

# 高次対称性と固有状態熱化仮説

福島 理

京都大学 素粒子論研究室

Aug. 28, 2023

熱場の量子論とその応用,  
高エネルギー加速器研究機構

Based on arXiv: 2305.04984

[O.F., Ryusuke Hamazaki]

- **熱化 (熱平衡への遷移):**

非典型的な状態から

$$\langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle \neq \text{tr}(\mathcal{O} \rho_{\text{thermal}})$$

典型的な状態への遷移

$$\langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle = \text{tr}(\mathcal{O} \rho_{\text{thermal}})$$

➡ (量子/古典)多体系の普遍的な性質

以下の非自明な点:

- どのような系のどのような初期状態が平衡状態へと緩和するか,
- 熱化するとして、どのような統計アンサンブルが実現されるか.

熱化の過程は一般にこれらの詳細のデータに非常に依存する。

このトークでのmotivation

場の量子論(QFT)の非自明な熱化過程

- 高次対称性が熱化にどのような影響を与えるか?

実時間発展への帰結

- 非局所保存量(\*)がある時、どのような観測量が非自明な熱平衡状態を区別するか?

局所保存量がある時、非自明な熱平衡アンサンブルが実現することが知られている。

孤立量子系における熱化:

散逸のない量子系はユニタリ時間発展をする.

⇒ 非熱的な状態は時間発展しても非熱的なまま?  
?

- 一つの理解の仕方: 演算子の期待値のレベルで考える

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\langle \psi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle} = \text{tr}(\mathcal{O} \rho_{\text{thermal}})$$

時間平均 熱平衡における統計平均

十分条件:

(強い) 固有状態熱化仮説 (ETH)

[Deutsch, Phys. Rev. A 43(1991); Srednicki, Phys. Rev. E 50(1994)...]

← **全てのエネルギー固有状態は熱的である**

## Our work

- $(d + 1)$ 次元のQFTが $p$ 次対称性を持ち、いくつかの仮定を満たす時、以下を示した(\*):

$(d-p)$ -次元の観測量がETHを破る。

➡ 系が必ずしも、標準的なカノニカルアンサンブルに緩和するとは限らない。

- 上記の主張を $(2+1)$ 次元の $\mathbb{Z}_2$ 格子ゲージ理論を例に取り、数値的に立証した。

特に、結果的な熱平衡は、 $\mathbb{Z}_2$ 1-次対称性を考慮した一般化Gibbsアンサンブルによって記述される。

**Note:**  $(2+1)$ 次元 $\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論は電氣的 $\mathbb{Z}_2$ 1-次対称性を持ち、条件(\*)を満たしている。

# Contents

5/20

- **Introduction (4)**
- **Eigenstate thermalization hypothesis (2)**
- **Higher-form symmetry (2)**
- **ETH breaking by higher-form symmetry (3)**
- **ETH breaking in  $\mathbb{Z}_2$  lattice gauge theory (4)**
- **Generalized Gibbs ensemble for higher-form symmetry (3)**
- **Summary and outlook (1)**

# Eigenstate thermalization hypothesis

6/20

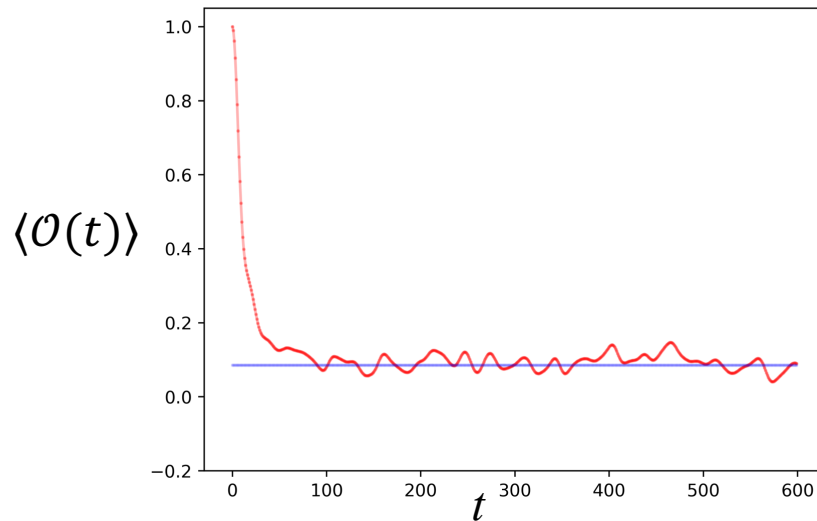
一般に以下は系の詳細や初期状態に依存する:

