

振率誘起のカイラル磁気効果

網谷達也

東京工業大学 理学院 物理学系

TA and Y. Nishida, Ann. Phys. 448 169181 (2023) (arXiv:2204.13415)

Outline

1. Introduction

- カイラル磁気効果
- 捩率(Torsion)

2. 捩率誘起のカイラル磁気効果

3. まとめ

Outline

1. Introduction

- カイラル磁気効果
- 捩率(Torsion)

2. 捩率誘起のカイラル磁気効果

3. まとめ

カイラル磁気効果

✓ カイラル磁気効果(CME)¹

= 質量ゼロのフェルミオン系において

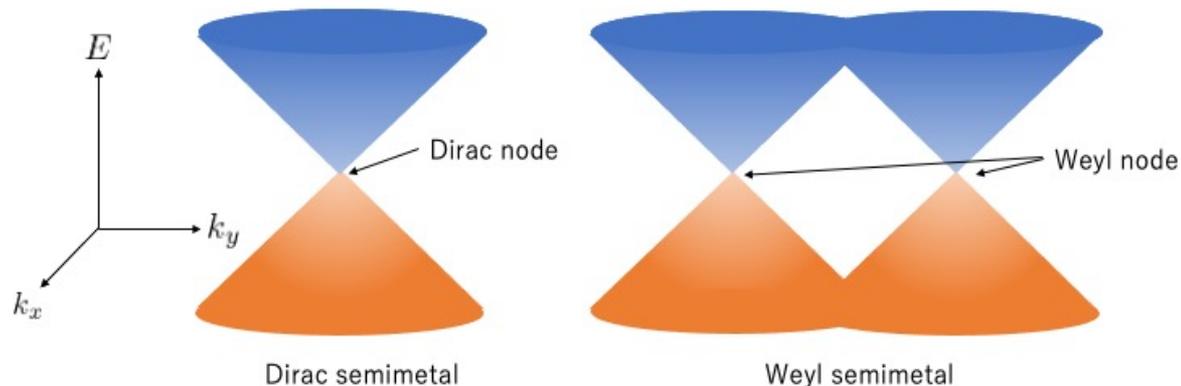
電流が磁場の向きに流れる現象

$$\underline{j = \frac{\mu_5}{2\pi^2} B}$$

軸性化学ポテンシャル

$$\mu_5 := (\mu_R - \mu_L)/2$$

例) ディラック/ワイル半金属(D/WSM)



カイラル磁気効果

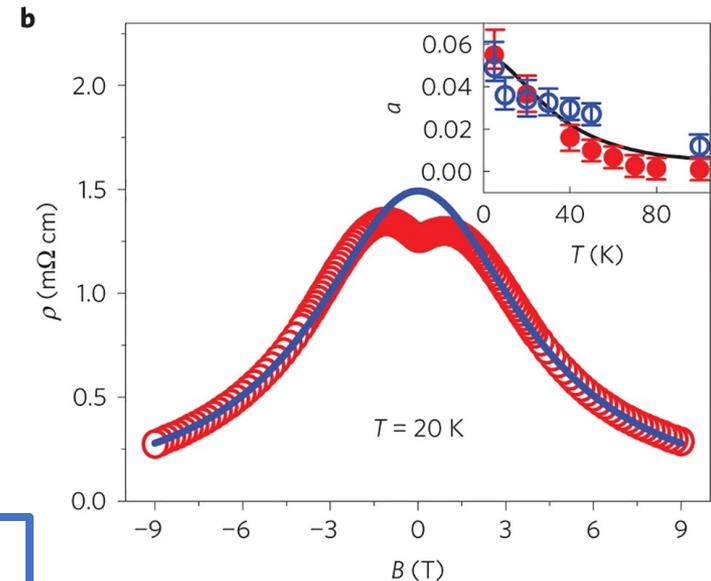
CMEは平衡状態で消える！

= CMEは磁場を印加しただけでは誘起されない

✓ WSMでCMEを誘起する方法

- 電場も印加する²
- WSMを捻る³

本研究ではCME(の類似物)を
捩率(torsion)によって誘起する



Ref. [4] より引用

[2] D. T. Son and B. Z. Spivak, PRB 88, 104412 (2013)

