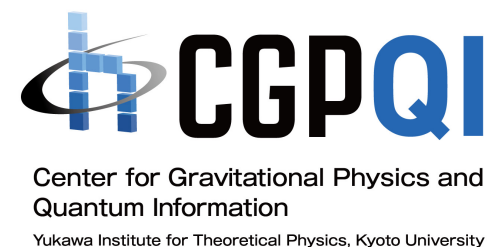
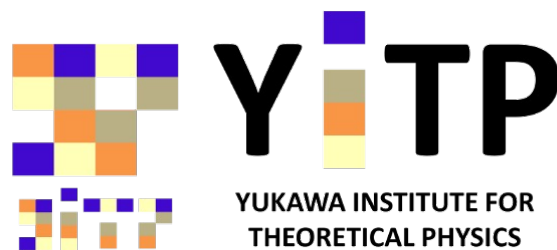
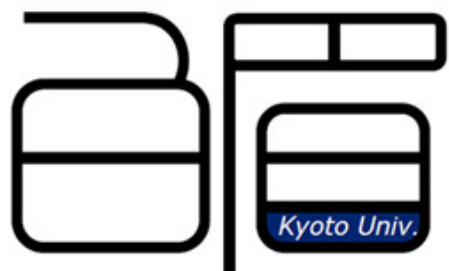


相対エントロピーと重力理論

宇賀神知紀

(基研 白眉センター 京都)



自己紹介

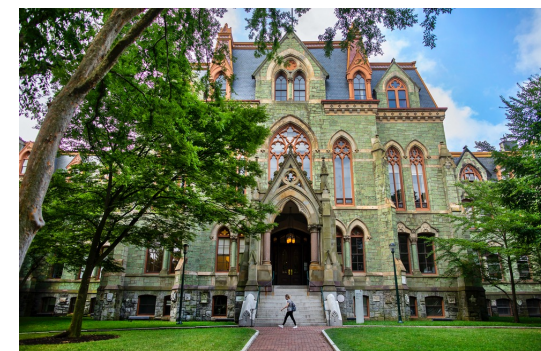
Tomonori Ugajin (宇賀神 知紀)@YITP

～ Mar. 2014: IPMU

Sep. 2014～Aug.2017: UCSB (KITP)

Sep. 2017～Aug. 2019: OIST

Sep. 2019年～Mar. 2020: Penn (It from qubit fellow)

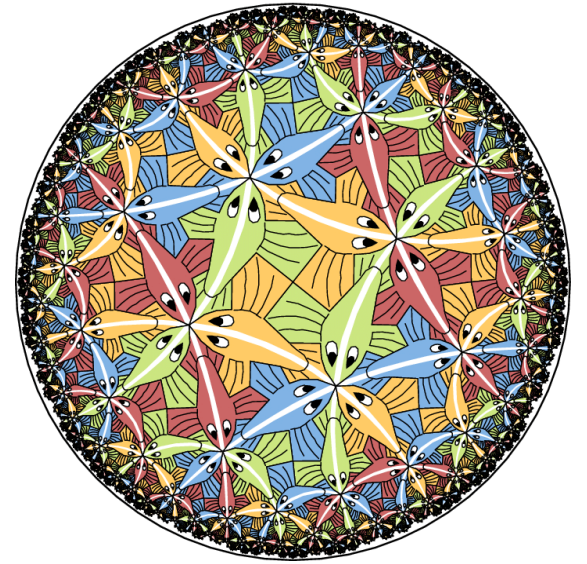


Research interests

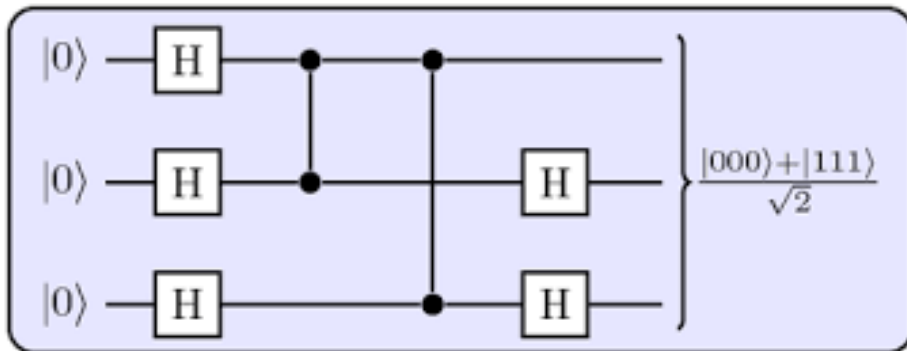
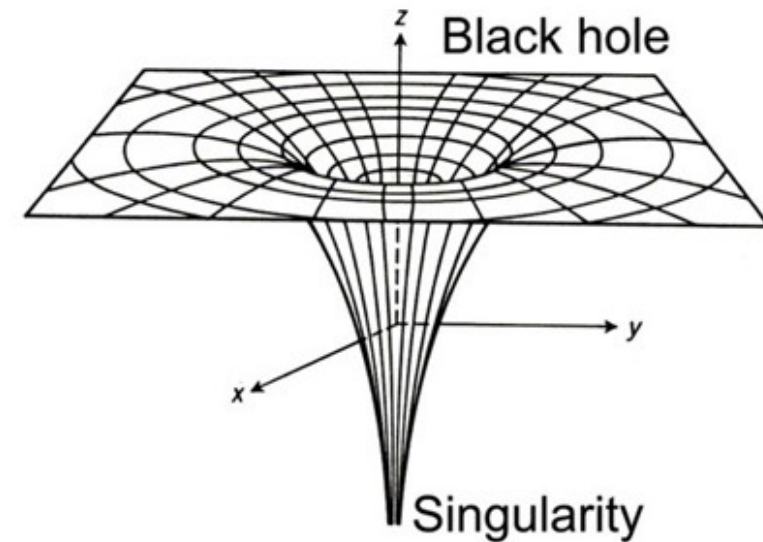
弦理論: (主に量子重力的側面)

キーワード: AdS/CFT、Black holes (ホログラフィー原理)

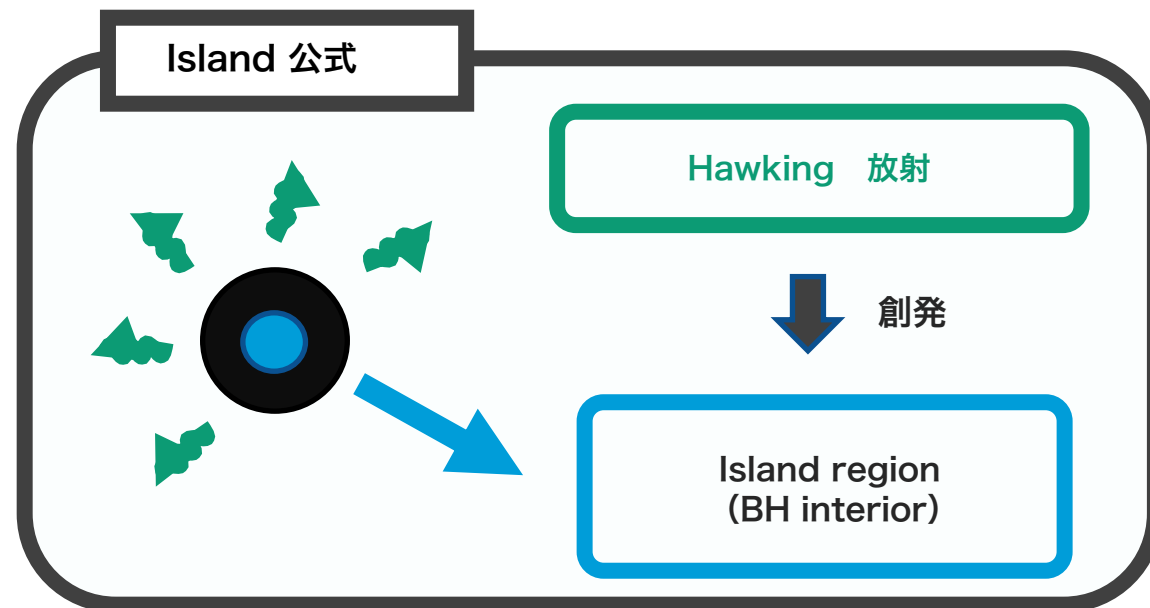
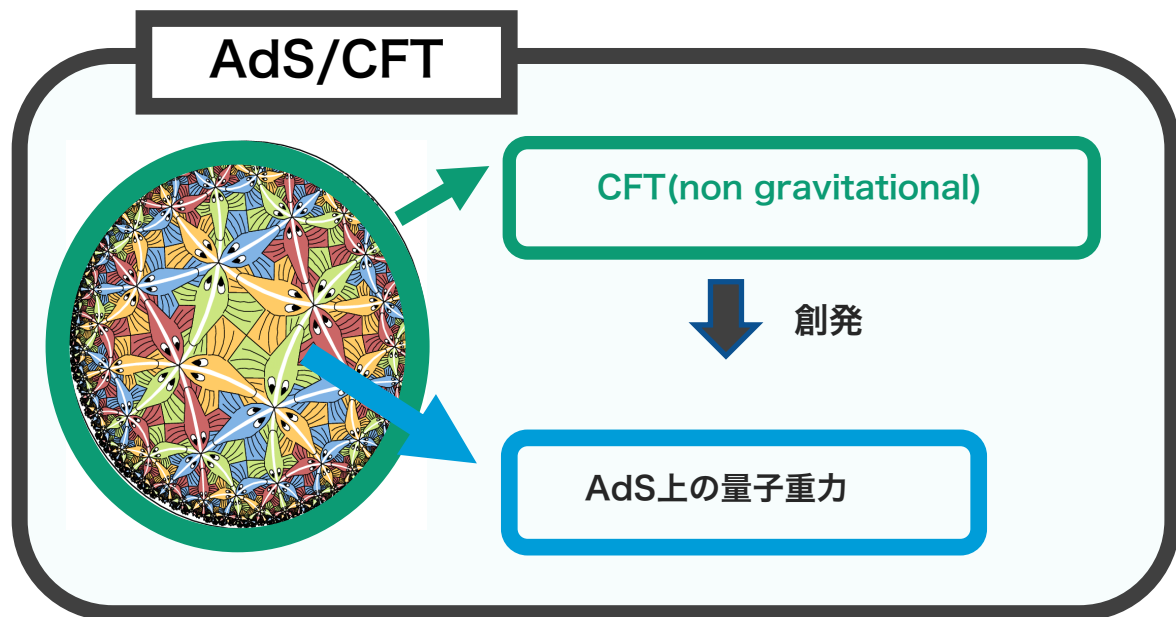
手法: 量子情報理論 (にインスパイアされた何か) (アイランド公式, 相対エントロピー)