①全ての初期状態はある定常状態に緩和するか?

$$\delta O^2 := \overline{\langle O \rangle^2} - (\overline{\langle O \rangle})^2 \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

②緩和するとして、その長時間平均は熱的アンサンブルで記述されるか?

$$\overline{\langle O \rangle} \simeq \langle O \rangle_{\text{eq}}$$



① ← 非対角的 ETH

② ← 対角的 ETH

\* 以下このトークでは、対角的ETHを単にETHと呼ぶ。

一旦ETHを仮定すると、初期条件に依存せずに熱化が起こる

# Eigenstate thermalization hypothesis

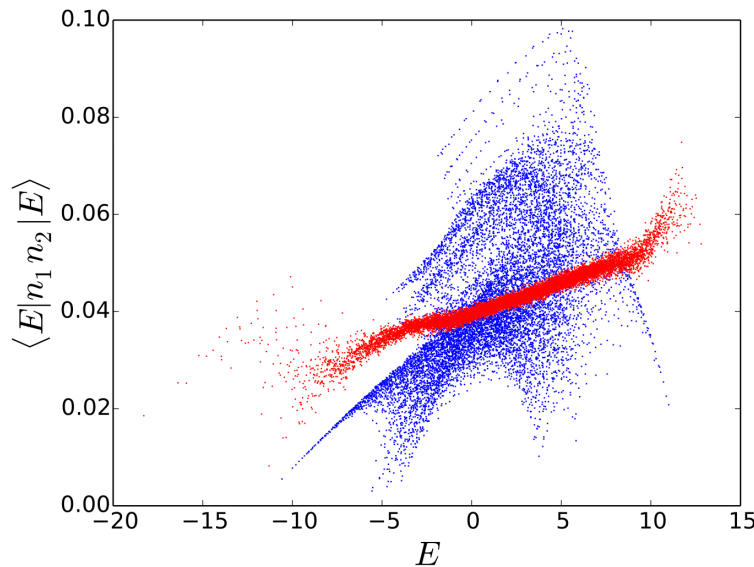
7/20

Let  $|\psi(0)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |E_{\alpha}\rangle$  ( $H|E_{\alpha}\rangle = E_{\alpha}|E_{\alpha}\rangle$ : energy eigenstates),  
(簡単のため、ハミルトニアンの縮退は無いと仮定する。)

$$\overline{\langle \mathcal{O} \rangle} = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 \langle E_{\alpha} | \mathcal{O} | E_{\alpha} \rangle$$

**(Diagonal) ETH**

$$\langle E_{\alpha} | \mathcal{O} | E_{\alpha} \rangle(E) \simeq \text{tr}(\mathcal{O} \rho_{\text{micro canonical}}(E))$$



e.g.) Hard core boson:

blue: integrable  $\rightarrow$  ETH  $\times$

red: non-integrable  $\rightarrow$  ETH  $\checkmark$



# Higher-form symmetry

8/20

## トポロジカル演算子

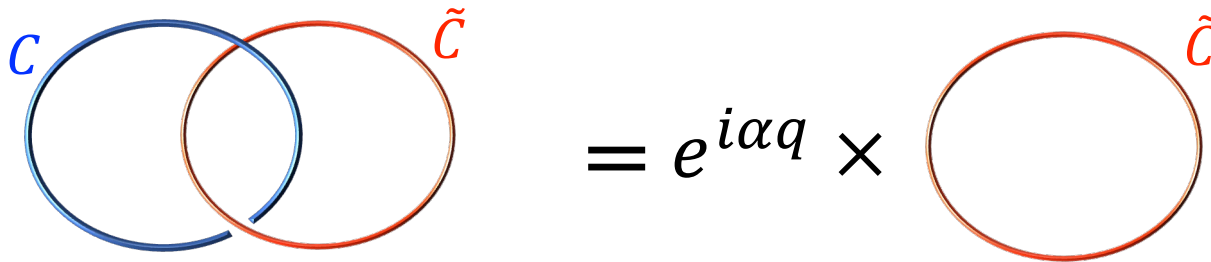
- $p$ -次対称性はcodimension- $(p + 1)$ の対称性演算子で特徴づけられる

$(d + 1)$ 次元のQFTでは、

$$\langle \underline{U_\alpha(C)} \underline{W(\tilde{C})} \dots \rangle = e^{i\alpha q} \langle \underline{W(\tilde{C})} \dots \rangle$$