[3] A. Cortijo, et al., PRB 94, 241405(R) (2016)

[4] Q. Li et al., Nature Physics 12, 550 (2016)

Outline

1. Introduction

- カイラル磁気効果
- 捩率(Torsion)

2. 捩率誘起のカイラル磁気効果

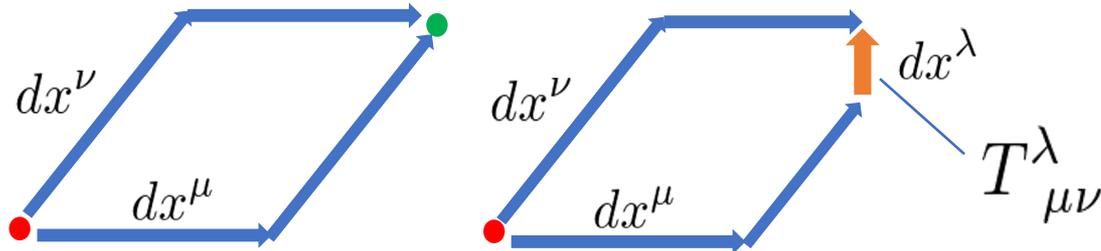
3. まとめ

捩率(Torsion)

✓ 捩率

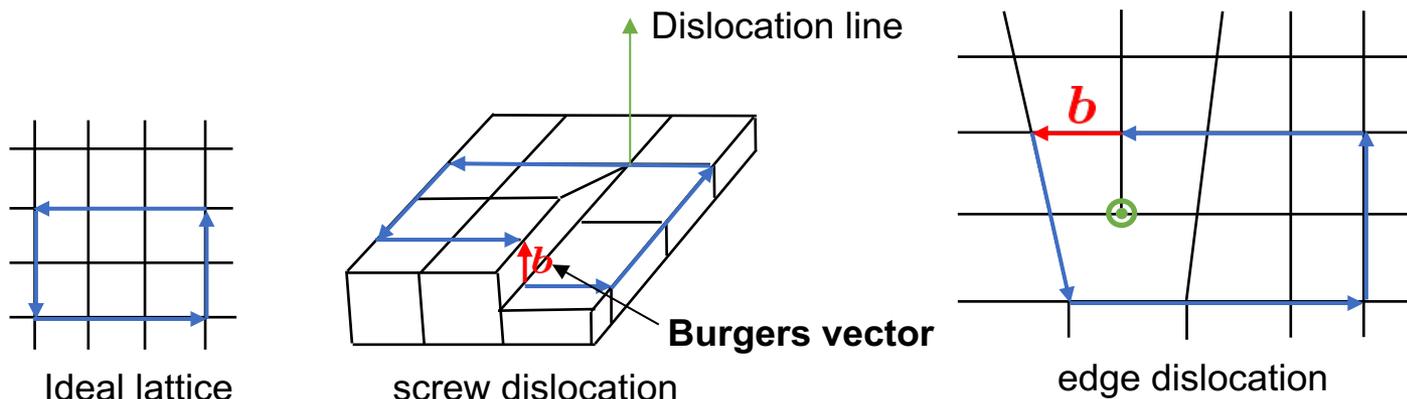
曲がった時空間は計量 $g_{\mu\nu}$ と接続 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ で記述される

・ 捩率：接続の反対称部分 $T^\lambda_{\mu\nu} := \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$



一般相対論においては捩率は恒等的にゼロ

↔ 物性物理においては捩率は格子の転位によって実現できる⁶



Ideal lattice

screw dislocation

edge dislocation

[6] H. Kleinert, *Multivalued Fields in Condensed Matter, Electromagnetism, and Gravitation*, (2008)

捩率(Torsion)

✓ カルタン形式

- 多脚場 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} e^a e^b$

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu \quad g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu$$