AdS space



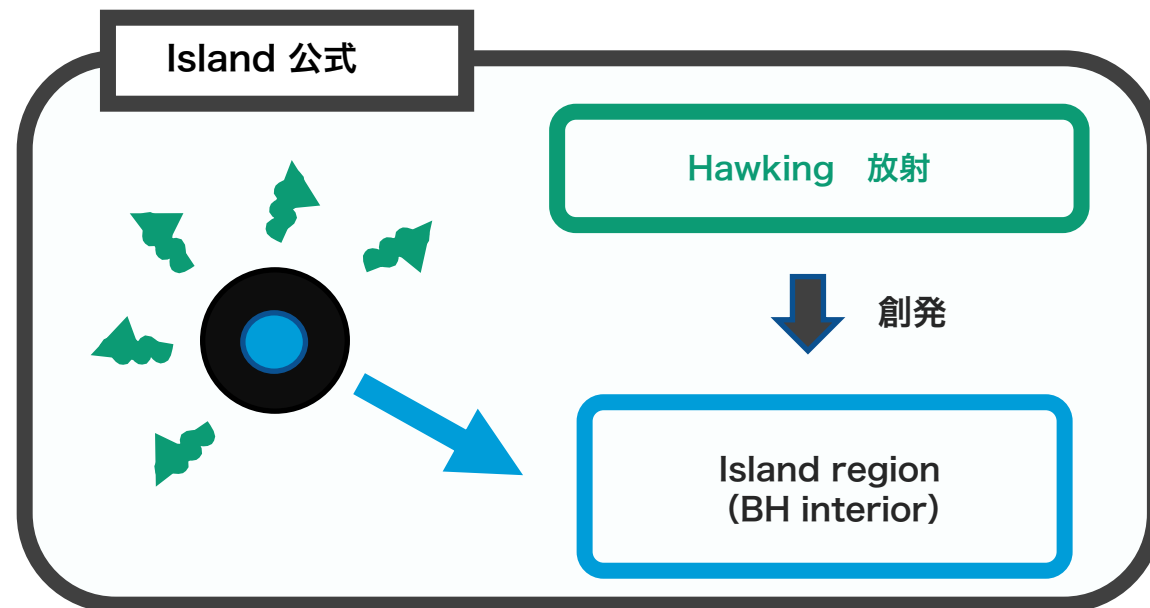
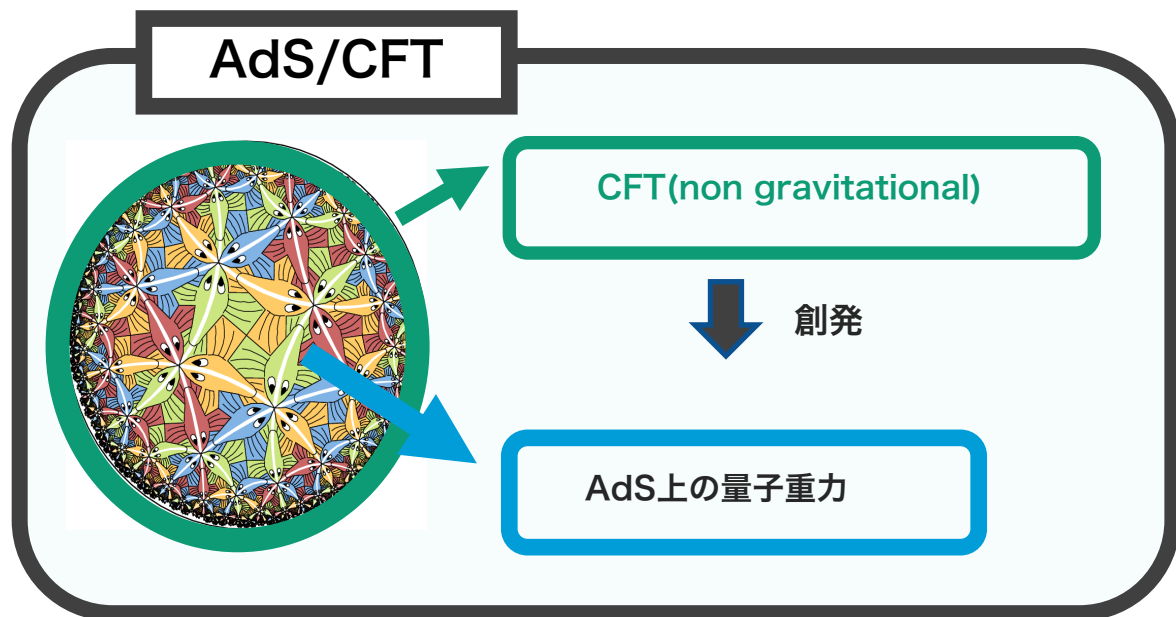
二つの時空の創発現象



時空の幾何学は、より基本的な要素から創発する概念？

量子相関が、この創発を理解する上で鍵になるかもしれない。

二つの時空の創発現象



このトークでは、（量子情報理論の中心的な概念の一つである）**相対エントロピー**を用いて AdS/CFT対応、特に**重力のダイナミクス**を調べる話について紹介します。

本講演では

- 本講演は相対エントロピーについての私の研究を紹介します。
- 相対エントロピーとは何か？
- どのように計算するのか？
- どのような応用があるのか？

本講演では

- 本講演は相対エントロピーについての最近の私の研究を紹介します。
- 相対エントロピーとは何か? → 与えられた2つの密度行列間の距離を測る量
- どのように計算するのか?
- どのような応用があるのか?

本講演では

- 本講演は相対エントロピーについての最近の私の研究を紹介します。
- 相対エントロピーとは何か? → 与えられた2つの密度行列間の距離を測る量
- どのように計算するのか? → 摂動論的、もしくは数値的に計算できます
- どのような応用があるのか?

本講演では

- 本講演は相対エントロピーについての最近の私の研究を紹介します。
- 相対エントロピーとは何か? → 与えられた2つの密度行列間の距離を測る量
- どのように計算するのか? → 摂動論的、もしくは数値的に計算できます
- どのような応用があるのか?

様々な応用: ホログラフィーにおける重力の創発機構
混合状態の量子エンタングルメントの定量化,
量子カオスにおけるスクランブリング, + should be a lot (let me know!)

相対エントロピーとは何か？

相対エントロピー

- 2つの密度行列の間の **相対エントロピー**は

$$S(\rho||\sigma) = \text{tr}(\rho \log \rho) - \text{tr}(\rho \log \sigma)$$

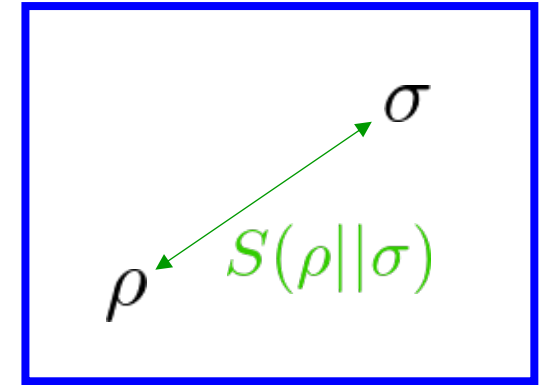
- **正值性** $S(\rho||\sigma) \geq 0$

- $S(\rho||\sigma)$ が0になるのは2つの行列が**等しい時のみ** $\rho = \sigma$

➡ 相対エントロピーは**密度行列間の距離を測っている**. (非対称性->量子情報の意味)

- **自由エネルギー**の一般化

Space of DM



様々な分野への応用:
REは自然な距離

Holography
Quantum info
Quantum Chaos

Explicit
←
Computations

Relative
Entropy

General
→
Properties
(Monotonicity,
Positivity)

ANEC [Faulkner et al]
A theorem [Casini et al]
2nd law of BHTD [Wall]

