2022年9月基研

2体フェルミ開放系に関連した アファイン変換の代数

田村 博志

公立小松大学

2体相互作用する
フェルミオン有限多体
開放系に関連した
アフィン変換の代数

ABSTRACT

♠ ゲージ不変な２体相互作用をする $\mathcal{N}(<\infty)$ 個のフェルミオンが、外部の環境の中にある系。

♠ この系の状態を表す密度行列の時間発展は GKSLD 型マスター方程式で記述される。

♠ この枠組みに属するリウヴィリアン全体を含む空間を、交換関係に関するリー代数として簡潔になるよう設定する。

♠ それが、あるアフィン変換群のリー代数と一致する（同型）ことを示す。

♠ この対応を用いると、密度行列の時間発展がアフィン変換群との関連から、見通し良く判る。

♠ 例題として、漸近挙動（定常か否か？)、表皮効果（非エルミート量子力学での話を取り込めないか？）などを、この観点から考える。

♠ 一般の２体相互作用するフェルミオン有限系の場合も、同様の交換関係が成立する。

♠ ２体ボゾン有限系（調和振動子系）の場合も同様。

1　マスター方程式、リウヴィリアン

$\mathcal{N} \in \mathbb{N}$: 任意に固定
$\mathscr{F}$: $\mathcal{N}$ 個のフェルミオンのための Fock 空間 .
$c_j, c_j^\dagger$ $(j = 1, \cdots, \mathcal{N})$ 消滅生成演算子

$$\{c_j, c_k\} = 0, \quad \{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{jk}, \quad \{c_j^\dagger, c_k^\dagger\} = 0. \tag{1.1}$$

「真空」: $|v\rangle \in \mathscr{F}$ 　　 $\Big(\text{i.e., } c_j|v\rangle = 0,\ j = 1, \cdots, \mathcal{N}\Big)$
$\left\{ c_1^{\dagger\nu_1} c_2^{\dagger\nu_2} \cdots c_{\mathcal{N}}^{\dagger\nu_{\mathcal{N}}} |v\rangle \;\middle|\; \nu_j \in \{0,1\},\ j = 1, \cdots, \mathcal{N} \right\}$: $\mathscr{F}$ の正規直交基底

♠ 密度行列

$\mathscr{D}$: $\mathscr{F}$ 上の linear operator 全体　（密度行列は 正で trace が 1 の元、物理量を表す演算子もこの中（$\mathscr{F}$ は有限次元)）

e.g.,　$\Omega = |v\rangle\langle v| \in \mathscr{D}$

GKSLD 型マスター方程式　（密度行列の時間発展方程式）

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \hat{\mathcal{L}}\rho(t) = -i[\mathcal{H}, \rho(t)] + \sum_{m=1}^{S} \left(2\mathcal{D}_m \rho(t) \mathcal{D}_m^\dagger - \{\, \mathcal{D}_m^\dagger \mathcal{D}_m, \rho(t) \,\}\right),$$

$$+ \sum_{m=S+1}^{S+S'} \left(2\mathcal{D}_m^\dagger \rho(t) \mathcal{D}_m - \{\, \mathcal{D}_m \mathcal{D}_m^\dagger, \rho(t) \,\}\right) \tag{1.2}$$

この発表では、

$$\mathcal{H} = \sum_{j,k=1}^{\mathcal{N}} H_{jk} c_j^\dagger c_k = (c, Hc), \qquad \mathcal{D}_m = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \overline{\ell_{mj}} c_j \quad = (\ell_m, c)$$

$H \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$ はエルミート，　$\ell_m \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ は任意

という形のリウヴィリアン $\hat{\mathcal{L}}$ のみを考える。

ここで　$D = \sum_{m=1}^{S} \ell_m \ell_m^\dagger$,　$E = \sum_{m=S+1}^{S+S'} \ell_m \ell_m^\dagger$　と置くと

$$\hat{\mathcal{L}}\rho = \sum_{j,k=1}^{\mathcal{N}} \Big(\big(-iH_{jk} - D_{jk} + E_{jk} \big) c_j^\dagger c_k \rho + \big(iH_{jk} - D_{jk} + E_{jk} \big) \rho c_j^\dagger c_k$$

$$+ 2D_{jk} c_k \rho c_j^\dagger + 2E_{jk} c_j^\dagger \rho c_k \Big) - 2(\mathrm{tr} E)\rho$$