対称性演算子:  
 $(d - p)$ -dimensional

Charged operator:  
 $p$ -dimensional


$$= e^{i\alpha q} \times \text{red circle } \tilde{C}$$

相関関数は $C$ の連続変形の下で不変。

- 高次対称性は $G$  group structureを持つ。(G: abelian group)

$$U_\alpha(C)U_\beta(C) = U_{\alpha+\beta}(C)$$

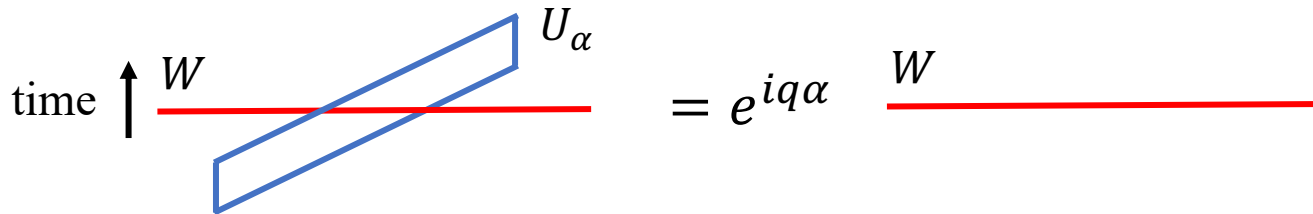
# Higher-form symmetry

9/20

## Hilbert空間への作用

- 演算子  $U_\alpha(C)$  や  $W(\tilde{C})$  ヒルベルト空間への作用を考える。

(space-like symmetry [[Goranta-Lam-Seiberg-Shao, 2201.10589](#)]):



➔  $U_\alpha^\dagger(C_x)W(C_y)U_\alpha(C_x) = e^{iq\alpha}W(C_y) \quad C_x, C_y \subset \mathcal{M}: \text{space manifold}$

Topological nature of  $U_\alpha \quad \Rightarrow \quad [H, U_\alpha] = 0$

# ETH breaking by higher-form symmetry

10/20

## Setup

時空多様体  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$  上で定義された  $(d + 1)$ -次元 QFT を考える。

ハミルトニアン  $H$  は非縮退。

系が  $p$ -次対称性 with the symmetry operator  $U_\alpha(C)$  を持つ。

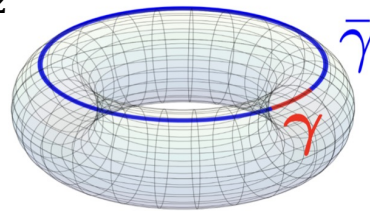
## Main claim

適切な仮定(\*)を満たされていれば、

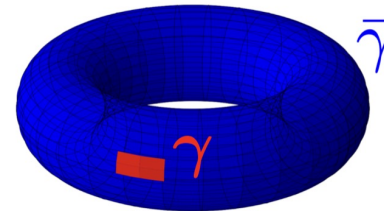
演算子  $U_\alpha(\gamma)$  か  $U_\alpha(\bar{\gamma})$  (あるいは両方) が ETH を破る。

$\gamma, \bar{\gamma}$ :  $(d - p)$ -d manifold with boundary, s.t.  $\gamma \cup \bar{\gamma} = \tilde{C} \subset \mathcal{M}$