- スピン接続 多脚場

$$e^a_\mu \rightarrow e'^a_\mu = \Lambda^a_b e^b_\mu \quad \Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta_{ab} = \eta_{cd}$$

➡ 局所ローレンツ変換に対するゲージ場を導入
= スピン接続 $\omega_{ab\mu}$

- 接続 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = e_a^\lambda (\partial_\mu e^a_\nu + \omega^a_{b\mu} e^b_\nu)$

➡ $T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a_\nu + \omega^a_{b\mu} e^b_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)$

$$\omega_{ab\mu} = \underbrace{\dot{\omega}_{ab\mu}}_{\text{Torsion-less}} + \underbrace{K_{a\mu b}}_{\text{Torsion}}$$

$$\dot{\omega}_{ab\mu} = \frac{1}{2} e^c_\mu (\gamma_{cab} - \gamma_{abc} - \gamma_{bca}),$$

$$\gamma^c_{ab} := (e_a^\mu e_b^\nu - e_a^\nu e_b^\mu) \partial_\mu e^c_\nu,$$

$$K_{\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2} (T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\lambda\mu\nu})$$

捩率(Torsion)

✓ 曲がった時空間におけるスピノル

・ 共変微分

$$\psi \rightarrow S(\Lambda)\psi \quad S(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{4}\epsilon^{ab}\sigma_{ab}\right]$$

$$\rightarrow D_\mu\psi = (\partial_\mu + \omega_\mu)\psi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{4}\omega_{ab\mu}\sigma^{ab}\right)\psi$$

・ 作用

$$S = \int d^4x e (\bar{\psi} i \gamma^a e^\mu_a D_\mu \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu i \gamma^a e^\mu_a \psi)$$

$$\rightarrow \int d^4x e \bar{\psi} i \gamma^a e_a^\mu \left(\underbrace{\partial_\mu + \dot{\omega}_\mu}_{\text{Torsion-less}} + \underbrace{\frac{i S_\mu \gamma^5}_{\text{Torsion}}} \right) \psi$$

$$S_\mu := \frac{1}{8} \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} T_{\lambda\rho\sigma}$$

捩率は4Dフェルミオンと軸性ゲージ場として結合する⁷

捩率(Torsion)

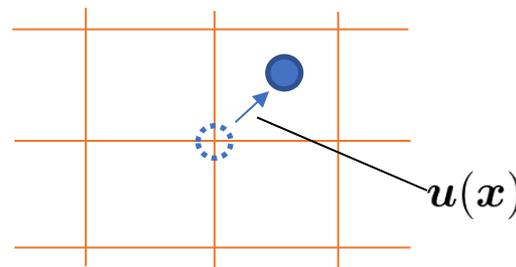
✓ 捩率と転位

- 変位ベクトル

$$u^i(\mathbf{x}) = x^i - \bar{x}^i(\mathbf{x})$$

- バーガースベクトル

$$b^i = - \oint du^i = - \iint dx^j \wedge dx^k (\partial_j \partial_k - \partial_k \partial_j) u^i(\mathbf{x})$$



格子の変位 = 座標変換 $\bar{x}^i(\mathbf{x}) \rightarrow x^i$

➡ 多脚場 $e^a_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} = \delta^a_i - \partial_i u^a$

$$b^i = \iint dx^j \wedge dx^k T^i_{jk} + \mathcal{O}(\partial u^2)$$

捩率(Torsion)

✓ 捩率と転位

- 螺旋転位(z軸上)

$$u^z(x) = \frac{b}{2\pi} \varphi = \frac{b}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x}$$



$$e^z_x = -\frac{b}{2\pi} \frac{y}{r^2 + \epsilon^2} \quad e^z_y = \frac{b}{2\pi} \frac{x}{r^2 + \epsilon^2}$$

