fermionic Matrix Product Stateを用いたGeneralized Thouless Pumpの不変量について

基礎物理学研究所　大山修平
共同研究者：塩崎謙　佐藤昌利

based on arxiv:2206.01110
(PRBにaccept済み)

目次

- **研究の背景**
  SRE状態とGTPについて
- **研究の目的と方法**
  MPSを用いたinteracting fermionic systemにおけるGTPの検証
- **結果１：Pump不変量の定義**
  fundamental theorem for fMPS
  Pump不変量の定義
- **結果２：Pump不変量の計算**
  non-trivial phaseにおけるpump
  trivial phaseにおけるpump
- **まとめ**

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

ガチャガチャ模型の定義

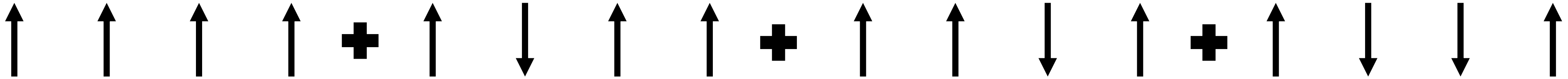
例）ガチャガチャ模型

矢印(⇅)を並べて間に丸(白/黒)を置く．両端は上向きに固定．

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定．



ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.

↑○↑○↑○↑ ✚ ↑ ↓ ↑ ↑ ✚ ↑ ↑ ↓ ↑ ✚ ↑ ↓ ↓ ↑

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定．

↑○↑○↑○↑ ✚ ↑●↓●↑○↑ ✚ ↑ ↑ ↓ ↑ ✚ ↑ ↓ ↓ ↑

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.

↑○↑○↑○↑ ＋ ↑●↓●↑○↑ ＋ ↑○↑●↓●↑ ＋ ↑ ↓ ↓ ↑

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.

↑○↑○↑○↑ + ↑●↓●↑○↑ + ↑○↑●↓●↑ + ↑●↓○↓●↑

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

　上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.

↑○↑○↑○↑ ＋ ↑●↓●↑○↑ ＋ ↑○↑●↓●↑ ＋ ↑●↓○↓●↑

⬇ 矢印を180度回す

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.

↑○↑○↑○↑ + ↑●↓●↑○↑ + ↑○↑●↓●↑ + ↑●↓○↓●↑

↓ 矢印を180度回す

↑○↓○↓○↑ + ↑●↑●↓○↑ + ↑○↓●↑●↑ + ↑●↑○↑●↑

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.