e.g.)  $\mathcal{M} = T^2$



$p = 1$



$p = 0$

演算子  $U(\gamma)/U(\bar{\gamma})$  は必ずしも通常のカノニカルアンサンブルに緩和しない。

# ETH breaking by higher-form symmetry

11/20

## Main claim

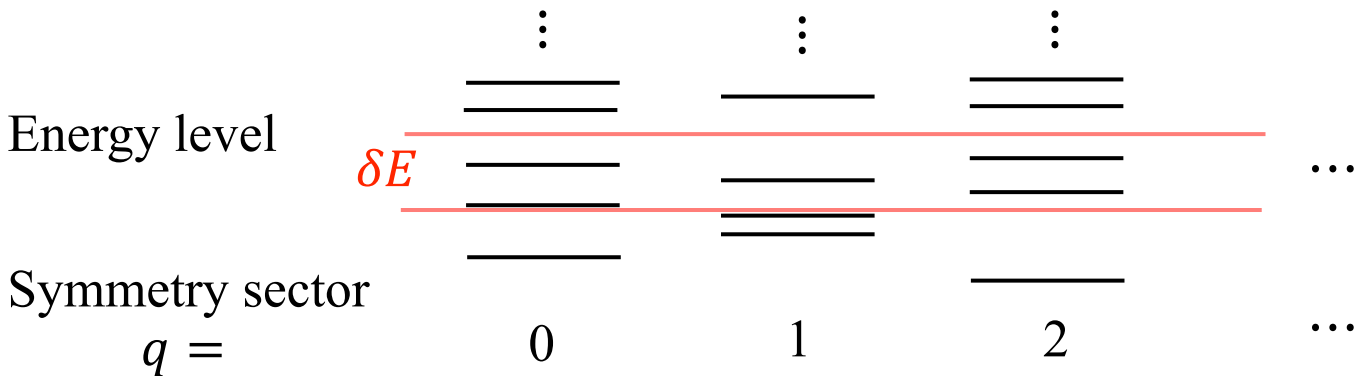
適切な仮定(\*)を満たされていれば、演算子  $U_\alpha(\gamma)$  か  $U_\alpha(\bar{\gamma})$  (あるいは両方) がETHを破る。  
( $\gamma \cup \bar{\gamma} = \tilde{C} \subset \mathcal{M}$ )

## Assumptions:

i) 演算子  $U_\alpha(\tilde{C})$  が分解できる:  $U_\alpha(\tilde{C}) = U_\alpha(\gamma)U_\alpha(\bar{\gamma})$ .

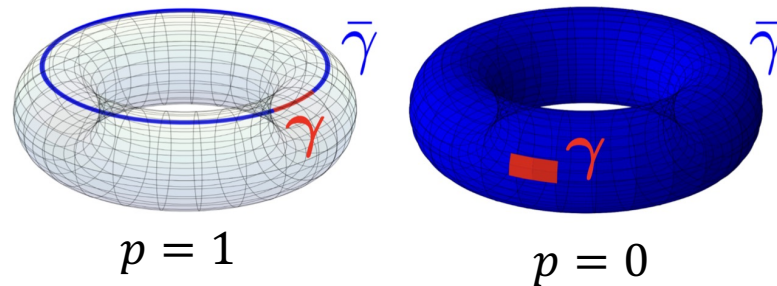
ii) エネルギー固有状態  $|E_n\rangle, |E_m\rangle$ , with  $E_n, E_m \in [E, E + \delta E]$ ,  
s.t.  $\langle E_n | U_\alpha(\tilde{C}) | E_n \rangle \neq \langle E_m | U_\alpha(\tilde{C}) | E_m \rangle$  が存在する。

iii) マイクロカノニカルアンサンブルでの期待値  $\langle U_\alpha(\tilde{C}) \rangle_{\text{mc}}^{\delta E} \neq 0$ .



## Comments

- この結果は  $p \geq 1$  の時、特に非自明である。なぜならETHの破れは“bath”の小ささゆえでないから。



- 一般化:  
 $A(g)U_\alpha(\gamma)$  か  $A(g)^\dagger U_\alpha(\bar{\gamma})$  がETHを破る。  
 $A(g)$ : operator defined on a region  $g(\subset \mathcal{M})$  with  $g \cap \bar{\gamma} = \phi$   
➡ ある固定した $\gamma$ に対して、多くのETHを破る演算子が存在する。

# ETH breaking in $\mathbb{Z}_2$ lattice gauge theory

13/20

**Model** (2+1)次元  $\mathbb{Z}_2$  格子ゲージ理論 ←  $\mathbb{Z}_2$  電氣的1-次対称性を持つ  
空間多様体  $\mathcal{M}$  は 2-torus  $T^2$

**Hamiltonian** [Fradkin-Susskind, Phys. Rev. D, 17(1978)]

$$H_{\mathbb{Z}_2} = - \sum_{p \in \text{plaquette}} \lambda_p B_p - \sum_{b \in \text{link}} \lambda_b \sigma_b^x$$

