \text{tr} U_{a_f}(f) |\Psi_0\rangle$$

○ 状態への作用

$$\text{tr} U_{b_f}(f) |\Psi_0\rangle = b_f \text{tr} U_{b_f}(f) |\Psi_0\rangle$$


○ グラフ(fusion rulesだけ)を使って期待値を計算できる

平均場近似

TH-Hidaka, arXiv:2306.12324 [hep-lat]

○有効ハミルトニアン

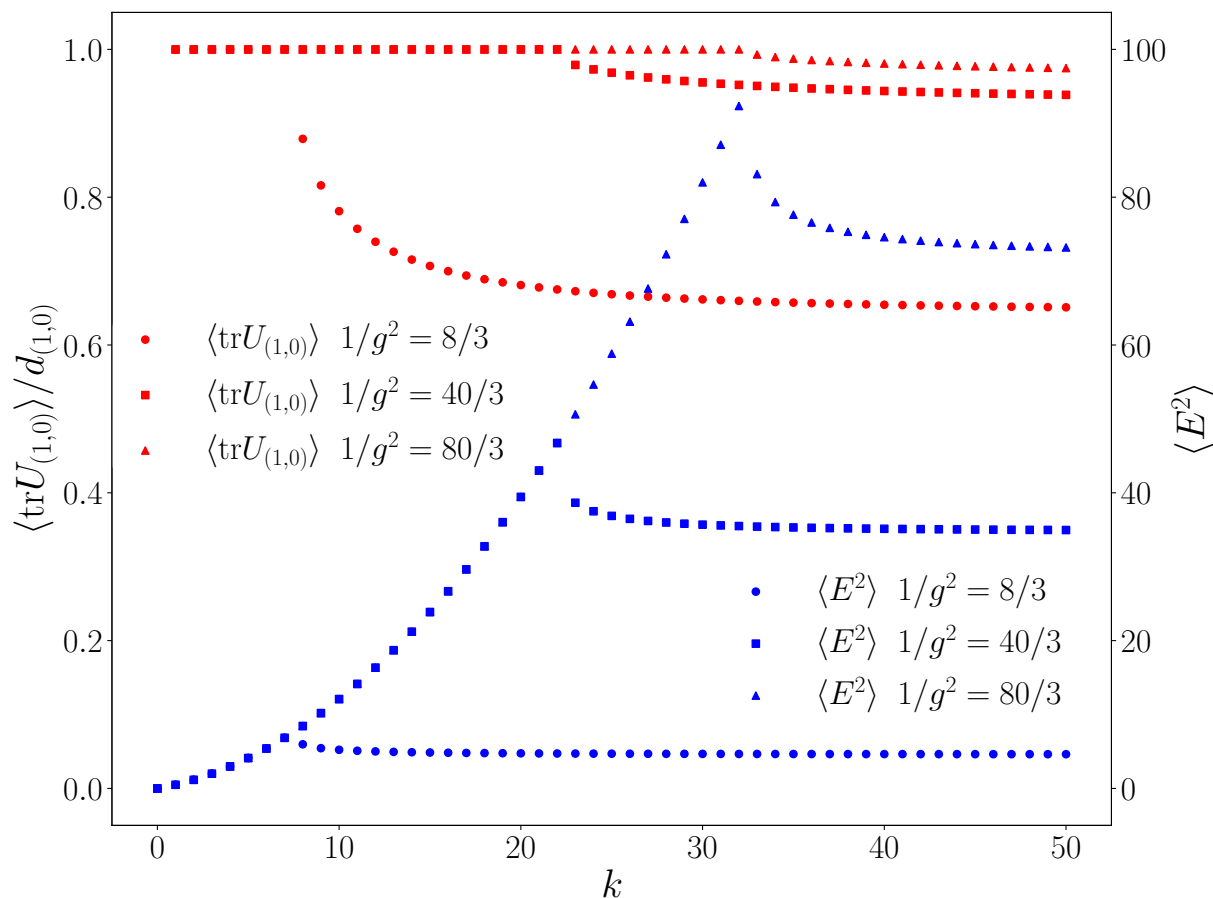
$$\mathcal{H} = \sum_{a,b,c} C_2(c) N_{\bar{a}b}^c \frac{d_c}{d_a d_b} |\psi(a)|^2 |\psi(b)|^2 - \frac{K}{2} \sum_{a,b} \psi^*(a) \left(M_{ab} + M_{ab}^\dagger \right) \psi(b)$$