♠ これを　$A = -iH - D - E,\ M = 2E$　として　$\hat{\mathcal{L}}(A, M)$　と書く。
(物理的条件： $A, M \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}), -A - A^\dagger \geqslant M \geqslant O \quad \Rightarrow \quad D, E \geqslant O$ に対応)

Theorem 1.1　$A, B, M, N \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$ に対し，（密度行列に作用する演算子としての）交換関係

$$[\hat{\mathcal{L}}(A, M), \hat{\mathcal{L}}(B, N)] = \hat{\mathcal{L}}([A, B], AN + NA^\dagger - BM - MB^\dagger)\,. \tag{1.3}$$

が成立する。

注１：物理的条件を満たさない場合も含めている。
注２：$\hat{\mathcal{L}}(A, M)$ のタイプの super operator 全体はリー環（リー代数）をなしている。
これは $\mathscr{D}$ 上の演算子全体のなすリー環の部分リー環。M をエルミートに限ったものはさらにその部分リー環。

2　アフィン変換

$\mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$ 上のアフィン変換

$$(U, M) : X \mapsto UXU^{\dagger} + M \tag{2.1}$$

を考えよう。ここで，$U \in GL(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$, $M \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$.
この形の変換全体は、積

$$(U, M) \circ (V, N) = (UV, UNU^{\dagger} + M) \tag{2.2}$$

を持つ、半直積群 $GL(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) \ltimes \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$ と見做せる。
そのリー代数は、直積空間 $\{\, (\!(A, M)\!) \,|\, A, M \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) \,\} = \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})^2$ に交換子積

$$[(\!(A, M)\!), (\!(B, N)\!)] = (\!([A, B], AN + NA^{\dagger} - BM - MB^{\dagger})\!)\,. \tag{2.3}$$

を考えたものとなり、リウヴィリアンを含む空間 $\{\, \hat{\mathcal{L}}(A, M) \,|\, A, M \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) \,\}$ と
同型
よって、密度行列の時間発展を表す super operators 全体と半直積群
$GL(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) \ltimes \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$ は似ている。（局所的に同型）

役に立つ局所的性質　　　　　　　　　　(群の積を用いて導く)

Lemma 2.1　The following formulae hold for $A, B, M, N \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$:

$$(1) \qquad e^{t(\!(A,M)\!)} = \left(e^{tA}, \int_0^t e^{sA} M e^{sA^\dagger}\, ds\right);$$

$$(2) \qquad e^{(\!(O,M)\!)} = (I, M)\,, \qquad e^{(\!(A,O)\!)} = (e^A, O)\,;$$

$$(3) \qquad e^{t(\!(A,M)\!)} = e^{(\!(O,\int_0^t e^{sA} M e^{sA^\dagger}\, ds)\!)} \circ e^{t(\!(A,O)\!)}\,;$$

$$(4) \qquad e^{t(\!(A,M)\!)} = e^{(\!(O,T)\!)} \circ e^{t(\!(A,O)\!)} \circ e^{-(\!(O,T)\!)} \quad \text{if} \quad AT + TA^\dagger = -M\,.$$

対応する時間発展の公式　　　　　　　　　　(BCH公式で翻訳できる)

Theorem 2.2　The following formulae hold for $A, B, M, N \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$:

$$(1) \qquad e^{t\hat{\mathcal{L}}(A,M)} = e^{\hat{\mathcal{L}}(O,\int_0^t e^{sA} M e^{sA^\dagger}\, ds)} \circ e^{t\hat{\mathcal{L}}(A,O)}\,;$$

$$(2) \qquad e^{t\hat{\mathcal{L}}(A,M)} = e^{\hat{\mathcal{L}}(O,T)} \circ e^{t\hat{\mathcal{L}}(A,O)} \circ e^{-\hat{\mathcal{L}}(O,T)} \quad \text{if} \quad AT + TA^\dagger = -M\,.$$