量子ダイナミクスへの
強い制限

近年相対エントロピーの場の理論への様々な応用が見つかった。
主に2つの方向性がある。

様々な分野への応用:
REは自然な距離

Holography
Quantum info
Quantum Chaos

Explicit
←
Computations

Relative
Entropy

General
→
Properties
(Monotonicity,
Positivity)

量子ダイナミクスへの
強い制限

ANEC [Faulkner et al]
A theorem [Casini et al]
2nd law of BHTD [Wall]

近年相対エントロピーの場の理論への様々な応用が見つかった。
主に2つの方向性がある。

私のやってきたこと

(1): 共計場理論における相対エントロピーの計算手法の開発

→ { 摂動論的手法: 1603.03057, 1611.02959, 1611.03163, 1812.01135
数値計算法: 1705.07899, 1805.01051 (物性研究者との共同研究)

(2): (1)で得られた結果の理論物理諸分野への応用

→ { AdS/CFT対応: Einstein方程式の最初の非線形項のCFTからの導出 1705.01486
非平衡物理: 量子カオス、特にスクランブリングの量子情報理論的理解 1805.01051
量子情報理論: CFT真空の持つ、離れた領域間の量子エンタングルメントの定量化 1807.09448
物性論: トポロジカル相の区別可能性 [In progress]

なぜ相対エントロピーが様々な応用を持つのか

相対エントロピー $S(\rho||\sigma)$ によって2つの密度行列がどのくらい似ているのか、あるいは異なっているのかがわかる。

なぜ相対エントロピーが様々な応用を持つのか

相対エントロピー $S(\rho||\sigma)$ によって2つの密度行列がどのくらい似ているのか、あるいは異なっているのかがわかる。

2つの密度行列の区別可能性を問う問題は、理論物理の諸分野に普遍的に表れる。
(例えば情報喪失問題はブラックホールの微視的状态がどれだけ区別できるのかに深く関係する。)

なぜ相対エントロピーが様々な応用を持つのか

相対エントロピー $S(\rho||\sigma)$ によって2つの密度行列がどのくらい似ているのか、あるいは異なっているのかがわかる。

2つの密度行列の区別可能性を問う問題は、理論物理の諸分野に普遍的に表れる。
(例えば情報喪失問題はブラックホールの微視的状态がどれだけ区別できるのかに深く関係する。)

従って相対エントロピーを用いる手法は、分野を問わない普遍的な方法論といえる。

◆◆◆◆◆ 解説 ◆◆◆◆◆

場の量子論と量子情報——相対エントロピーとその応用



宇賀神知紀

京都大学白眉センター, 基礎物理学研究所
tomonori.ugajin@yukawa.kyoto-u.ac.jp



西岡辰磨

京都大学基礎物理学研究所
tatsuma.nishioka@yukawa.kyoto-u.ac.jp

量子情報理論は、量子エンタングルメントという古典論には現れない量子論の非局所性を特徴付ける重要な概念を、情報量として定量化してその性質を研究する学問である。量子情報理論はその名が示すとおり量子物理学と情報理論の交差点であり、両分野のアイデアを取り込みながら急速に発展している。一方で近年は量子情報理論で培われた概念や手法を、素粒子論、物性論、一般相対論などの基礎物理学に応用するという新しいアプローチが登場し、目覚ましい成果を上げている。

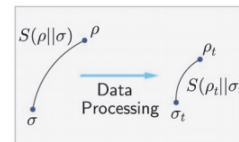
場の量子論への量子情報理論的なアプローチにおいて、これまでは1つの量子状態の量子情報量を測るエンタングルメント・エントロピーの研究が中心であったが、最近**相対エントロピー**とよばれる2つの量子状態の間の差を測る量子情報量の重要性が徐々に認識されるようになってきた。相対エントロピーは常に非負であり、また2つの量子状態が等しい場合にのみゼロと

ある空間領域の中に詰め込むことができる物質場のもつ(エンタングルメント)エントロピーに上限(Bekenstein 限界)を与えることができる。相対エントロピーのもう1つの重要な性質である「単調性」もまた場の量子論に適用した際に、平均化されたヌル・エネルギー条件や、**C-定理**などの著しい結果を導く。一般に、場の量子論では局所的なエネルギー密度は正とは限らない。しかし平均化されたヌル・エネルギー条件は、エネルギー密度をある空間領域にわたって積分したものが正であることを主張する。またC-定理は粗視化の下で理論の変化を記述するくりこみ群のフローに対して強い制限を与える。

ほかにも量子重力理論におけるホログラフィー原理や、時間に依存する系への相対エントロピーの応用も盛んに議論されている。AdS/CFT 対応は反 de Sitter 時空 (AdS) 上の重力理論と、その境界上に住んでいる(重力を含まない)共形場理論 (CFT) が等

用語解説

相対エントロピー : 量子情報理論における中心的な概念の1つであり、与えられた2つの密度行列 ρ, σ に対して $S(\rho||\sigma) = \text{tr}[\rho \log \rho] - \text{tr}[\rho \log \sigma]$ で与えられる。この量は常に非負であることから、2つの密度行列の間の距離とみなすことができる。単調性、データ処理不等式などのよい性質をもつ。



Space of quantum states

C-定理 : 低エネルギーでは重い質量をもつ粒子は場の量子論の有効作用に寄与しなくなるため、粗視化に伴うエネルギースケールの減少の下で「有効自由度」は単調減少すると期待される。C-定理は場の量子論の有効自由度を測る「C-関数」の存在を主張する。

どのように相対エントロピーを計算するのか？

相対エントロピーを計算する2つの手法

相対エントロピーを計算する手法は主に2つある。

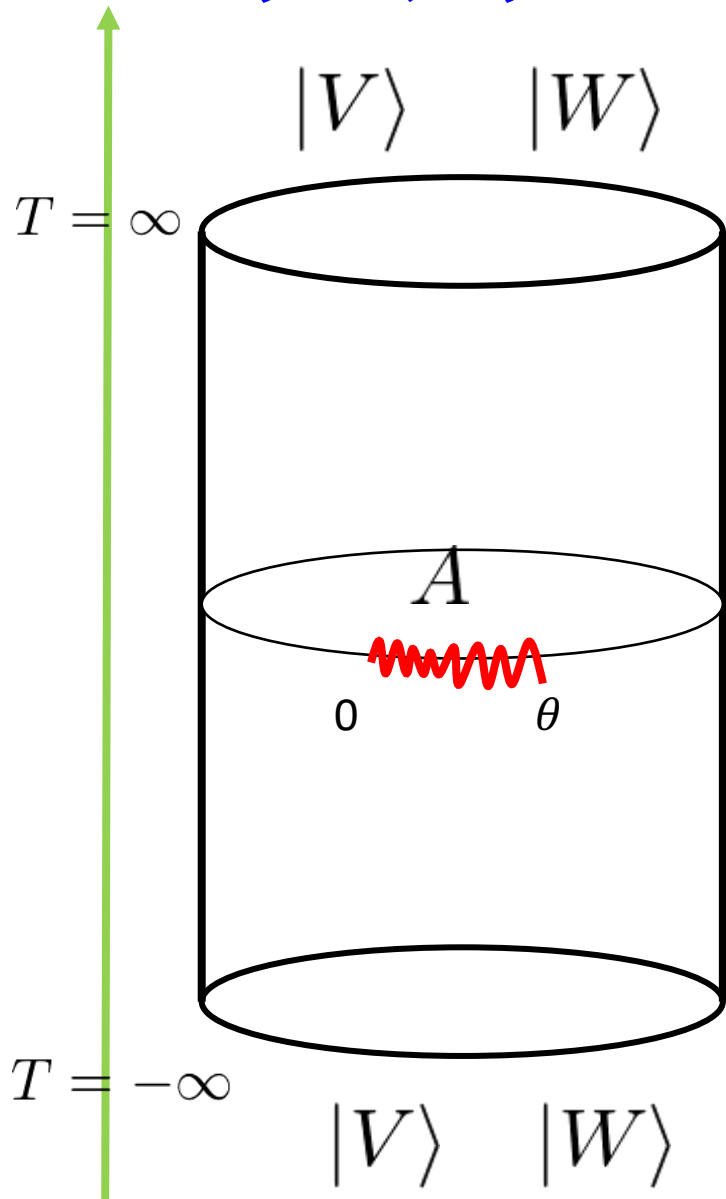
1. レプリカ法:
$$S(\rho_V || \rho_W) = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-1} (\text{tr} \rho_V^n - \text{tr} \rho_V \rho_W^{n-1})_{[\text{Lashkari}]}$$

CFTの場合各項は2n点相関関数として書ける.