○時間依存Ginzburg-Landau方程式 $M_{ab} = N_{(1,0)b}^a$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \psi(\tau, a) = & - \sum_{b,c} (C_2(c) N_{\bar{a}b}^c \frac{d_c}{d_{\bar{a}} d_b} |\psi(\tau, b)|^2 \psi(\tau, a) + C_2(c) N_{\bar{b}a}^c \frac{d_c}{d_a d_{\bar{b}}} |\psi(\tau, b)|^2) \\ & + \frac{K}{2} \sum_{a,b} \left(M_{ab} + M_{ab}^\dagger \right) \psi(\tau, b) - \Lambda \left(\sum_b |\psi(\tau, b)|^2 - 1 \right) \psi(\tau, a) \end{aligned}$$

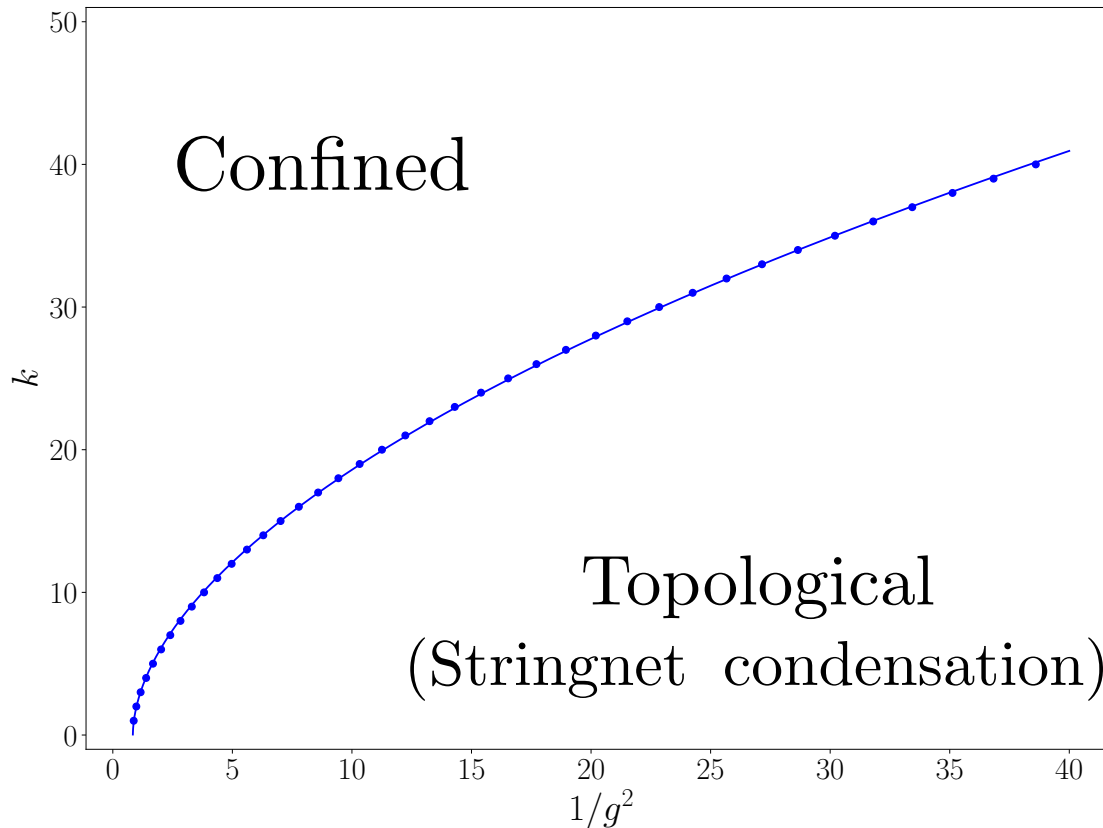
○2+1次元のSU(3)_kの基底状態を調べた

Cutoff依存性の検証



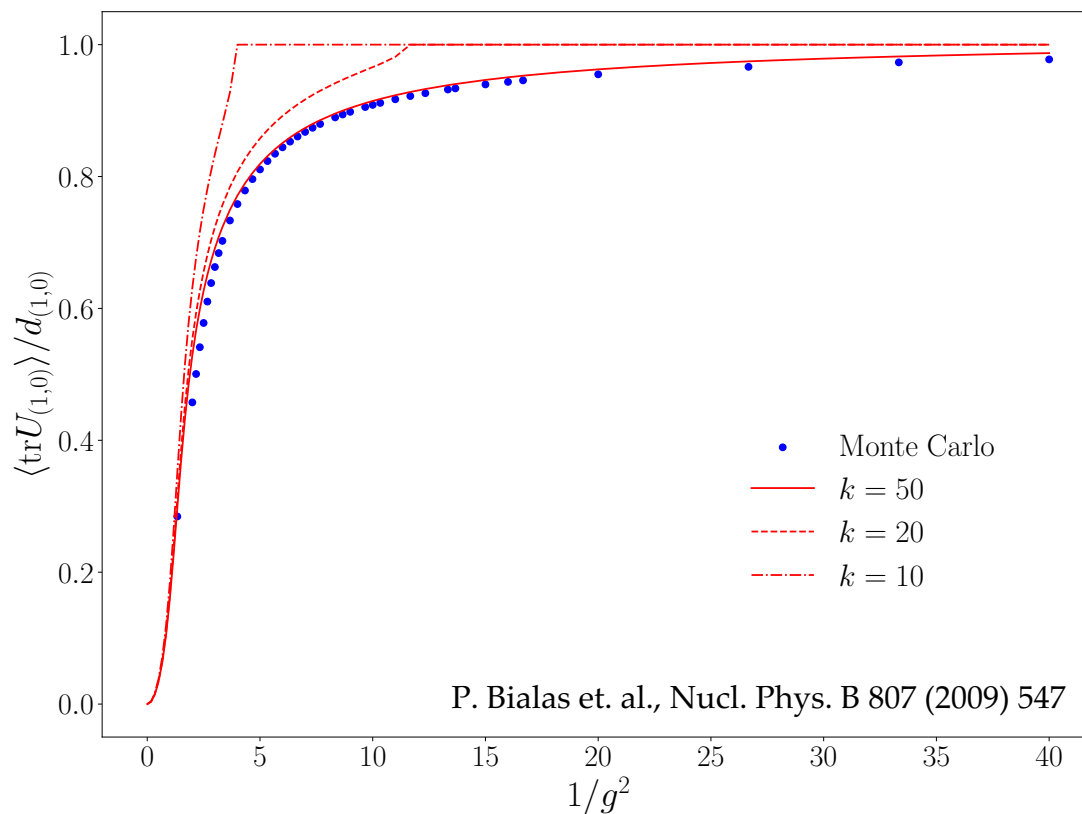
- cutoffを臨界値より十分大きくとって外挿するが必要ある

相図



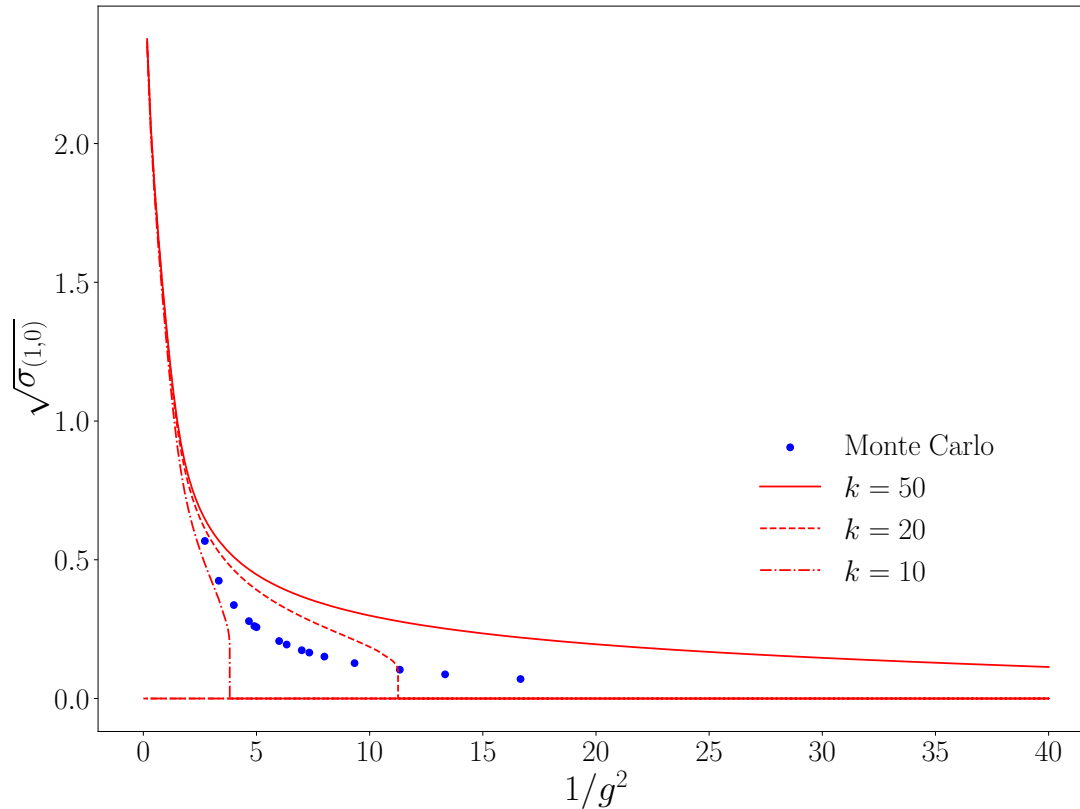
- ゲージ群の有限自由度による近似に伴う人工的な相転移
- 外挿時のcutoff依存性に気を付ける必要がある