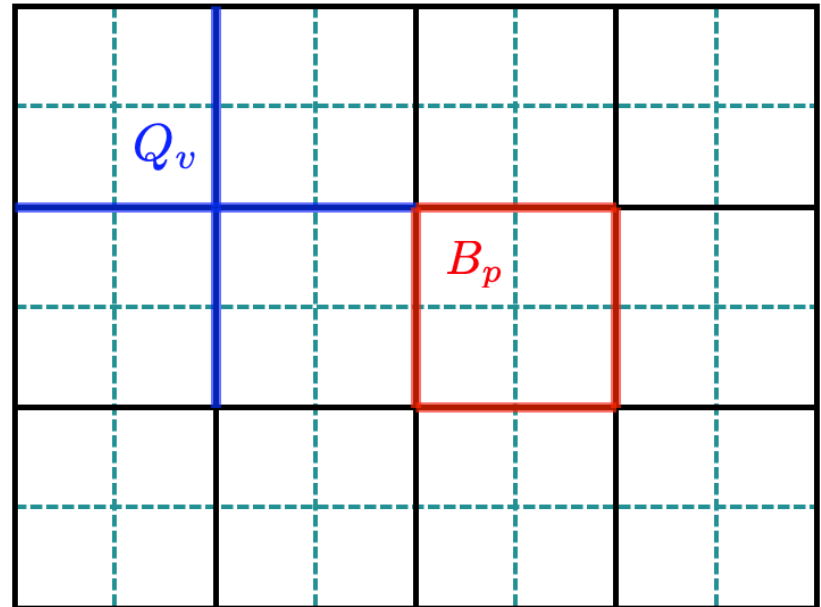
$$B_p := \prod_{b \in \text{plaquette } p} \sigma_b^z$$

**Physical Hilbert space**

Gauss law constraint:

$$Q_v := \prod_{\substack{b: \text{spatial link} \\ b \ni v}} \sigma_b^x = 1$$

物理的なHilbert spaceに対する拘束



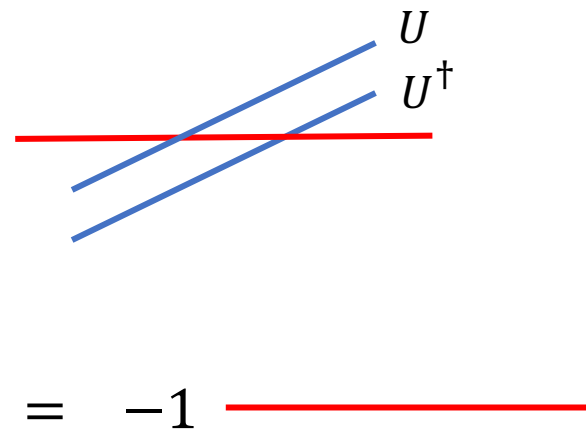
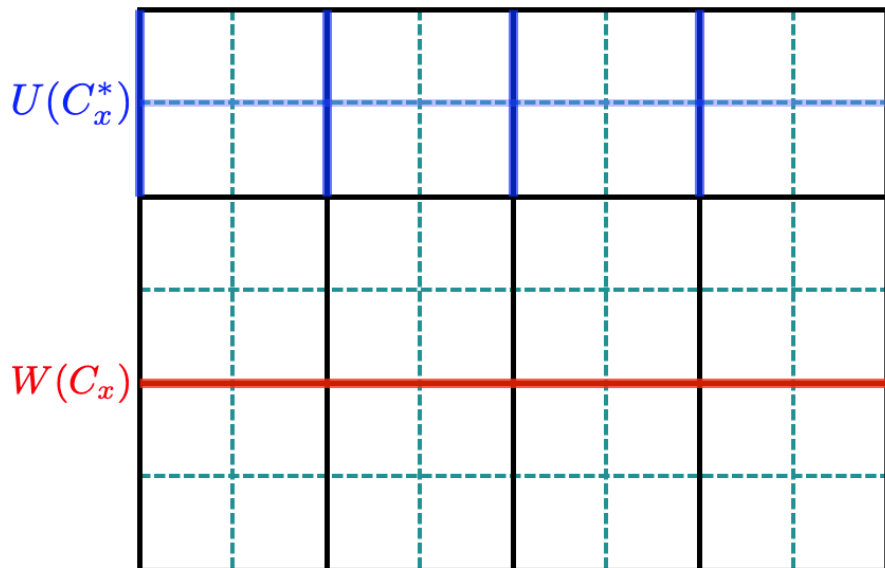
# ETH breaking in $\mathbb{Z}_2$ lattice gauge theory