例1: the Ising CFT, 例2: チャーンサイモンズ理論

2. 摂動論的手法:
$$\begin{aligned} S(\rho || \sigma) &= S(\rho_0 + \delta\rho || \rho_0 + \delta\sigma) \\ &= \sum S_{n,m}(\delta\rho^n \delta\sigma^n) \end{aligned}$$

セットアップ



・円筒上の CFT

$$\mathbb{R} \times S^{d-1}$$

・領域 A $[0, \theta_0] \times S^{d-2}$

・励起状態 $|V\rangle |W\rangle$

・縮約された密度行列 $\rho_V = \text{tr}_{A_c} |V\rangle\langle V|$

$$\rho_W = \text{tr}_{A_c} |W\rangle\langle W|$$

Ising CFT における相対エントロピー

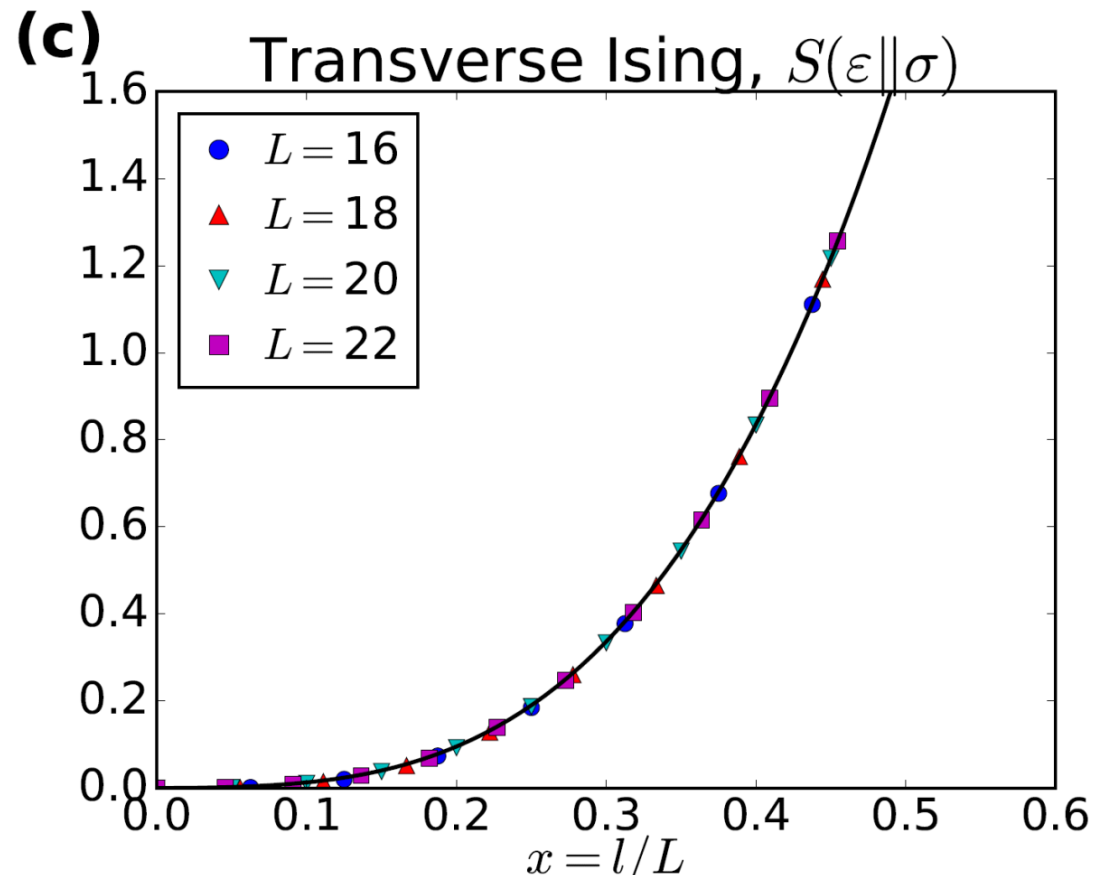
- Ising CFT では相対エントロピーを**解析的に**計算できる.[Nakagawa, TU 1705.07899]

2つのプライマリー状態 $|\epsilon\rangle$ $|\sigma\rangle$ に対して (ϵ : エネルギー演算子,
 σ : スピン演算子)

$$S(\rho_\epsilon || \rho_\sigma) = 2 \log(\sin \theta_0) + \frac{5}{4} (1 - \theta_0 \cot \theta_0) + 2\psi_0 \left(\frac{1}{2 \sin \theta_0} \right) + 2 \sin \theta_0$$

Ising CFTにおける相対エントロピー

このCFTの解析的な結果は、対応するスピン鎖模型における数値計算と良く一致する。 [Nakagawa, TU 1705.07899]



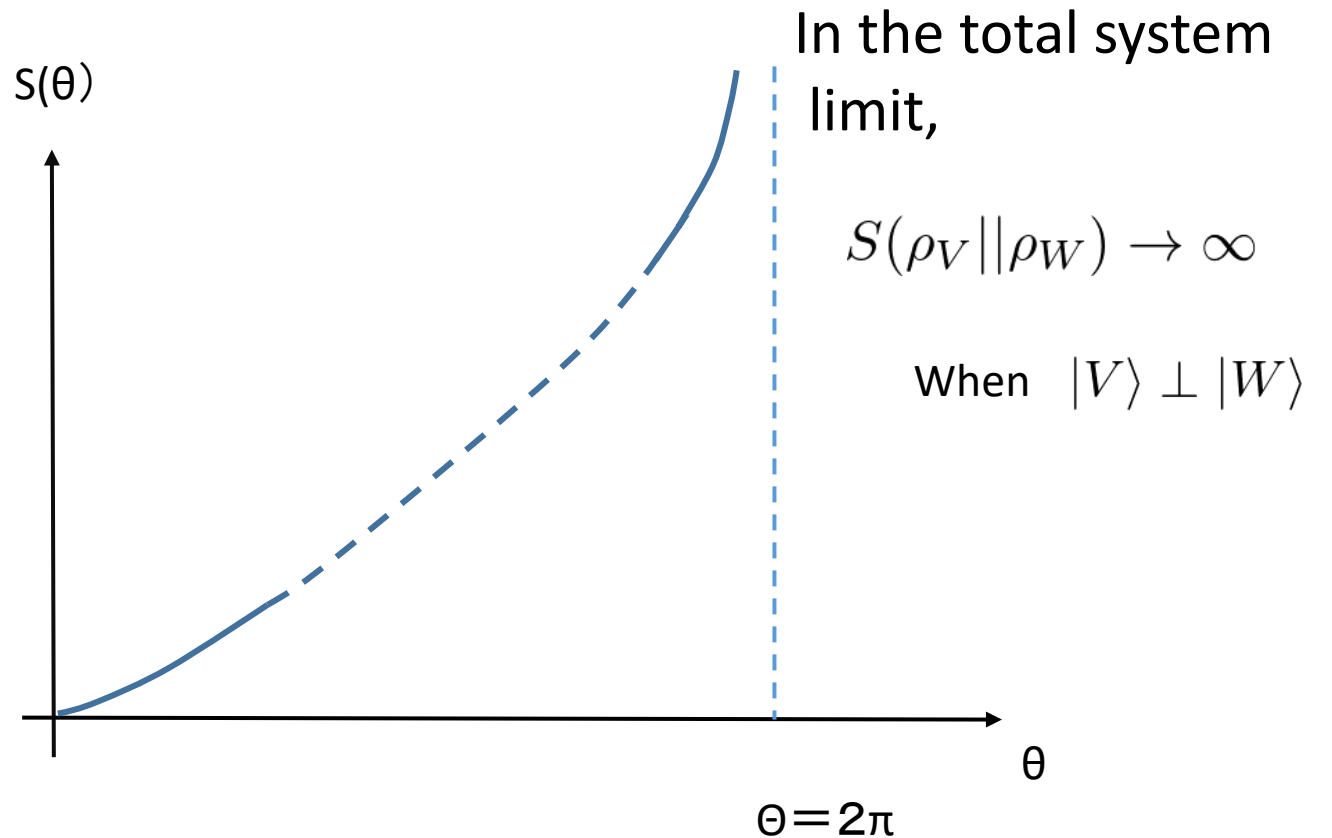
一般の場合

一般の場合に相対エントロピーを厳密に計算するのは難しい。

When $\theta \ll 1$ (small subsystem size limit), the behavior of relative entropy is governed by the **lightest Primary operator** O of the CFT

[Sarosi, TU]

$$S(\rho_V || \rho_W) = c_\Delta [\langle O \rho_V \rangle - \langle O \rho_W \rangle]^2 \theta_0^{2\Delta}$$