モンテカルロ計算との比較



- cutoffを大きくとればモンテカルロの結果に近づく
- 平均場が定量的にも使えることが分かった

張力の結合定数依存性

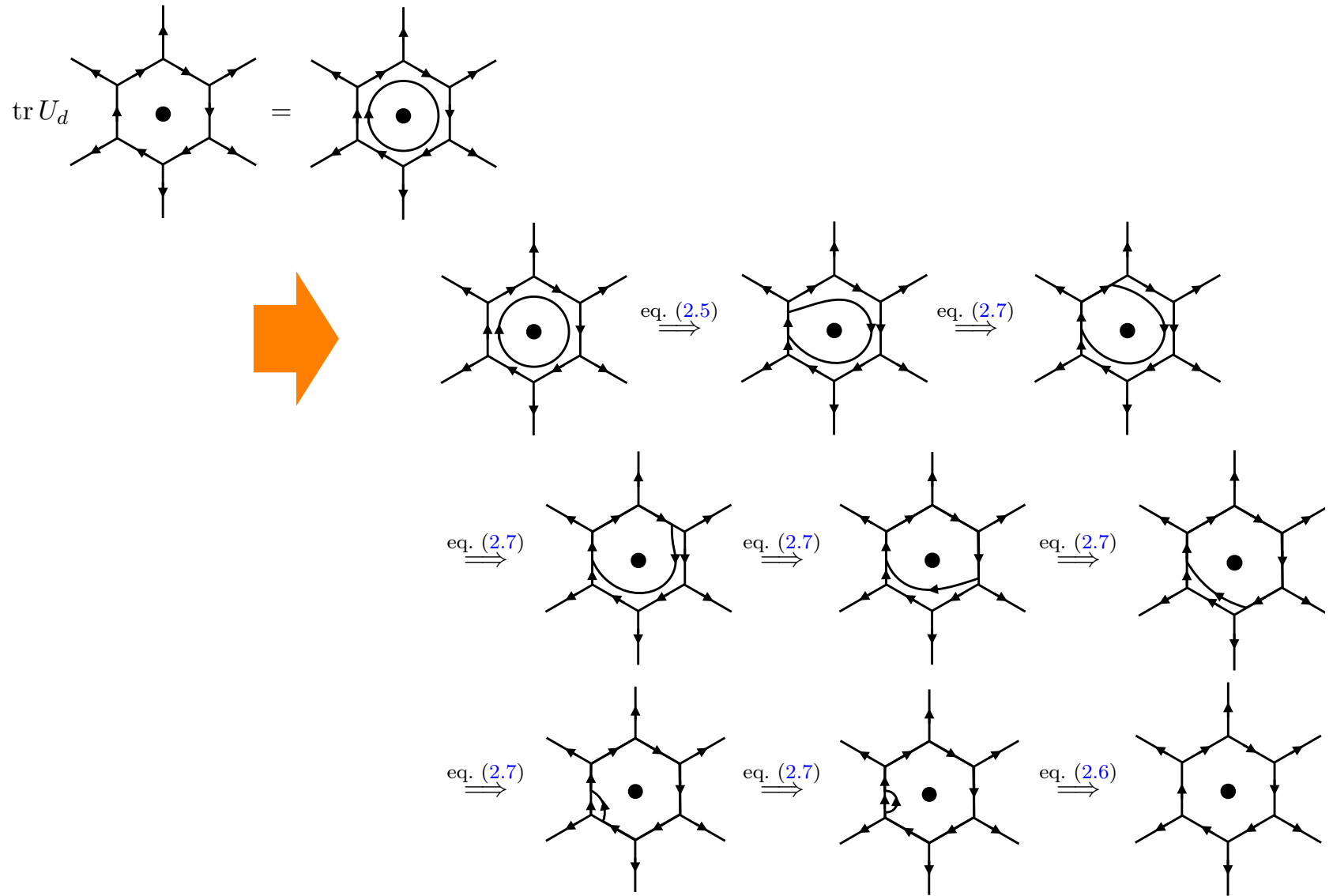


- 面積則を示せたが定量的には不十分
- 平均場の限界 (Wilson loop同士が相関していない)