- Wilson line  Charged object under the  $\mathbb{Z}_2$  1-form symmetry

$$W(C) := \prod_{b \in C} \sigma_b^z \quad \Rightarrow W(C)^2 = 1$$

- Symmetry operator ('t Hooft operator)

$$U(C^*) := \prod_{b^* \in C^*} \sigma_{b^*}^x \quad \Rightarrow U(C^*)^2 = 1$$



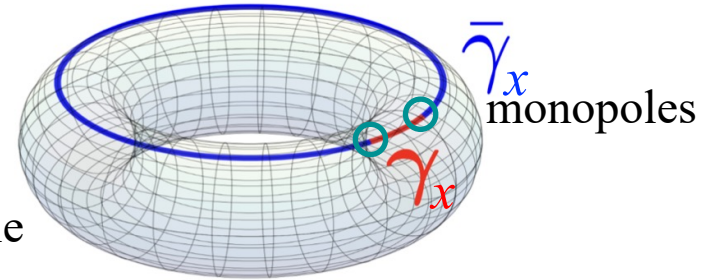
# ETH breaking in $\mathbb{Z}_2$ lattice gauge theory

対称性演算子は端点をもつ

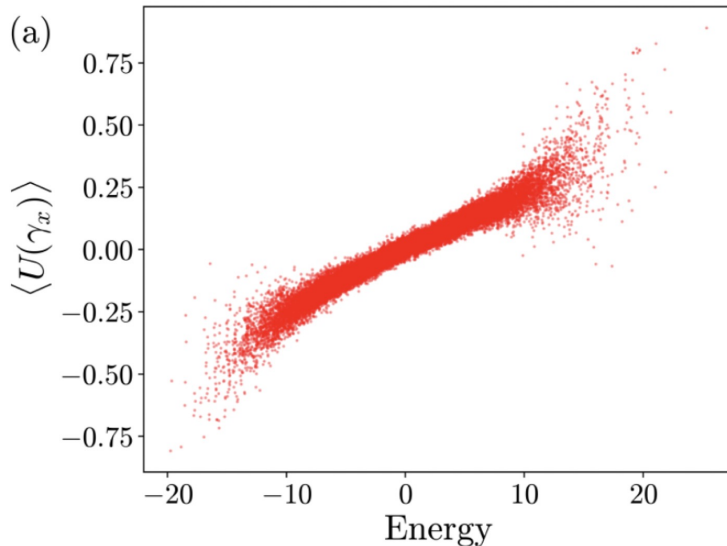
$$U(\bar{\gamma}_x) := \prod_{b^* \in \bar{\gamma}_x} \sigma_{b^*}^x$$

$\bar{\gamma}_x$  : open curve

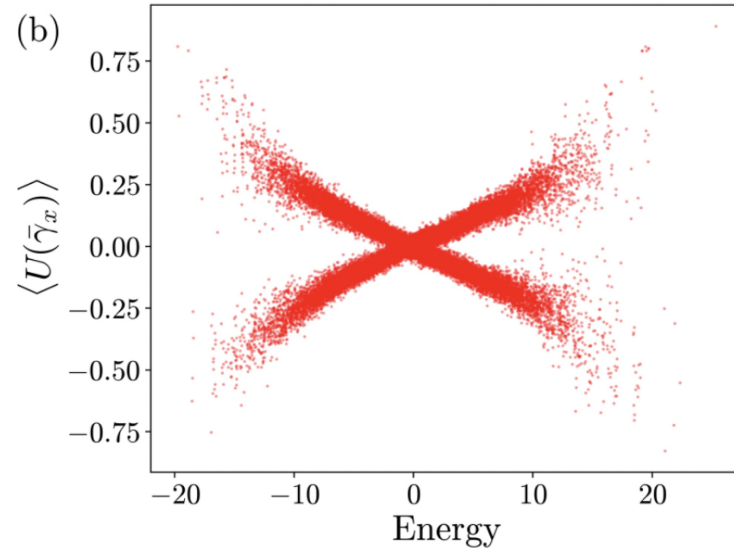
$\gamma_x \cup \bar{\gamma}_x = C_x$ : x-cycle



5×3 格子の場合の数値計算



$U(\gamma)$  (local operator)



$U(\bar{\gamma})$  (non-local operator)