相対エントロピーの摂動的計 算法と、そのAdS/CFT 対応への応用

Mainly based on the Work with G Sarosi
arXiv :1705.01486

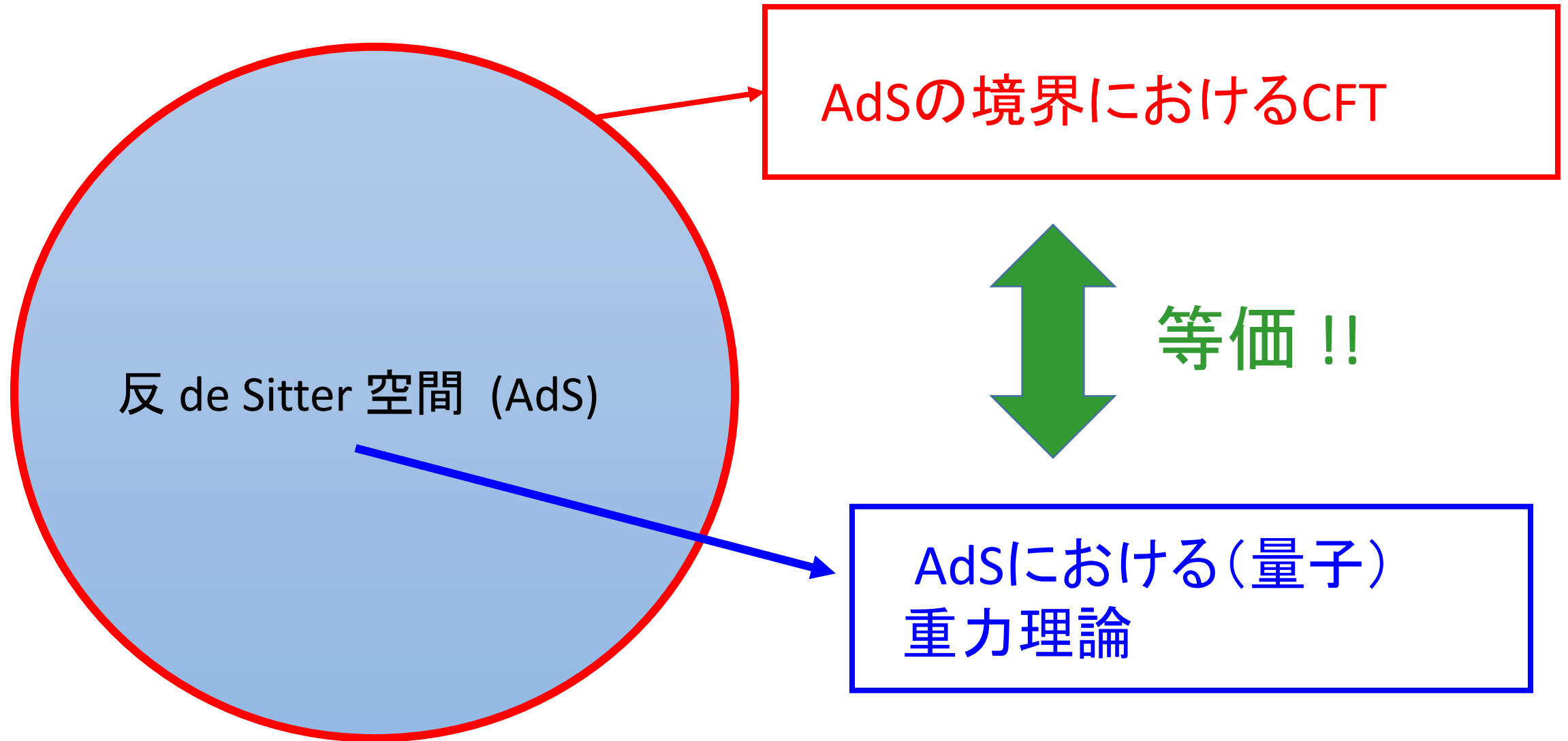
“Modular Hamiltonians of excited states, OPE blocks and emergent bulk fields”

See also

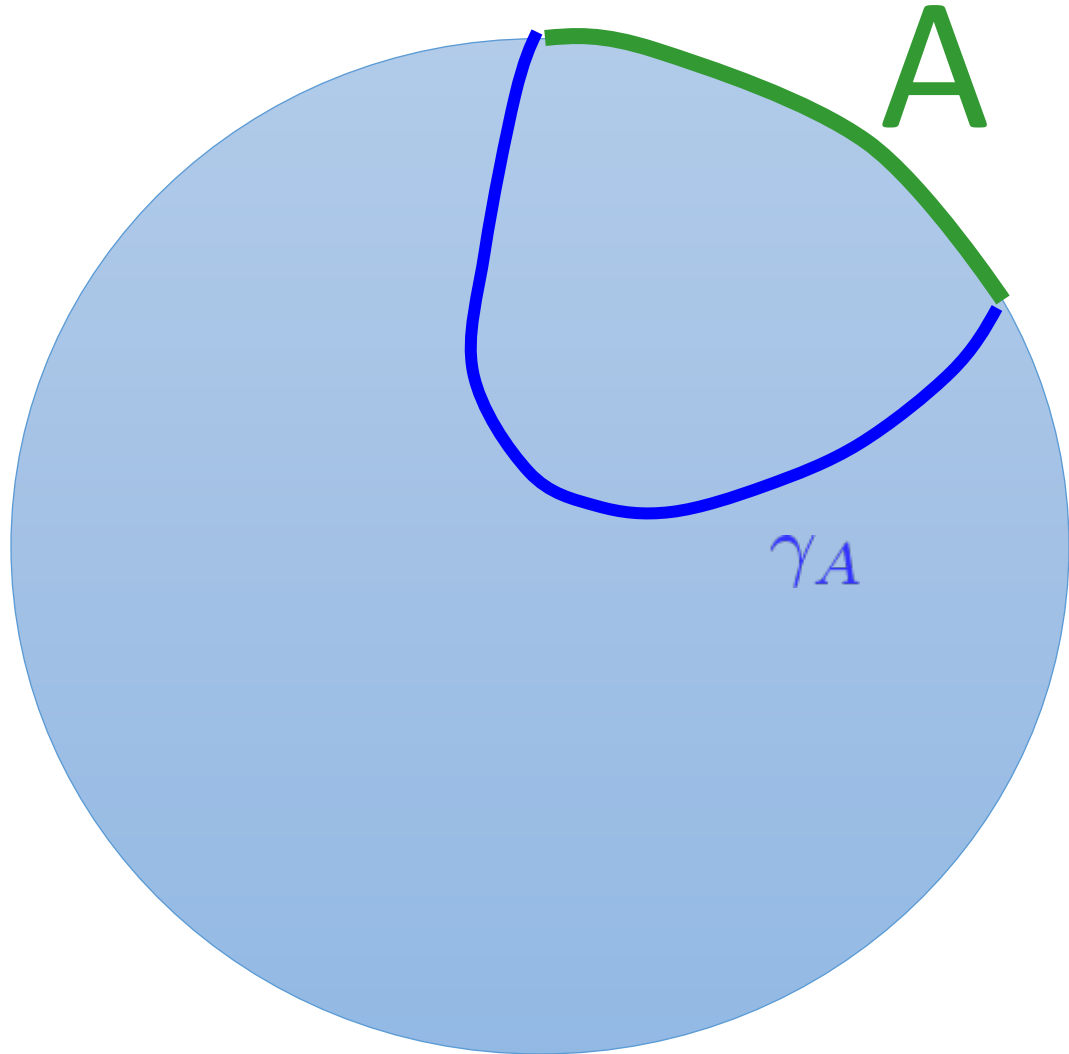
Faukner, Haehl, Hijano, Parrikar, Rabideau, Van Raamsdonk

"Nonlinear Gravity from Entanglement in Conformal Field Theories"

AdS/CFT(ホログラフィー)とは何か?



笠高柳 公式



領域Aについてのエンタングルメント
エントロピー

$$S_A = \frac{A(\gamma_A)}{4G_N}$$

バルクにおける極小曲面
の面積

なぜAdS/CFT対応は興味深いのか

- 未だに我々は量子重力理論の適切な定式化を知らない。
- AdS/CFTを通して、我々はAdSにおける量子重力理論を、その境界におけるCFTから定義することができる。

非常に重要な問題: バルクの重力ダイナミクスは、どのようにCFTから創発するのだろうか

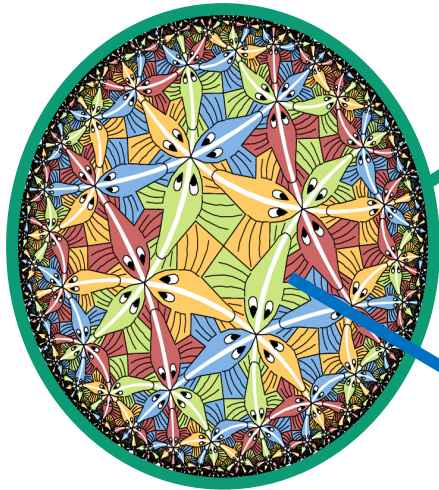
なぜAdS/CFT対応は興味深いのか

- 未だに我々は量子重力理論の適切な定式化を知らない。
- AdS/CFTを通して、我々はAdSにおける量子重力理論を、その境界におけるCFTから定義することができる。

非常に重要な問題: バルクの重力ダイナミクスは、どのようにCFTから創発するのだろうか

相対エントロピーを用いて、この問いにアプローチすることができる！

RE and Einstein eqs [1705.01486]



CFT on the bdy

|| Equivalent

Quantum gravity
in AdS

CFTside : DM excitation

$$\rho_0 \rightarrow \rho_0 + \delta\rho$$

$$S(\rho_0 + \delta\rho || \rho_0) = S^{(1)}(\delta\rho) + S^{(2)}(\delta\rho) + \dots$$

$$0 = E(g_0 + \delta g) = E^{(1)}(\delta g) + E^{(2)}(\delta g) + \dots$$

$$g_0 \rightarrow g_0 + \delta g$$

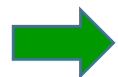
AdSside: metric excitation

Can read off bulk Einstein eqs from the CFT relative entropy

- 非常に近い2つの状態の相対エントロピー $S(\rho_0 + \delta\rho || \rho_0)$ は $\delta\rho$ について展開できる。

$$S(\rho_0 + \delta\rho || \rho_0) = \sum_{m=1}^{\infty} S^{(m)}(\delta\rho)$$

展開の最初の項は $S^{(1)}(\delta\rho)$ REの正值性から消えなければいけない。 [Bhattacharya, Nozaki, Takayanagi, TU]



AdS周りで線形化されたEinstein 方程式

[Lashkari Van Raamsdonk..] [Takayanagi et al][Faulkner Meyers et al...]