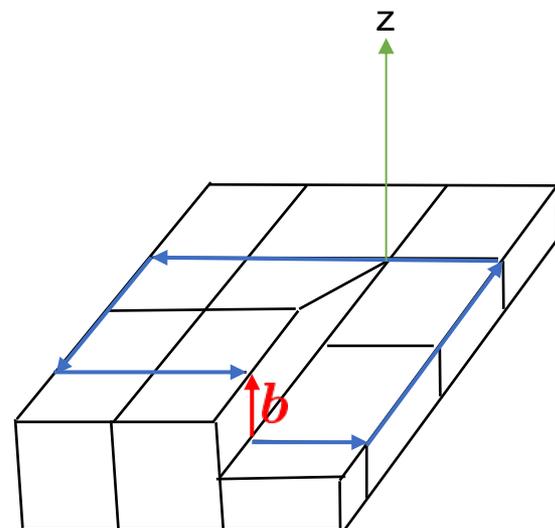


$$T^z_{xy} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{b}{2\pi} \frac{2\epsilon^2}{(r^2 + \epsilon^2)^2} = b\delta(x)\delta(y)$$



$$S_0 = -\frac{b}{4} \delta(x)\delta(y)$$

軸性ゲージ場の時間成分



捩率(Torsion)

✓ ここまでのまとめと研究の目的

- 捩率は4Dフェルミオンと軸性ゲージ場として結合する
- 捩率 = 転位 = 軸性ゲージ場の時間成分

➡ 捩率 $S_0 = -\frac{b}{4}\delta(x)\delta(y)$ を μ_5 の代わりに使う

軸性化学ポテンシャルは空間一様

↔ 捩率は空間非一様

➡ 平衡状態においても

局所的な電流密度 $j^i \propto S_0(x)B^i$ が誘起されそう

Outline

1. Introduction

- カイラル磁気効果
- 捩率(Torsion)

2. 捩率誘起のカイラル磁気効果

3. まとめ

振率誘起のカイラル磁気効果

✓ Set up

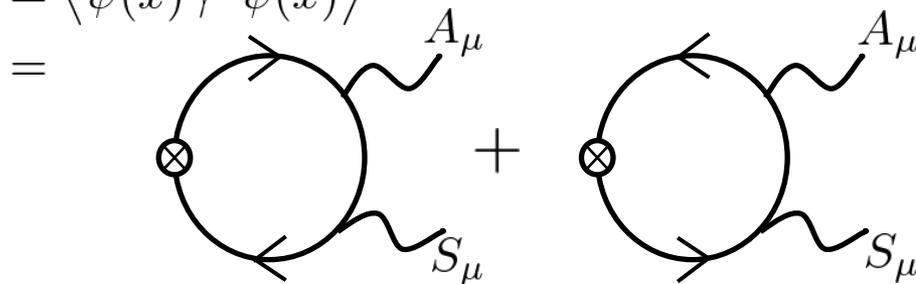
・ 平衡状態 ← 虚時間形式

・ 作用
$$S = \int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (i\partial_\mu - A_\mu(x) - S_\mu(x)\gamma^5) \psi(x)$$

$$A^\mu = (0, \mathbf{A}(\mathbf{x})) \quad S^\mu = (S^0(\mathbf{x}), \mathbf{0})$$

✓ カレント

$$j^\mu(x) = \langle \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \rangle$$



$$= \frac{1}{\beta} \sum_m \int_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{p}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \gamma^5 \frac{1}{\not{k} - \not{q}} + \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{q}} \gamma^\rho \gamma^5 \frac{1}{\not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p}} \right]$$

$$\times e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} A_\nu(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} S_\rho(\mathbf{q}) \quad =: I^{\mu\nu\rho}(p, q, k)$$

k-積分は発散していそう → パウリ・ヴィラーズ正則化

振率誘起のカイラル磁気効果

✓ パウリ・ヴィラース正則化

$$I^{\mu\nu\rho}(p, q, k) \longrightarrow I_{\text{reg}}^{\mu\nu\rho}(p, q, k)$$

$$\begin{aligned} &:= \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{p}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \gamma^5 \frac{1}{\not{k} - \not{q}} \right] + \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{q}} \gamma^\rho \gamma^5 \frac{1}{\not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p}} \right] \\ &- \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{p} - M} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - M} \gamma^\rho \gamma^5 \frac{1}{\not{k} - \not{q} - M} \right] \\ &- \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - M} \gamma^\rho \gamma^5 \frac{1}{\not{k} - M} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - M} \right] \end{aligned}$$