まとめ

- 量子群に基づく定式化を整備した
 - ・ Wilson loop = ユニタリ演算子
 - ・ Yang-Mills理論の効率的な実装 → F moveの効率的な実装
 - ・ 平均場近似を用いたcutoff依存性の解析
- 今後の展望
 - ・ 平均場近似の改善
 - ・ 量子計算機/テンソルネットワークを用いた計算の実装
 - ・ 時間依存平均場近似による非平衡状態の計算
 - ・ 3+1次元への拡張
 - ・ 量子群ゲージ理論のダイナミクス
 - ・ フェルミオン

Wilson loopの計算 I



Wilson loopの計算 II

$$\langle \text{tr } U_d(\partial S) \rangle$$

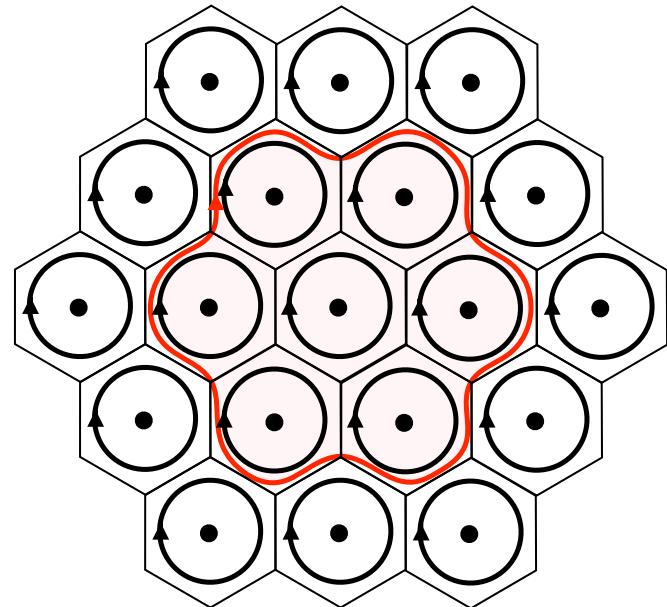
$$= \langle \Psi_0 | \text{tr } U_d(\partial S) \left(\prod_{f \in \mathcal{F}} \sum_{a_f, b_f} \psi^*(a_f) \psi(b_f) \text{tr } U_{\bar{a}_f}(f) \text{tr } U_{b_f}(f) \right) | \Psi_0 \rangle$$

$$\text{tr } U_{b_f}(f) | \Psi_0 \rangle = b_f \circlearrowleft$$

$$= \sum_{\{a\}, \{b\}, \{c\}} \left(\prod_{f' \in \mathcal{F}} \psi^*(a_{f'}) \psi(b_{f'}) N_{\bar{a}_{f'}, b_{f'}}^{c_{f'}} \right) \langle \Psi_0 | \text{tr } U_d(\partial S) \prod_{f \in \mathcal{F}} \text{tr } U_{c_f}(f) | \Psi_0 \rangle$$