展開の2次の項は $S^{(2)}(\delta\rho)$ Fisher 情報量と呼ばれる。

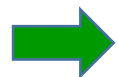


Einstein 方程式の最初の非線形項に対応

- 非常に近い2つの状態の相対エントロピー $S(\rho_0 + \delta\rho || \rho_0)$ は $\delta\rho$ について展開できる。

$$S(\rho_0 + \delta\rho || \rho_0) = \sum_{m=1}^{\infty} S^{(m)}(\delta\rho)$$

展開の最初の項は $S^{(1)}(\delta\rho)$ REの正值性から消えなければいけない。



AdS周りで線形化されたEinstein 方程式

[Lashkari Van Raamsdonk..] [Takayanagi et al][Faulkner Meyers et al...]

展開の2次の項は $S^{(2)}(\delta\rho)$ Fisher 情報量と呼ばれる。



Einstein 方程式の最初の非線形項に対応

相対エントロピーを計算する2つの手法

相対エントロピーを計算する手法は主に2つある。

1. レプリカ法:
$$S(\rho_V || \rho_W) = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-1} (\text{tr} \rho_V^n - \text{tr} \rho_V \rho_W^{n-1})_{[\text{Lashkari}]}$$

CFTの場合各項は2n点相関関数として書ける。

例1: the Ising CFT, 例2: チャーンサイモンズ理論

2. 摂動論的手法:

$$\begin{aligned} S(\rho || \sigma) &= S(\rho_0 + \delta\rho || \rho_0 + \delta\sigma) \\ &= \sum S_{n,m}(\delta\rho^n \delta\sigma^n) \end{aligned}$$

相対エントロピーの摂動展開

- 相対エントロピーの計算では、**モジュラーハミルトニアン**

$K_\rho = -\log \rho$ 計算が鍵になる、

$$\begin{aligned} S(\rho||\sigma) &= \text{tr} [\rho \log \rho] - \text{tr} [\rho \log \sigma] \\ &= -\langle \rho K_\rho \rangle + \langle \rho K_\sigma \rangle \end{aligned}$$

一般の励起状態では、 K_ρ は非常に**非局所的**。

しかし、真空の密度行列 $\rho_0 = \text{tr}_{A^c} |0\rangle\langle 0|$ については K_{ρ_0} は局所的な表現を持つ(= **Rindler ハミルトニアン**)。従って摂動展開の便利な出発点になる。

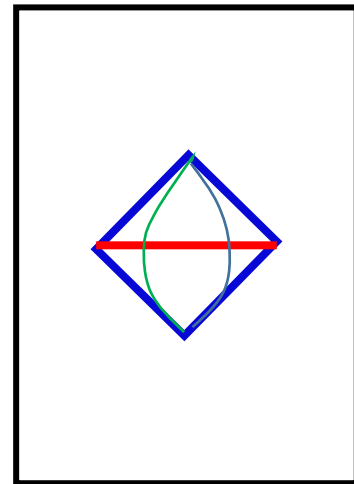
Vacuum modular Hamiltonian

When the subsystem A is a ball shaped region, the modular Hamiltonian of vacuum has a local expression,

$$K_{vac} = 2\pi \int_A dr d\Omega_{d-2} \frac{R^2 - r^2}{2R} T_{00} + S_{EE}$$

This generates the **boost symmetry** of the causal diamond of A .

Conformally mapped to Rindler Hamiltonian of Half space.



Sketch of the argument

- **Step 1:** Write $\rho = \rho_0 + \delta\rho$
- **Step 2:** Expand $K_\rho = -\log \rho$ (the entanglement Hamiltonian of ρ) w/ $\delta\rho$

$$K_\rho = K_0 + \sum \delta K^{(n)}(\delta\rho)$$

By using the integral expression of log : $-\log \rho = \int_0^\infty d\beta \left(\frac{1}{\beta + \rho} - \frac{1}{\beta + 1} \right)$

- **Step 3:** Combine them to get
- $$\begin{aligned} S(\rho||\sigma) &= S(\rho_0 + \delta\rho||\rho_0 + \delta\sigma) \\ &= \sum S_{n,m}(\delta\rho^n \delta\sigma^n) \end{aligned}$$

CFT results

- In the small subsystem size limit $|A| \rightarrow 0$, the reduced density matrix ρ_V of an excited state $|V\rangle$ is getting closed to the vacuum RDM.

$$\rho_V = \text{tr}_{A^c} |V\rangle\langle V| \rightarrow \rho_0$$

Therefore we can write it as a **perturbation** $\rho_V = \rho_0 + \delta\rho$, and apply the perturbative scheme

$$S(\rho_V || \rho_0) = \sum_{m=2}^{\infty} S_V^{(m)}(\delta\rho)$$

(The generalization is straight forward.)

Step1: The expression of $\delta\rho$

In our case of interest, it turned out that $\delta\rho$ can be decomposed into contributions of **primary operators** in the CFT.

$$\begin{aligned}\rho_V &= \text{tr}_{A^c} |V\rangle\langle V| \\ &= \rho_0 + e^{-\pi K} \sum_{\mathcal{O}_k} C_{VV}^{\mathcal{O}_k} B_{\mathcal{O}_k}(\theta_0, -\theta_0) e^{\pi K}\end{aligned}$$

1pt function: $C_{VV}^{\mathcal{O}_k} = \langle V | \mathcal{O}_k | V \rangle$

OPE block

The OPE block $B_{\mathcal{O}_k}(\theta_0, -\theta_0)$ of a primary \mathcal{O}_k is summing up all descendants of it.

Step2: Expanding the log

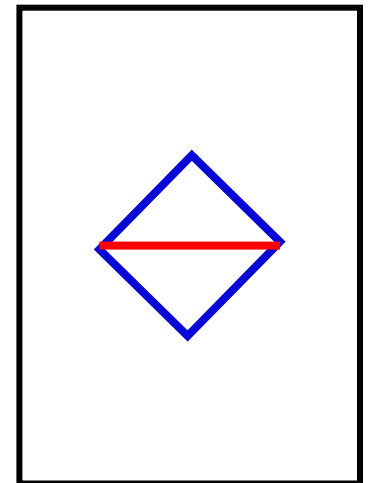
- We can the modular Hamiltonian by using the formula,

$$-\log \rho = \int_0^\infty d\beta \left(\frac{1}{\beta + \rho} - \frac{1}{\beta + 1} \right)$$

The result is

$$K_\rho = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \dots ds_n \mathcal{K}_n(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n \left(e^{-\left(\frac{is_k}{2\pi} + \frac{1}{2}\right)K_0} \delta \rho e^{\left(\frac{is_k}{2\pi} - \frac{1}{2}\right)K_0} \right)$$

The parameter s is the Rinder time in the causal diamond.



Expanding the log

- The explicit expression of the kernel is

$$\mathcal{K}_n(s_1, \dots, s_n) = \frac{(2\pi)^2}{(4\pi)^{n+1}} \frac{i^{n-1}}{\cosh \frac{s_1}{2} \cosh \frac{s_n}{2} \prod_{k=2}^n \sinh \frac{s_k - s_{k-1}}{2}}$$

- Some special cases:

$$\mathcal{K}_1(s_1) = \frac{1}{(2 \cosh \frac{s_1}{2})^2},$$

$$\mathcal{K}_2(s_1, s_2) = \frac{1}{16\pi} \frac{i}{\cosh \frac{s_1}{2} \cosh \frac{s_2}{2} \sinh \frac{s_2 - s_1}{2}}$$

CFT results

- Using the general formula, we derived the (formal) perturbative expression of the excited state mH. The leading term is

$$K_V = K + \sum_{k \neq vac} C_{VV}^{\mathcal{O}_k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\cosh^2 \frac{s}{2}} B_{\mathcal{O}_k}(\tau - \pi + is, \hat{\tau} - \pi + is) + \dots$$