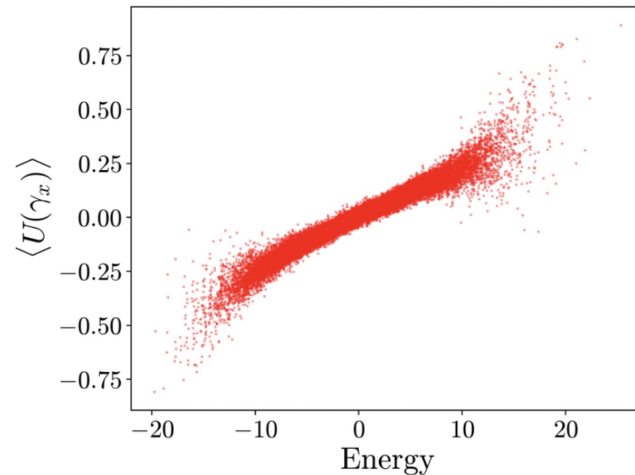
1次元的な演算子に対するETHが破れている。



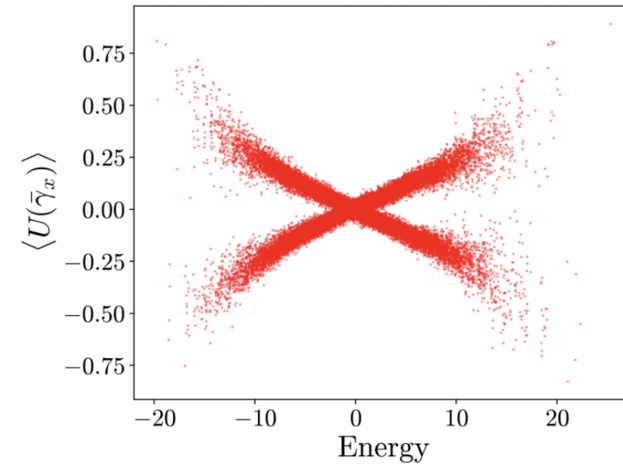
# ETH breaking in $\mathbb{Z}_2$ lattice gauge theory

16/20

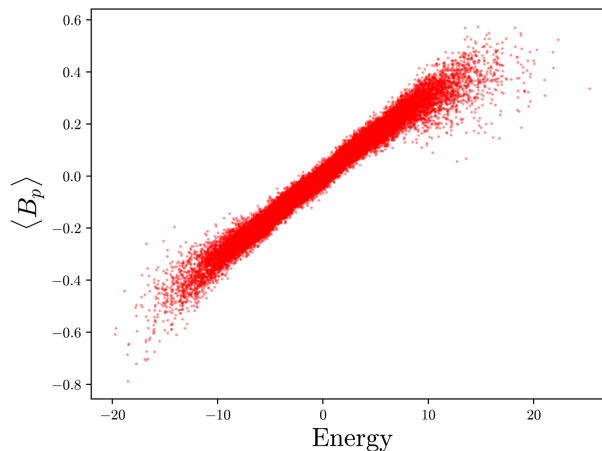
## 他の演算子



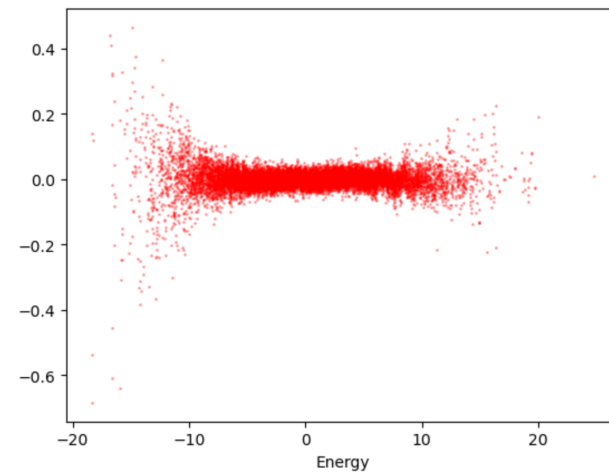
$U(\gamma)$  (local operator)



$U(\bar{\gamma})$  (non-local operator)



Plaquette operator  $B_p$



Double Wilson lines  $W(C_x^1)W(C_x^2)$

# Generalized Gibbs ensemble for higher-form symmetry

- 一般化Gibbsアンサンブル(GGE)とは?

オリジナルのGGEは可積分スピン鎖に対して導入された。

[Pozsgay, 1304.5374; Ilievski et al., 1507.02993;...]

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{GGE}} = \text{tr } \mathcal{O} \rho(\beta, \{\lambda_i\})$$

$$\rho(\beta, \{\lambda_i\}) := e^{-\beta H - \sum_i \lambda_i Q_i} / Z(\beta, \{\lambda_i\}),$$

$$Z(\beta, \{\lambda_i\}) := \text{tr } e^{-\beta H - \sum_i \lambda_i Q_i}$$

$Q_i$ : (quasi-)local conserved quantity

$\lambda_i$ : “chemical potential”