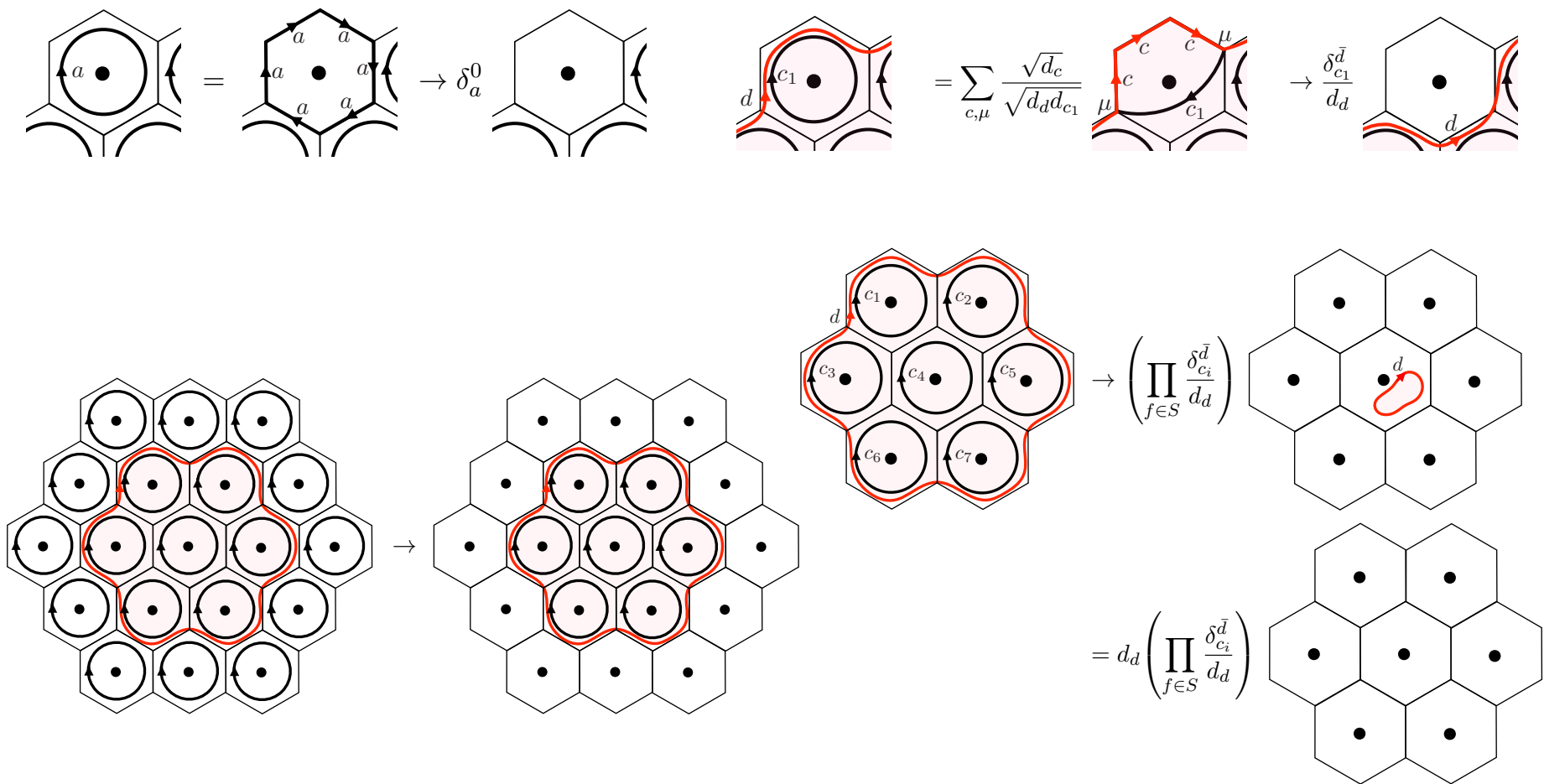


$$U_d(\partial S) \prod_{f \in \mathcal{F}} \text{tr } U_{c_f}(f) | \Psi_0 \rangle =$$



$|\Psi_0\rangle$ と内積をとる

Wilson loopの計算 III



内側のWilson loopの数を数える

Wilson loopの計算 IV

$$\langle \text{tr } U_d(\partial S) \rangle$$

$$= \langle \Psi_0 | \text{tr } U_d(\partial S) \left(\prod_{f \in \mathcal{F}} \sum_{a_f, b_f} \psi^*(a_f) \psi(b_f) \text{tr } U_{\bar{a}_f}(f) \text{tr } U_{b_f}(f) \right) | \Psi_0 \rangle$$

$$\text{tr } U_{b_f}(f) | \Psi_0 \rangle = b_f \circlearrowleft$$

$$= \sum_{\{a\}, \{b\}, \{c\}} \left(\prod_{f' \in \mathcal{F}} \psi^*(a_{f'}) \psi(b_{f'}) N_{\bar{a}_{f'} b_{f'}}^{c_{f'}} \right) \langle \Psi_0 | \text{tr } U_d(\partial S) \prod_{f \in \mathcal{F}} \text{tr } U_{c_f}(f) | \Psi_0 \rangle$$