3　$\mathscr{D}$ の良い基底

Definition 3.1　$\xi_1, \cdots, \xi_{\mathcal{N}}, \eta_1, \cdots, \eta_{\mathcal{N}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ に対し $\mathscr{D}$ の元を定義する：

$$\Omega(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_m) = \begin{cases} \hat{\mathcal{L}}(O, \xi_1 \eta_1^\dagger) \cdots \hat{\mathcal{L}}(O, \xi_n \eta_n^\dagger) \big(\Omega(\eta_m, c) \cdots (\eta_{n+1} c)\big) \\ \hfill (\, 0 \leqslant n \leqslant m \leqslant \mathcal{N} \,) \\ \hat{\mathcal{L}}(O, \xi_1 \eta_1^\dagger) \cdots \hat{\mathcal{L}}(O, \xi_m \eta_m^\dagger) \big((c, \xi_{m+1}) \cdots (c, \xi_n) \Omega\big) \\ \hfill (\, 0 \leqslant m < n \leqslant \mathcal{N} \,) \,. \end{cases}$$

Proposition 3.2

(1)　$\Omega(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_m)$ は、$\xi_1, \cdots, \xi_n$ 及び $\eta_1, \cdots, \eta_m$ のそれぞれについて完全反対称

(2)　$\{\xi_j\}_{j=1,\cdots\mathcal{N}}, \{\eta_j\}_{j=1,\cdots\mathcal{N}}$ がそれぞれ$\mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ の基底なら

$$\left\{\, \Omega(\xi_{j_1}, \cdots, \xi_{j_n}, \eta_{k_1}, \cdots, \eta_{k_m}) \,\middle|\, j_1 < \cdots < j_n, \quad k_1 < \cdots < k_m, 0 \leqslant n, m \leqslant \mathcal{N} \,\right\}$$

は、$\mathscr{D}$ の基底

(3)　$e^{t\hat{\mathcal{L}}(A,O)} \Omega(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_m) = \Omega(e^{tA}\xi_1, \cdots, e^{tA}\xi_n, e^{tA}\eta_1, \cdots, e^{tA}\eta_m)$

ξ_j, η_k を A の固有ベクトルにとれれば有難い

4　A の分解

$A \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}), A + A^\dagger \leqslant O$(物理的条件) をジョルダン標準形に対応した形に分解する。

$$
\begin{aligned}
A =& A_0 + A_- + A_{\mathrm{N}} \\
=& P \begin{pmatrix}
-iE_1 & 0 & & & & & & \\
& -iE_2 & 0 & & & & & \\
& & -iE_3 - \sigma_3 & 0 & & & & \\
& & & -iE_4 - \sigma_4 & 1 & & & \\
& & & & -iE_4 - \sigma_4 & 0 & & \\
& & & & & -iE_5 - \sigma_5 & 1 & \\
& & & & & & -iE_5 - \sigma_5 & 1 \\
& & & & & & & -iE_5 - \sigma_5
\end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}
$$

ここで、$E_j \in \mathbb{R},\ \sigma_j > 0,$

よって、

$$[A_0, A_-] = [A_0, A_{\mathrm{N}}] = [A_-, A_{\mathrm{N}}] = O,\ A_0 A_- = A_0 A_{\mathrm{N}} = O$$

注１： 純虚数固有値は対角部分にのみ現れる。

注２： $\lim_{t\to\infty} e^{t(A_- + A_{\mathrm{N}})} =: Q_A$ は $\mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ 上の直交射影、

よって Prop 3.2 (3) より　$\lim_{t\to\infty} e^{t\hat{\mathcal{L}}(A_- + A_{\mathrm{N}}, O)}\rho = \Gamma(Q_A)\rho\Gamma(Q_A)$