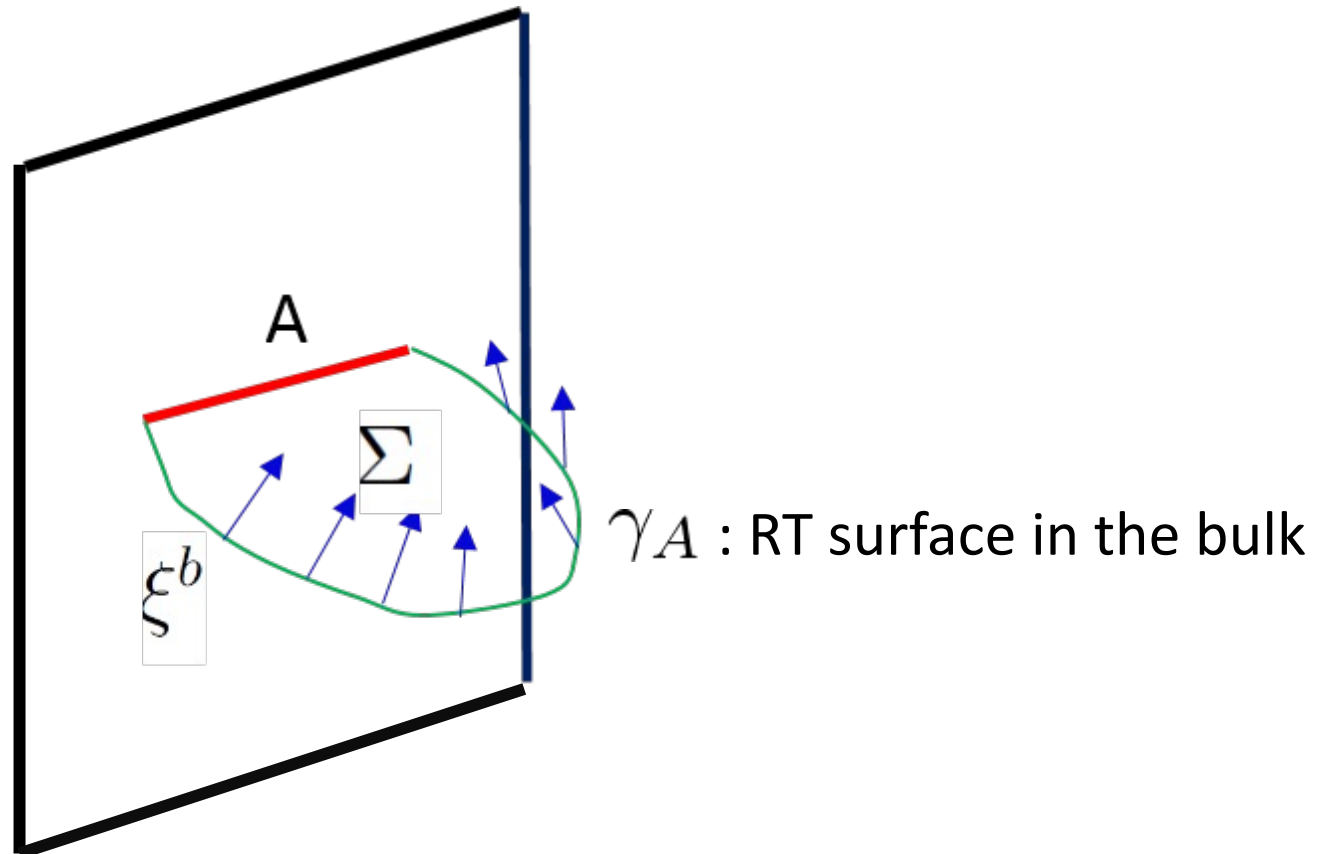
and for entanglement entropy, $\delta S_V = \sum_{m=2}^{\infty} \delta S_V^{(m)}$

$$\delta S_V^{(2)} = - \sum_k (C_{VV}^k)^2 \int \frac{ds}{8 \cosh^2 \frac{s}{2}} \mathcal{F}_k(\tau, \hat{\tau}, \tau - \tau_s, \hat{\tau} - \tau_s)$$

Where F is the 4pt conformal block of the primary \mathcal{O}_k

ホログラフィックな書き換え [Sarosi, TU,1705.01486]

さらにこのFisher 情報量についてのCFTの結果を、**重力理論側の場**を用いて書き換えた。



Fisher 情報量=正準エネルギー

$$S_{\mathcal{O}}^{(2)}(\rho_V) = \langle V|\mathcal{O}|V\rangle^2 \int \frac{ds}{\cosh^2 \frac{s}{2}} \mathcal{F}(\tau, \hat{\tau}, \tau - \tau_s, \hat{\tau} - \tau_s)$$
$$= +2\pi \int_{\Sigma} d\Sigma^a \xi^b T_{ab}(\langle V|\phi|V\rangle)$$

Holographic Studies:

[Nozaki Numasawa Prudenziatti Takayanagi]

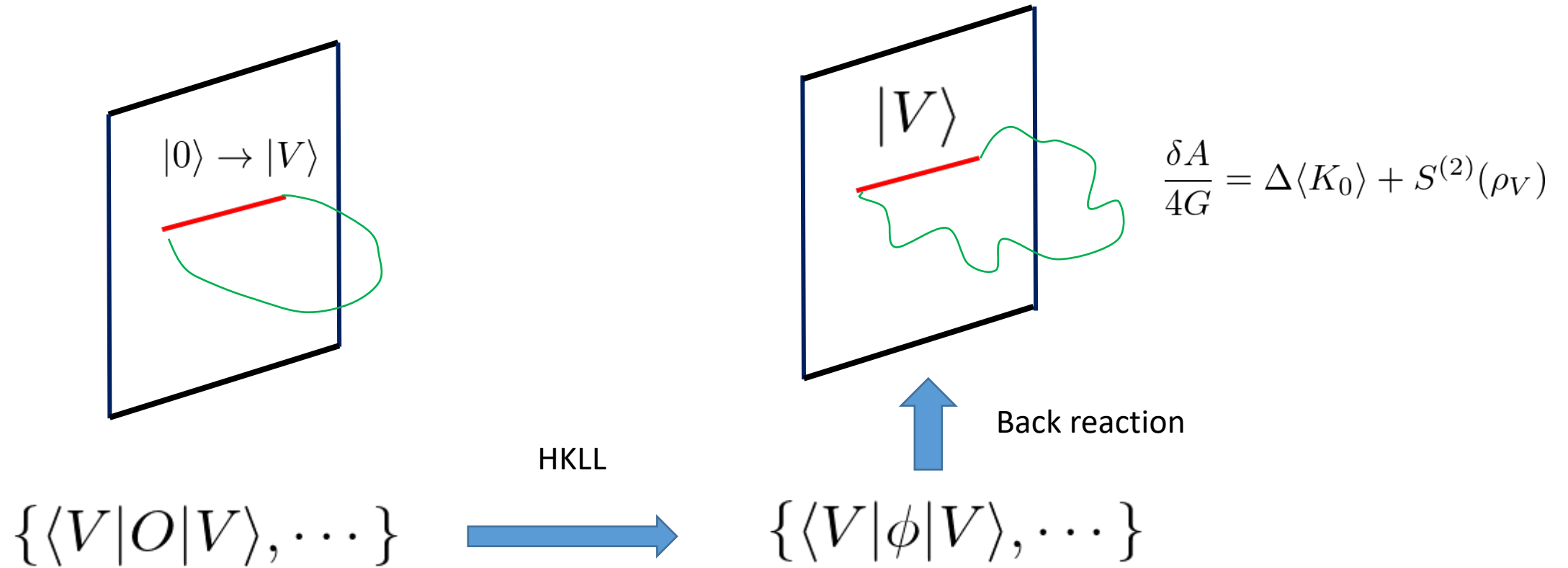
[Lin marcori Ooguri Stoica]

[van Raamsdonk, Lashkari]

ϕ は CFT側のプライマリー演算子 \mathcal{O} に対応する**重力理論側の場**
 $T_{ab}(\langle V|\phi|V\rangle)$ はこの場のストレステンソル.

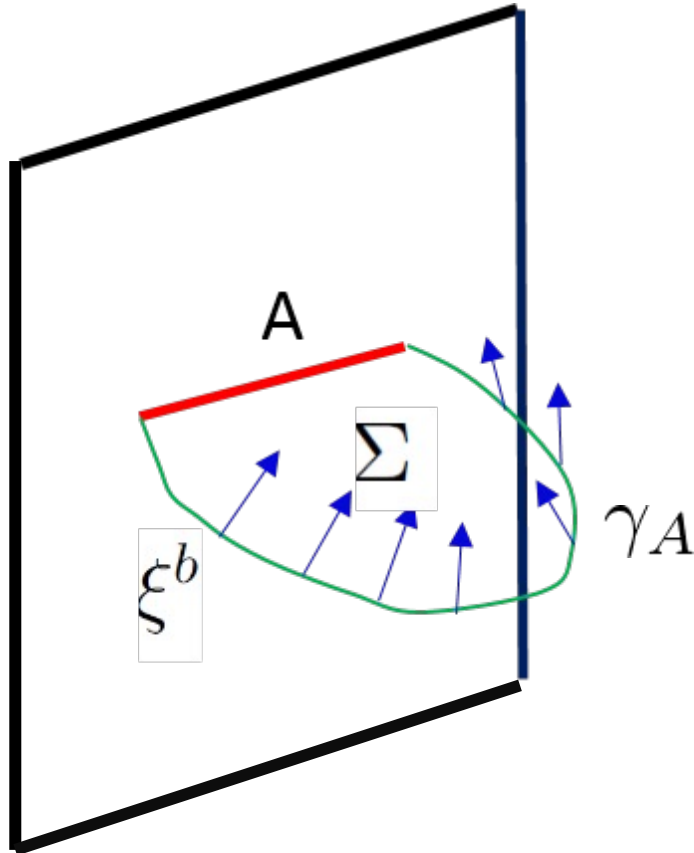
情報量=正準エネルギーの証明

Fisher 情報量 = 正準エネルギー



This formula captures the first non trivial **back reaction effect** in the bulk spacetime.