質量無限大 $M \rightarrow \infty$ のゴースト場

$$\longrightarrow j^\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_m \int_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} I_{\text{reg}}^{\mu\nu\rho}(p, q, k) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} A_\nu(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} S_\rho(\mathbf{q})$$

振率誘起のカイラル磁気効果

✓ 勾配展開

磁場は空間一様と仮定

$$\begin{aligned} j^i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_m \int_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} I_{\text{reg}}^{ij0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, k) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} A_j(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} S_0(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_m \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} I_{\text{reg}}^{ij0}(\mathbf{0}, \mathbf{q}, k) A_j(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} S_0(\mathbf{q}) + \frac{i}{\beta} \sum_m \int_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left. \frac{\partial I_{\text{reg}}^{ij0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, k)}{\partial p_l} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} \partial_l A_j(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} S_0(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

✓ 正則化

計算してみると正則化をしなくても積分は収束していた

しかし正則化は必要！！

なぜならば...

第1項(0th order)は正則化なしでは消えない

➡ 正則化はゲージ対称性のために必要不可欠

Torsion-induced CME

✓ 結果

$$j^i(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2} (B^i - (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{q}})\hat{q}^i) S_0(\mathbf{q}) \left[1 + \int_0^\infty dk \frac{k}{2q} \ln \left(\frac{q+2k}{q-2k} \right)^2 N'_+(k) \right]$$

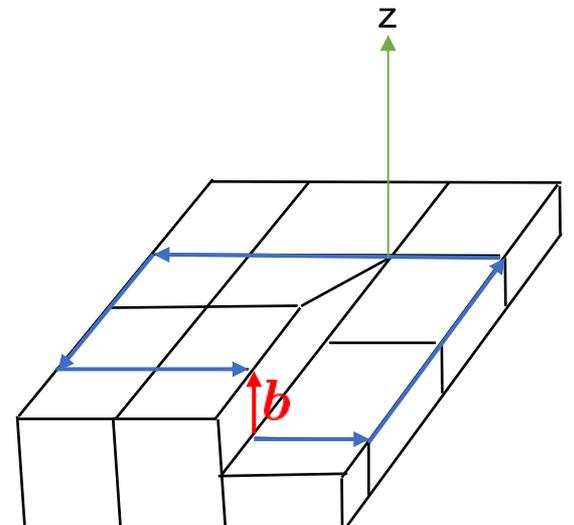
$$N_+(k) := n_F(k - \mu) + n_F(k + \mu)$$

保存則を満たしている: $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) \sim i\mathbf{q} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{q}) = 0$



カレント密度を解析しよう!

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I. } S_0(\mathbf{x}) = -\mu_5 \\ \text{II. } S_0(\mathbf{x}) = -\frac{b}{4} \delta(x)\delta(y) \end{array} \right.$$



Torsion-induced CME

1. $S_0(\mathbf{x}) = -\mu_5$

$$j^i(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2} (B^i - (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{q}})\hat{q}^i) S_0(\mathbf{q}) \left[1 + \int_0^\infty dk \frac{k}{2q} \ln \left(\frac{q+2k}{q-2k} \right)^2 N'_+(k) \right]$$

➡ ゼロ波数極限 $q \rightarrow 0$ $\lim_{q \rightarrow 0} \int_0^\infty dk N'_+(k) \frac{k}{q} \ln \left| \frac{2k+q}{2k-q} \right| = -1$