5　漸近挙動

物理的条件： $-A-A^\dagger \geqslant M \geqslant 0$　が、満たされるとき、$A_0 M = M A_0 = O$ となるので

$$e^{t\hat{\mathcal{L}}(A,M)}\rho = e^{\hat{\mathcal{L}}(O,\int_0^t e^{sA}Me^{sA^\dagger}\,ds)} \circ e^{t\hat{\mathcal{L}}(A,O)}\rho \qquad \text{(Theorem 2.2 (1))}$$

$$\sim e^{t\hat{\mathcal{L}}(A_0,O)} \circ e^{\hat{\mathcal{L}}(O,T)}\big(\Gamma(Q_A)\rho\Gamma(Q_A)\big) \qquad (t \gg 1)$$

ここで

$$T = \int_0^\infty e^{s(A_- + A_\mathrm{N})} M e^{s(A_- + A_\mathrm{N})^\dagger}\,ds$$

は $AT + TA^\dagger = -M$ を満たす。

♠ 第 1 因子の $e^{t\hat{\mathcal{L}}(A_0,O)}$ は、ユニタリ発展を表す。(synchronization)

♠ 特に $A_0 = O$ の時は、定常状態(１つ)に収束する：

$$e^{t\hat{\mathcal{L}}(A,M)}\rho \to e^{\hat{\mathcal{L}}(O,T)}\Omega \qquad \text{(ガウス状態)} \quad \text{Cov.: } \langle c_j^\dagger c_k \rangle = T_{kj}$$

6　非エルミート量子力学との関連

もともと、リウヴィリアンの対応

$$\hat{\mathcal{L}}\rho = \sum_{j,k=1}^{\mathcal{N}} \Big((-iH_{jk} - D_{jk} + E_{jk}) c_j^\dagger c_k \rho + (iH_{jk} - D_{jk} + E_{jk}) \rho c_j^\dagger c_k + 2D_{jk} c_k \rho c_j^\dagger + 2E_{jk} c_j^\dagger \rho c_k \Big) - 2(\mathrm{tr} E)\rho = \hat{\mathcal{L}}(A, M)\rho$$

では

$$A = -iH - D - E, \quad M = 2E$$

とした。

「ここまでのGKSLD開放系理論から見ると、非エルミート量子力学とは、

$$H_{\mathrm{nH}} = H - iD + iE = iA + iM$$

を非エルミートハミルトニアンと見て、青の項を無視したもの」・　・　・我々の立場

この立場から、Hatano-Nelson Model をGDKLD開放系にどう取り込むか？

♠ Hatano-Nelson Model とは：

$-iH_{\mathrm{nH}} = -iH - D + E$ において

$$H = \omega I + \lambda \mathbb{F}, \qquad D - E = \gamma(aI + \mathbb{G}) \qquad\qquad \text{1次元格子モデル}$$

と置く。ここで

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{G} = \begin{pmatrix} 0 & -i & & & & \\ i & 0 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -i & \\ & & & i & 0 & -i \\ & & & & i & 0 \end{pmatrix}$$

この時、$-iH_{\mathrm{nH}} = -(a\gamma + i\omega)I - \mathbb{K}$
ここで、

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma-\lambda) & & & \\ i(\gamma+\lambda) & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & -i(\gamma-\lambda) \\ & & & i(\gamma+\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

$\omega > 0,\ \gamma > \lambda > 0,\ a \geqslant \max\{2, \sqrt{\gamma^2-\lambda^2}\}$ の場合

$$\kappa = \sqrt{\frac{\gamma-\lambda}{\gamma+\lambda}} < 1, \quad V(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \kappa & & & O & \\ & & \kappa^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & \kappa^{\mathcal{N}-1} \end{pmatrix}$$

を用いて、

$$V(\kappa)(-iH_{\mathrm{nH}})V(\kappa)^{-1} = -(a\gamma + i\omega)I - \sqrt{\gamma^2-\lambda^2}\,\mathbb{G}$$

と変換できる。よって、$-iH_{\mathrm{nH}}$ の固有ベクトルは $\mathbb{G}$ の固有ベクトルを $V(\kappa)^{-1}$ によって変換したものなので、端（下）に行くほど成分が大きくなる。（表皮効果）