可積分系において、GGEが熱平衡として実現される。

# Generalized Gibbs ensemble for higher-form symmetry

- $\mathbb{Z}_2$  ゲージ理論に対する GGE

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{GGE}} = \text{tr } \mathcal{O} \rho(\beta, \{\lambda_i\})_{\mathbb{Z}_2}$$

$$\rho(\beta, \{\lambda_i\})_{\mathbb{Z}_2} := e^{-\beta H_{\mathbb{Z}_2} - \lambda_1 P_x - \lambda_2 P_x H_{\mathbb{Z}_2}} / Z(\beta, \{\lambda_i\})_{\mathbb{Z}_2},$$

$$Z(\beta, \{\lambda_i\})_{\mathbb{Z}_2} := \text{tr } e^{-\beta H_{\mathbb{Z}_2} - \lambda_1 P_x - \lambda_2 P_x H_{\mathbb{Z}_2}}$$

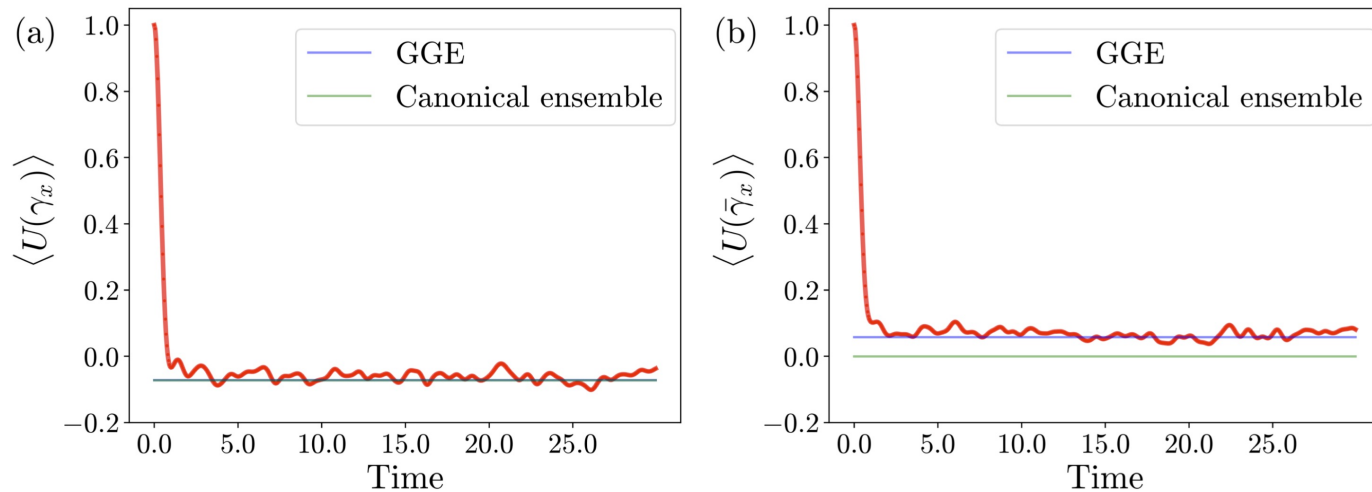
$$P_x = \frac{1 - U(C_x)}{2} : \text{ projection to the sector } U(C_x) = 1$$

ある初期状態に対する  $\langle P_x H_{\mathbb{Z}_2} P_x \rangle$ ,  $\langle (1 - P_x) H_{\mathbb{Z}_2} (1 - P_x) \rangle$ ,  $\langle P_x \rangle$  を指定するためには、3つの化学ポテンシャルが必要となる。

# Generalized Gibbs ensemble for higher-form symmetry

- 時間発展に対する数値解析

$\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論に対する熱的アンサンブルはGGEで与えられる。



初期状態: eigenstate of  $U(\gamma_x) / U(\bar{\gamma}_x) = 1$ , with  $E \in [-5.0, -3.0]$ .

- 高次対称性は熱化に影響を与える。
- 離散対称性を持つ系は、対応するGGEへと緩和する。

$\mathbb{Z}_2$  格子ゲージ理論の場合、

1-dimensional

- dipoleを励起する演算子 $U(\vec{\gamma})$ に対するETHが破れる。
- 熱平衡状態は、 $\mathbb{Z}_2$  1-次対称性を考慮したGGE( $\neq$ カノニカルアンサンブル)で与えられる。

## Outlook

- Effect on entanglement spectrum
- Implication to finite-temperature phase transition
- Demonstration for other QFTs

$\mathbb{Z}_N$  gauge theory, U(1) gauge theory, SU(N) gauge theory...

superconductor, super fluid...

Etc...