相対エントロピーとアインシュタイン方程式



真空において、極小曲面とAで囲まれた領域は、**トポロジカルブラックホール**の外部領域と同一視できる。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 ds_{H_{d-1}}^2$$

ホライズンが**双曲空間** = γ_A

このBH時間は、境界において**モジュラーフロー**を生成する。

領域Aの真空のEEはこのBHのエントロピーと同じ

$$S(\rho_A) = \frac{A_{BH}}{4G_N}$$



励起によるエントロピーの変化を、**Waldの方法**で解析できる。

Wald formalism

重力理論の作用を $\mathbf{L}[\phi]$ とすると、その変分は

$$\delta\mathbf{L} = \mathbf{E}[\phi] \delta\phi + d\Theta(\phi, \delta\phi)$$

Presymplectic 形式 (変分の境界項)

ベクトル場 ξ に対する ネーターカレント

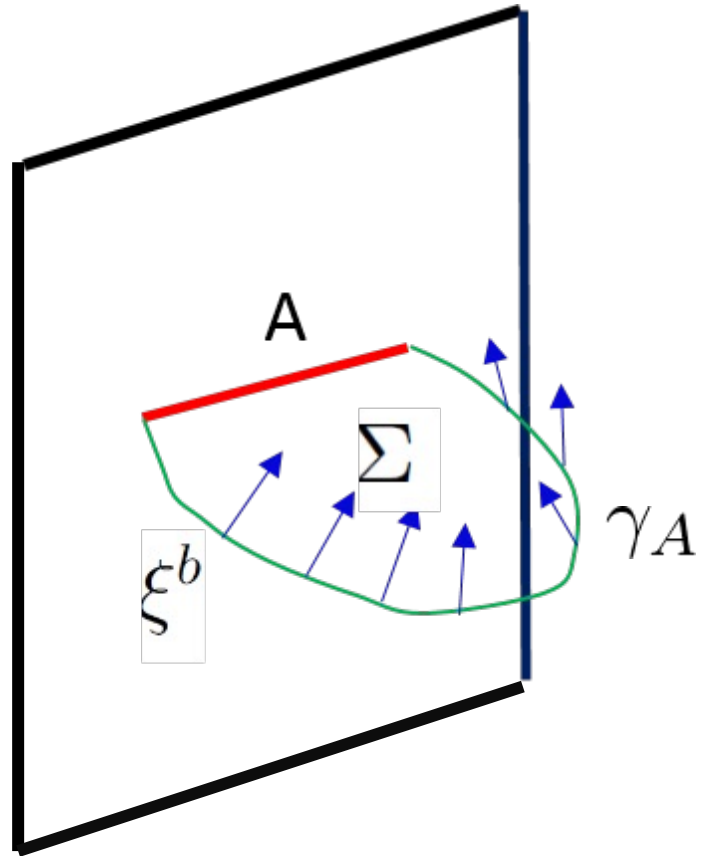
$$\mathbf{J}[\xi] \equiv \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - i_\xi\mathbf{L}$$

は配位 ϕ が 運動方程式を満たすとき保存するが、一般には

$$\mathbf{J}[\xi] = d\mathbf{Q}[\xi] + \mathbf{C}[\xi]$$

運動方程式に比例する。: 閉形式からのズレ

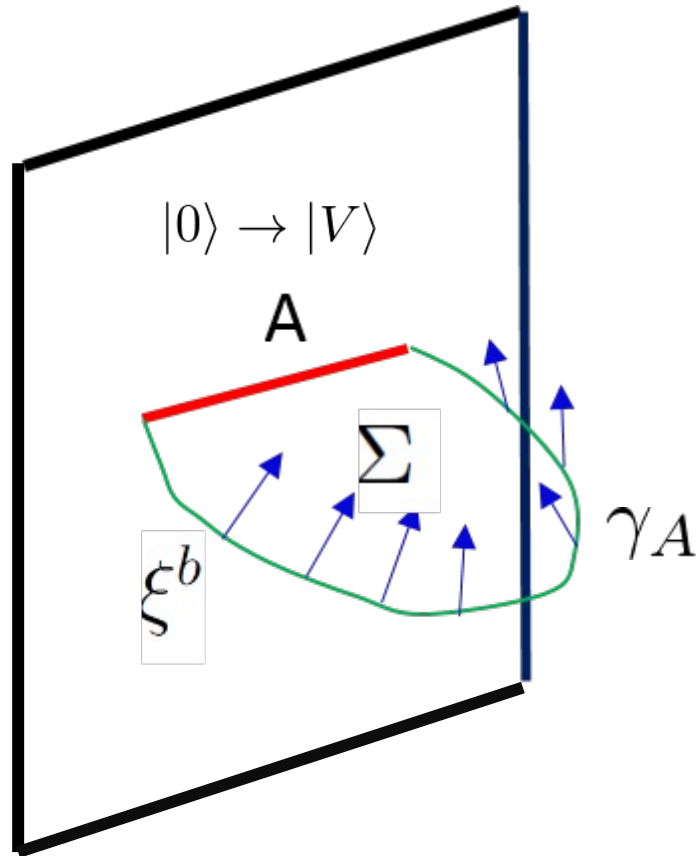
BH エントロピーとネーター電荷



BH エントロピー: 電荷のホライズン上での積分

$$S = \int_{\gamma_A} \mathbf{Q}[\xi]$$

BH エントロピーとネーター電荷



境界における状態の励起は、トポロジカルBHの励起に対応

$$\rho_0 \rightarrow \rho_0 + \delta\rho \quad \longleftrightarrow \quad \phi \rightarrow \phi + \delta\phi$$

この励起に伴うBHエントロピー(EE) と質量(モジュラーハミルトニアン)の変化は

$$\delta S = \int_{\gamma} \delta \mathbf{Q}[\xi], \quad \delta K = \int_{\infty} \delta \mathbf{Q}[\xi] - i_{\xi} \Theta(\phi, \delta\phi)$$

BH エントロピーとネーター電荷

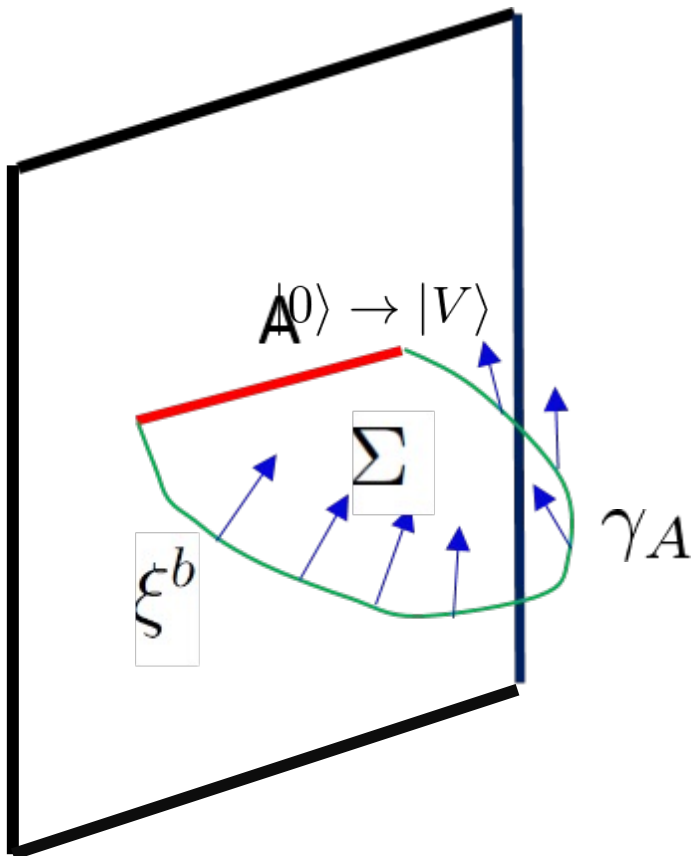
これらの式を $\delta\phi$ について展開し、CFT側のREの結果と比較すると、

一次の項

$$\delta K - \delta S|_1 = \int_{\Sigma} \delta E^{(1)}(\delta\phi) \quad \xrightarrow{\text{CFTの結果}} \quad \delta E^{(1)}(\delta\phi) = 0$$

二次の項

$$\delta K - \delta S|_2 = \int_{\Sigma} \delta E^{(2)}(\delta\phi) + \int_{\Sigma} \xi^a T_{ab} d\Sigma^b \quad \xrightarrow{\text{CFTの結果}} \quad \delta E^{(2)}(\delta\phi) = 0$$



アインシュタイン方程式の摂動展開が出てくる。

Cubic order term of RE

- Similarly we can evaluate the cubic order term of the EE

$$\delta S_V^{(3)} = -(C_{VV}^{\mathcal{O}})^3 \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 \mathcal{K}_2(s_1, s_2) \times \frac{i(s_2 - s_1)}{2\pi} \langle B_{\mathcal{O}}(\tau - \tau_{s_1}, \hat{\tau} - \tau_{s_1}) B_{\mathcal{O}}(\tau - \tau_{s_2}, \hat{\tau} - \tau_{s_2}) B_{\mathcal{O}}(\tau, \hat{\tau}) \rangle_{\Sigma_1}$$

In the small subsystem size limit we can evaluate the integral,

$$\delta S_V^{(3)} = (2\theta_0)^{3\Delta} (C_{VV}^{\mathcal{O}})^3 C_{\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O}} \frac{\Gamma(\frac{1+\Delta}{2})^3}{12\pi\Gamma(\frac{3+3\Delta}{2})}.$$

This again agree with the holographic calculation_[Casini, Galante Myers], in the presence of the bulk cubic interaction.

$$\mathcal{L}_{bulk} = (\partial\phi)^2 - \kappa\phi^3$$

結論

- CFTにおける相対エントロピーを摂動論的に計算する手法を開発した.

さらにFisher情報量部分をホログラフィックに書き換えた。この結果を笠高柳公式と組み合わせるとEinstein方程式の最初の非線形項が導出できる。

ご清聴ありがとうございました。