➡ カイラル磁気効果は平衡状態で消える

$$j^i(\mathbf{x}) = 0$$

Torsion-induced CME

1. $S_0(\mathbf{x}) = -\mu_5$

積分は正則化なしでも収束していた

➡ $j^i(\mathbf{x}) = j_D^i(\mathbf{x}) - j_{\text{PV}}^i(\mathbf{x})$

$$j_D^i(\mathbf{x}) = -\frac{B^i}{2\pi^2} S_0(\mathbf{x}) + j^i(\mathbf{x})$$

$$j_{\text{PV}}^i(\mathbf{x}) = -\frac{B^i}{2\pi^2} S_0(\mathbf{x})$$

$S_0(\mathbf{x}) = -\mu_5$ のとき $j_D = j_{\text{PV}} = \frac{\mu_5}{2\pi^2} \mathbf{B}$

カイラル磁気カレント j_D を j_{PV} が打ち消している

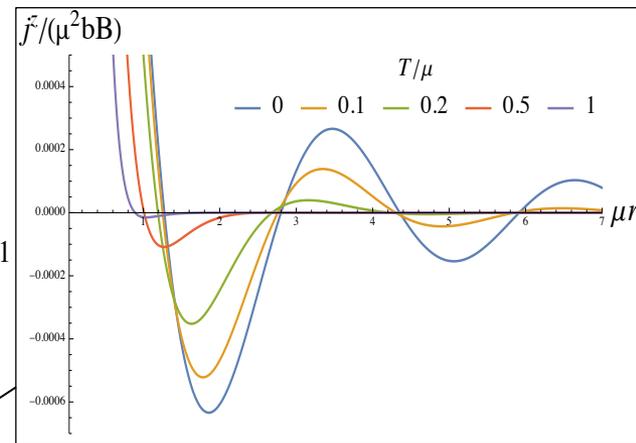
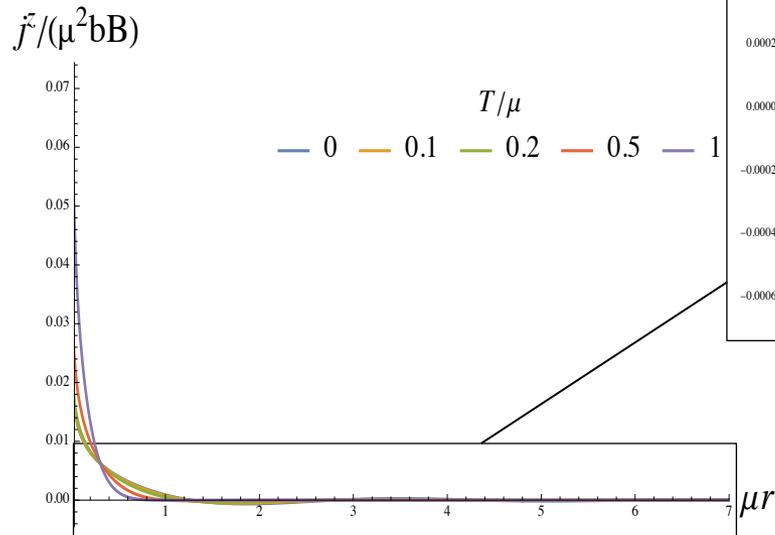
➡ 平衡状態でカイラル磁気効果が消えるためには
正則化が必要不可欠

Torsion-induced CME

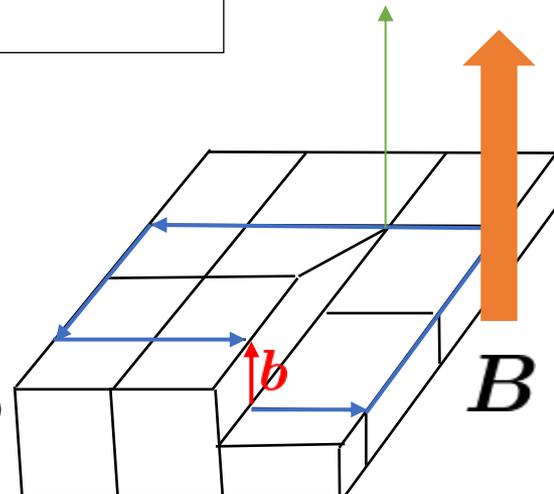
$$\text{II. } S_0(\mathbf{x}) = -\frac{b}{4}\delta(x)\delta(y)$$