♠これを、GKSLD開放系の立場で、どう扱うか。
「定常状態（終状態）

$$e^{\hat{\mathcal{L}}(O,X)}\Omega\,,\qquad X=\int_0^\infty e^{sA}Me^{sA^\dagger}ds=\int_0^\infty e^{s(-iH_{\mathrm{nH}}-2E)}2Ee^{s(-iH_{\mathrm{nH}}-2E)^\dagger}ds$$

の X が表皮効果的分布を示すように E (と D) を決める。」　($D-E$ は決まっていた。)

と問題設定すると、1つの答えとして：

$$X=x\begin{pmatrix}\kappa^{2\mathcal{N}-2} & & & & \\ & \kappa^{2\mathcal{N}-4} & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \kappa^2 & \\ & & & & 1\end{pmatrix},\qquad x\in(0,1)$$

となるように、$E\geqslant O, D\geqslant O$ を定めることが出来る。

7　一般の2体フェルミ系

マヨラナ演算子を使う:

$$w_{2m-1} = c_m + c_m^\dagger\,, \quad w_{2m} = i(c_m - c_m^\dagger)\,, \quad \{w_j, w_k\} = 2\delta_{jk} \quad (j,k = 1,\cdots,2\mathcal{N})$$

リウヴィリアン：

$$\hat{\mathcal{L}}\rho = \sum_{j,k=1}^{2\mathcal{N}} \Big(- iH_{jk}[w_j w_k, \rho] + M_{jk}(2w_j\rho w_k - \{w_k w_j, \rho\}\Big)$$

ここで、H はエルミート$2\mathcal{N}\times 2\mathcal{N}$行列、反対称にとること（一般性を失わない）にして、成分は純虚数；
M はエルミートで正の$2\mathcal{N}\times 2\mathcal{N}$行列
ここで

$$\hat{\mathcal{L}} = 4\hat{\mathcal{L}}(-iH - (M + {}^tM)/2, (M - {}^tM)/2) - 2\mathrm{tr}M$$

となる様に

$\hat{\mathcal{L}}(A,N)$ を $2\mathcal{N}\times 2\mathcal{N}$実行列$A$ と $2\mathcal{N}\times 2\mathcal{N}$純虚反対称行列$N$ に対し定義すると、

$$[\hat{\mathcal{L}}(A,M), \hat{\mathcal{L}}(B,N)] = \hat{\mathcal{L}}([A,B], AN + NA^\dagger - BM - MB^\dagger) \qquad \text{が成立}$$

8　2体ボゾン系（ゲージ不変）

$$\hat{\mathcal{L}}\rho(t) = -i[\mathcal{H}, \rho(t)] + \sum_{m=1}^{S} \left(2\mathcal{D}_m \rho(t) \mathcal{D}_m^\dagger - \{\, \mathcal{D}_m^\dagger \mathcal{D}_m, \rho(t) \,\}\right),$$

$$+ \sum_{m=S+1}^{S+S'} \left(2\mathcal{D}_m^\dagger \rho(t) \mathcal{D}_m - \{\, \mathcal{D}_m \mathcal{D}_m^\dagger, \rho(t) \,\}\right) \tag{8.1}$$

ここで、

$$\mathcal{H} = \sum_{j,k=1}^{\mathcal{N}} H_{jk} a_j^\dagger a_k, \quad \mathcal{D}_m = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \overline{\ell_{mj}} a_j \quad = (\ell_m, a)$$

とする。（$a_j, a_j^\dagger, j = 1, \ldots \mathcal{N}$ は CCR を満たす。）これに対し、

$$A = -iH - \sum_{m=1}^{S} \ell_m \ell_m^\dagger + \sum_{m=S+1}^{S+S'} \ell_m \ell_m^\dagger,$$

$$M = \sum_{m=1}^{S} \ell_m \ell_m^\dagger + \sum_{m=S+1}^{S+S'} \ell_m \ell_m^\dagger,$$