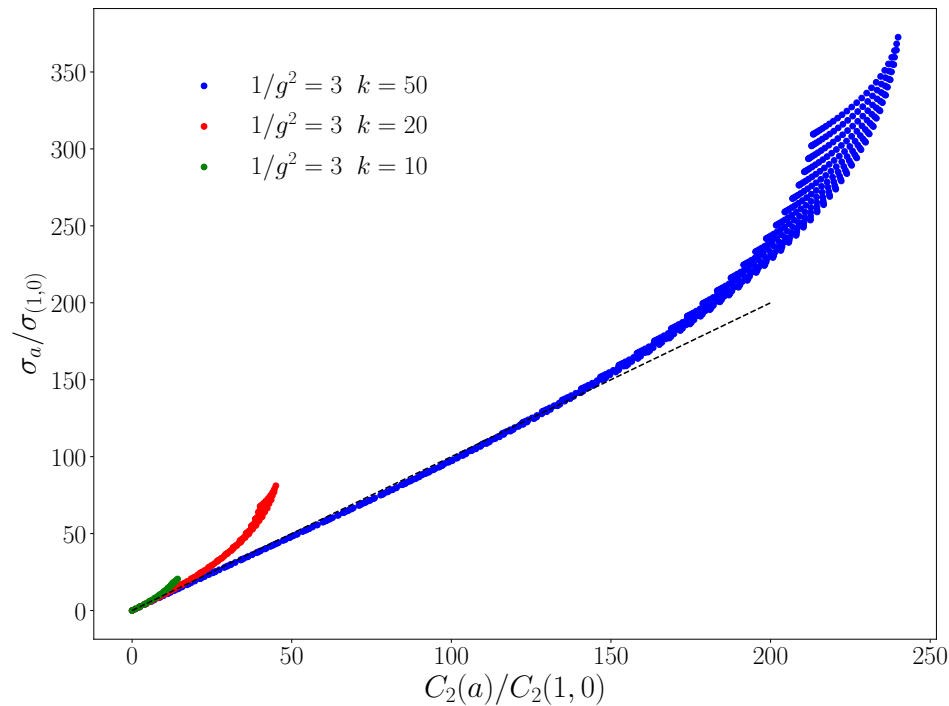
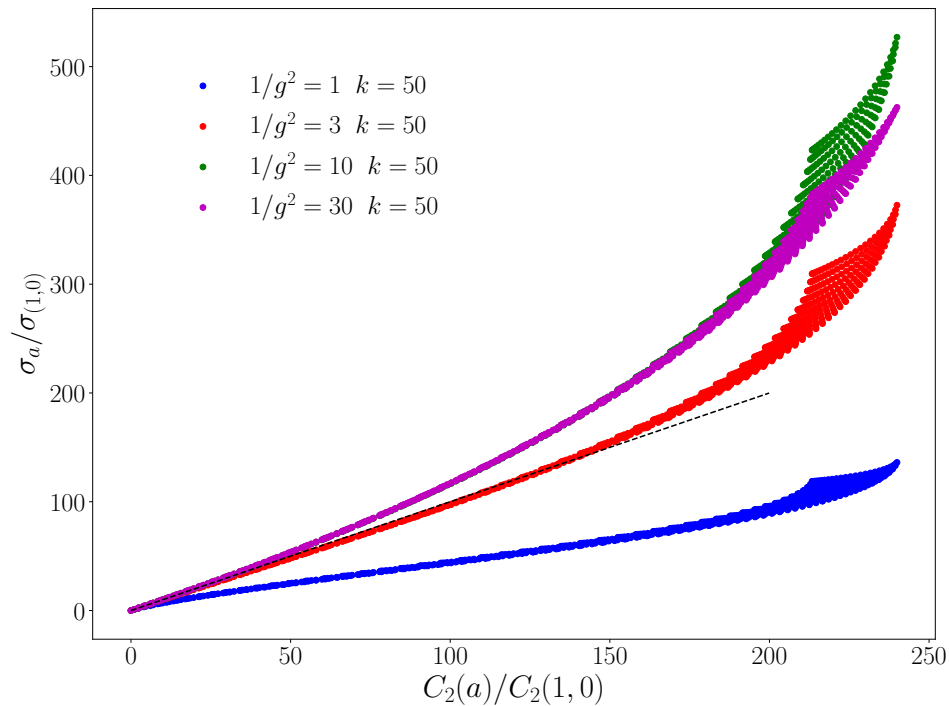
$$\langle \text{tr } U_d(\partial S) \rangle = d_d \prod_{f \in S} \sum_{a_f, b_f, c_f} \psi^*(a_f) \psi(b_f) N_{\bar{a}_f b_f}^{c_f} \frac{\delta_{c_f}^{\bar{c}_f}}{d_d}$$