磁場を転位と平行に印加： $\mathbf{B} = (0, 0, B_{\parallel})$

カレント密度



転位線上に局在するカレント密度が誘起される



Torsion-induced CME

$$\text{II. } S_0(\mathbf{x}) = -\frac{b}{4}\delta(x)\delta(y)$$

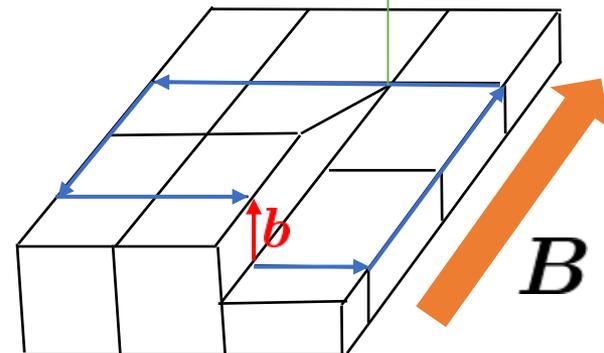
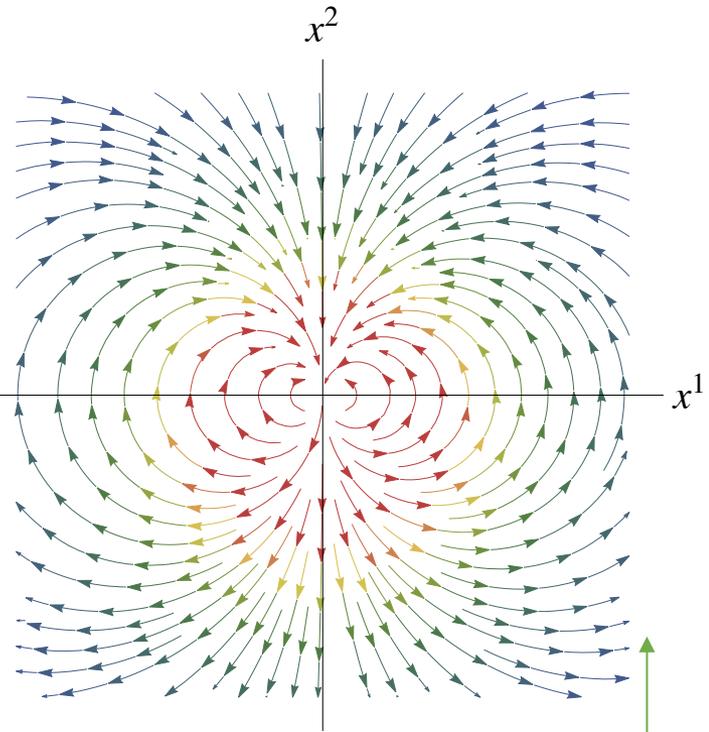
磁場を転位と垂直に印加

カレント密度 @T=μ=0

$$j^i(\mathbf{x}) = \frac{b}{32\pi^3} \frac{B^i - 2\hat{x}^i(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{x}})}{r^2}$$

転位線の周りに

双極子型の円電流が誘起される



Outline

1. Introduction

- カイラル磁気効果
- 捩率(Torsion)

2. 捩率誘起のカイラル磁気効果

3. まとめ

まとめ

- ✓ 磁場と転位(Torsion)によって誘起されるカレント密度の解析を行なった
- ➡ 平衡状態において転位の周囲にカレント密度が誘起されることが明らかになった

$$j^i(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2} (B^i - (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{q}})\hat{q}^i) S_0(\mathbf{q}) \left[1 + \int_0^\infty dk \frac{k}{2q} \ln \left(\frac{q+2k}{q-2k} \right)^2 N'_+(k) \right]$$

- ✓ 教訓：正則化が重要