と置くと、$A, M \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})$ であり、物理的条件として $M \geqslant O,\ A + A^\dagger + 2M \geqslant O$ が必要。
この A, M に対し

$$\hat{\mathcal{L}}(A, M) = \hat{\mathcal{L}} + \sum_{m=1}^{S} (\ell_m, \ell_m) - \sum_{m=S+1}^{S+S'} (\ell_m, \ell_m)$$

と定義すると

$$[\hat{\mathcal{L}}(A, M), \hat{\mathcal{L}}(B, N)] = \hat{\mathcal{L}}([A, B], AN + NA^\dagger - BM - MB^\dagger) \qquad \text{が成立}$$

9　一般の2体ボゾン系

$\ell_j = a_j.\ \ell_{\mathcal{N}+j} = a_j^\dagger$ と置く。

$$\hat{\mathcal{L}}\rho(t) = -i[\mathcal{H}, \rho(t)] + \sum_{m=1}^{S} \left(2\mathcal{D}_m \rho(t) \mathcal{D}_m^\dagger - \{\, \mathcal{D}_m^\dagger \mathcal{D}_m, \rho(t)\,\}\right),$$

ここで、

$$\mathcal{H} = \sum_{j,k=1}^{2\mathcal{N}} H_{jk}\ell_j\ell_k, \quad \mathcal{D}_m = \sum_{j=1}^{2\mathcal{N}} \phi_{mj}\ell_j$$

とする。これに対し、

$$A = (-2iH - D + {}^tD)\tau\sigma\,, \quad M = -(D + {}^tD)\tau\sigma$$

と置くと、物理的条件は $\tau(A - A^\flat)^\dagger + (A - A^\flat)\tau = 0,\ A + A^\dagger + 2M \geqslant O$ となる。
　ここで

$$D_{jk} = \sum_{m=1}^{\tilde{M}} \phi_{mj}(\phi_m^\dagger \sigma)_k\,, \quad \sigma = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^{2\mathcal{N}})\,.$$

であり、Involution $A^\flat = \sigma\tau\,{}^tA\tau\sigma$ を用いた。

このとき、

$$\hat{\mathcal{L}}(A,M)\rho=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2\mathcal{N}}(A\sigma\tau)_{jk}\big([\ell_j\ell_k,\rho]+\ell_j\rho\ell_k-\ell_k\rho\ell_j\big)+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2\mathcal{N}}(M\sigma\tau)_{jk}[\ell_j,[\ell_k,\rho]]$$

とおくと、

$$\hat{\mathcal{L}}=\hat{\mathcal{L}}(A,M)+\mathrm{tr}(D\tau\sigma)$$

が成り立つ。また、一般の $A,M\in\mathfrak{M}(\mathbb{C}^{2\mathcal{N}})\,,M^\flat=-M$ に対し、

$$[\hat{\mathcal{L}}(A,M),\hat{\mathcal{L}}(B,N)]=\hat{\mathcal{L}}([A,B],AN+NA^\flat-BM-MB^\flat)$$

が、成立する。

まとめ

2体相互作用する開放系の解析には、アフィン変換の代数が役に立つ。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\text{Liouvillean} & & \text{“Free” Evolution} & & \mathscr{D} & & \mathscr{F} \\
\hat{\mathcal{L}}(A,M) & -\text{積分}\rightarrow & e^{t\hat{\mathcal{L}}(A,M)} & \curvearrowright & \mathfrak{T}(\mathrm{F_f}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}})) & \leftarrow\text{(混合)}- & \mathrm{F_f}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(\!(A,M)\!) & & e^{t(\!(A,M)\!)} & & \text{Gauss 状態} & & \text{量子化} \\
\Cap & & \Cap & & | & & | \\
\mathfrak{M}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) \times \mathfrak{H}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) & -\text{生成}\rightarrow & GL(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) \ltimes \mathfrak{H}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) & \underset{\text{アフィン変換}}{\curvearrowright} & \mathfrak{H}(\mathbb{C}^{\mathcal{N}}) & \curvearrowright & \mathbb{C}^{\mathcal{N}}
\end{array}
$$

THANK YOU !