$$= d_d \left(\frac{\sum_{a,b} N_{db}^a \psi^*(a) \psi(b)}{d_d} \right)^{|S|}$$

$$= d_d \exp(-|S| \sigma_d)$$

$$\sigma_d := \ln \frac{d_d}{\sum_{a,b} N_{db}^a \psi^*(a) \psi(b)}$$

Casimir scalingの検証



- 弱結合/強結合極限から離れた状態
- cutoff依存性が見えない表現

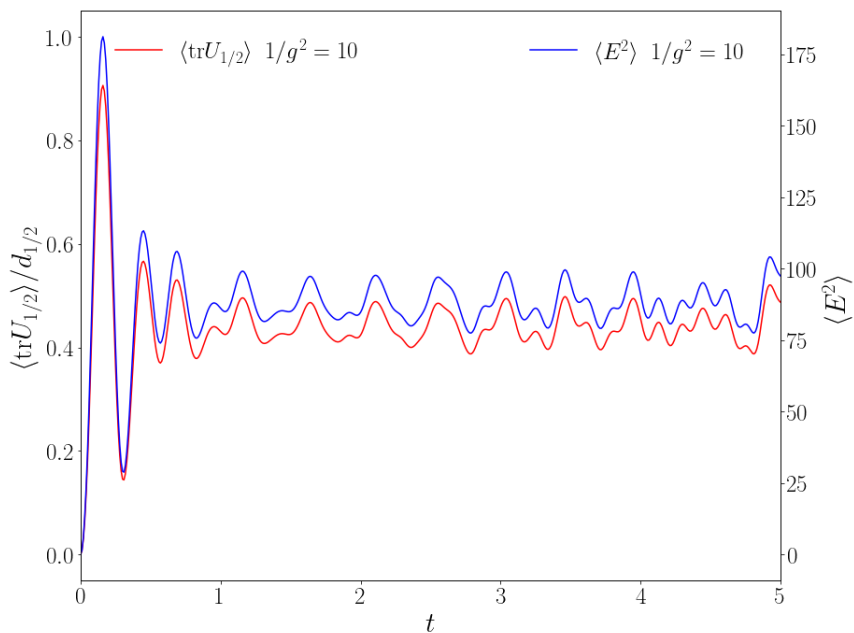
$$\sigma_a \propto C_2(a)$$

On going

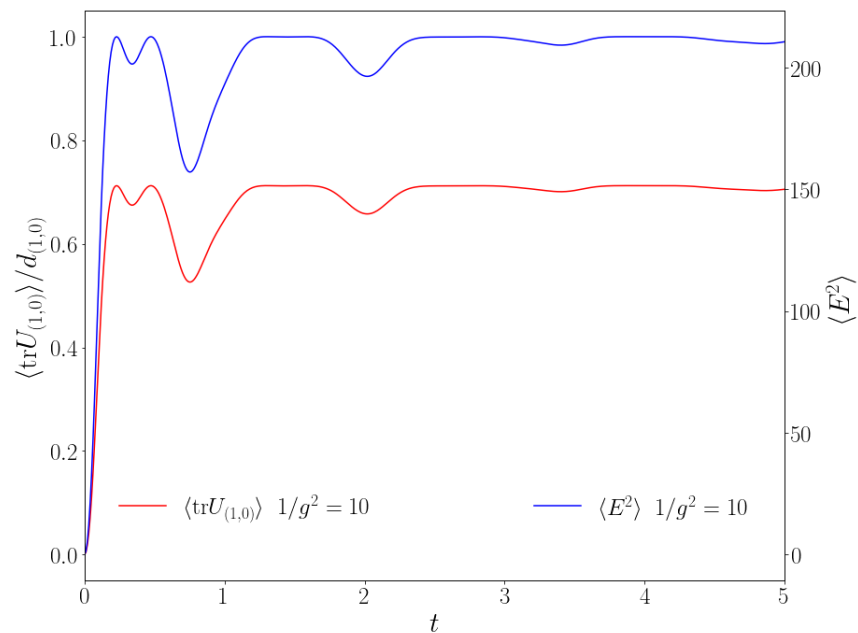
○ 量子クエンチ

cf. TH-Hidaka (KEK), PRD 103, 094502 (2021)

SU(2)



SU(3)



熱化？

On going II

○ 量子クエンチ[SU(2)]

cf. TH-Hidaka (KEK), PRD 103, 094502 (2021)