↑○↑○↑○↑ + ↑●↓●↑○↑ + ↑○↑●↓●↑ + ↑●↓○↓●↑

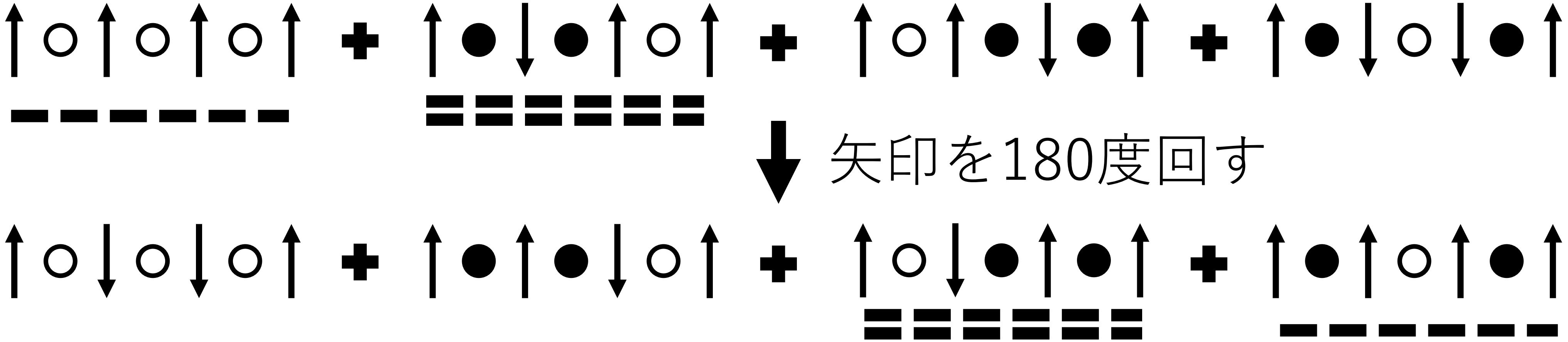
↓ 矢印を180度回す

↑○↓○↓○↑ + ↑●↑●↓○↑ + ↑○↓●↑●↑ + ↑●↑○↑●↑

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

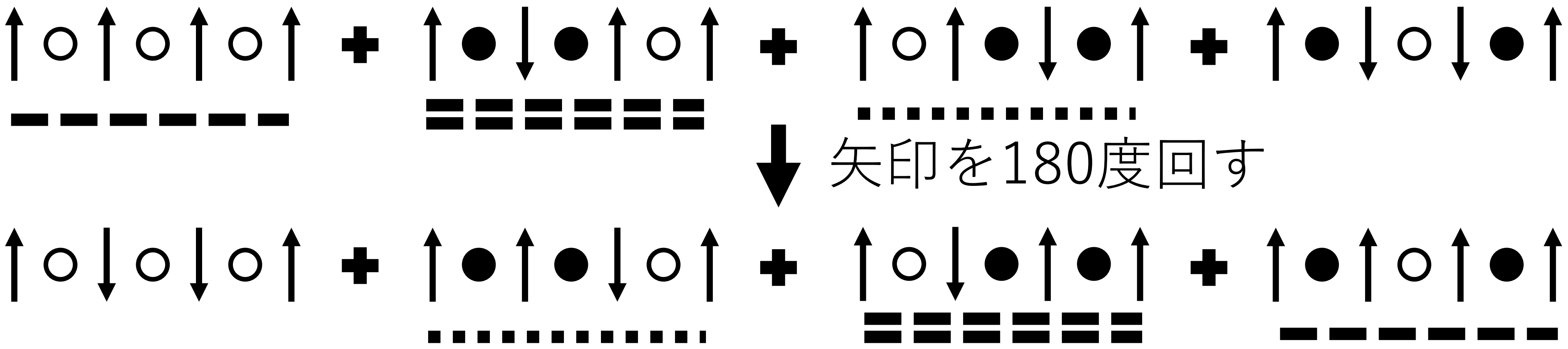
上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.



ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

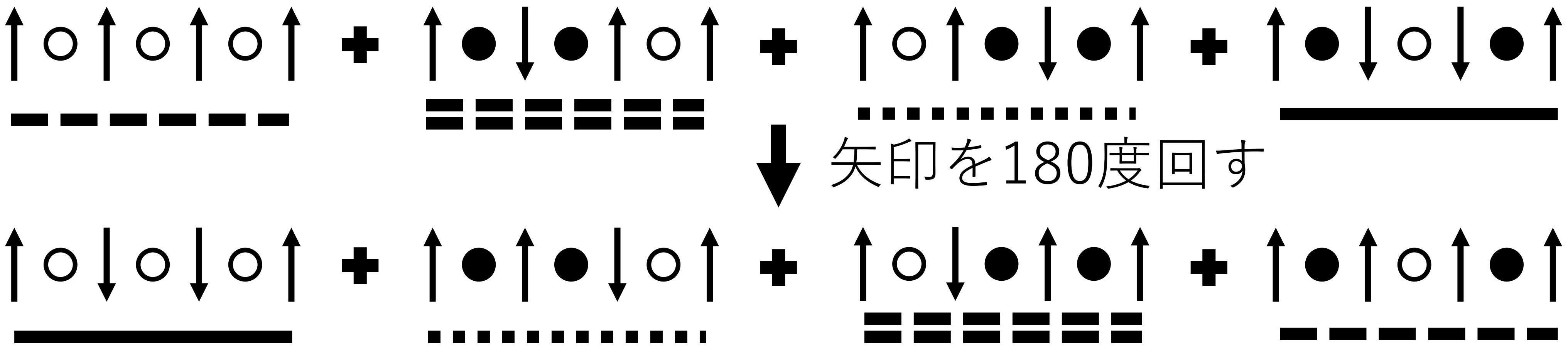
上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.



ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

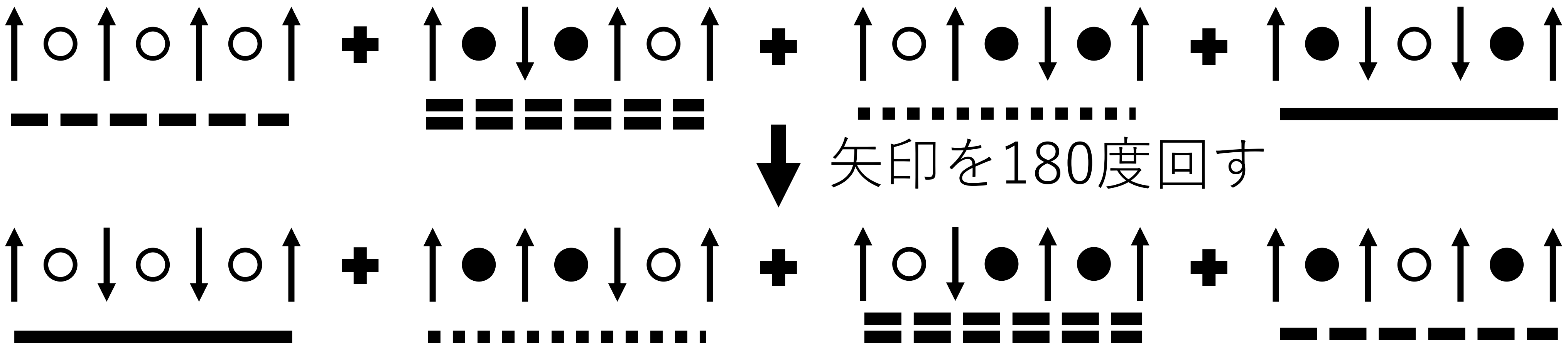
上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定．



ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定．

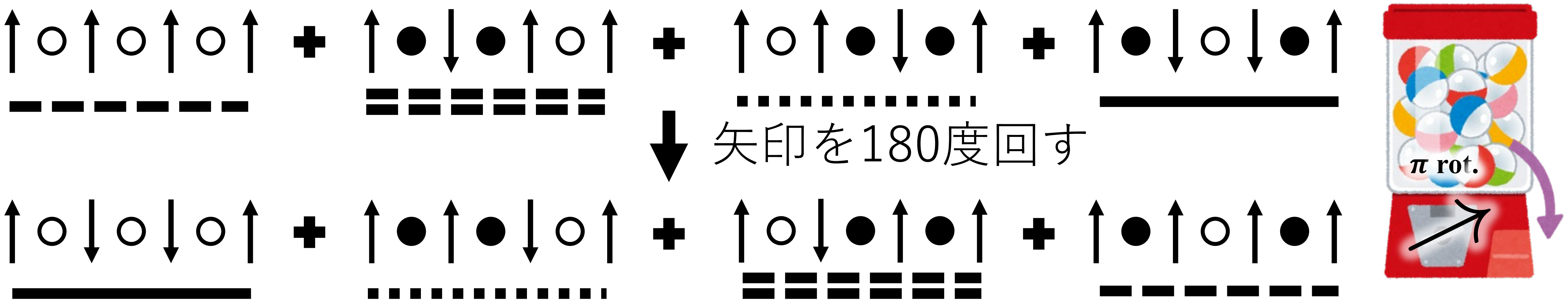


系の片方の端からもう片方の端ににZ/2 chargeがpumpされた．

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.

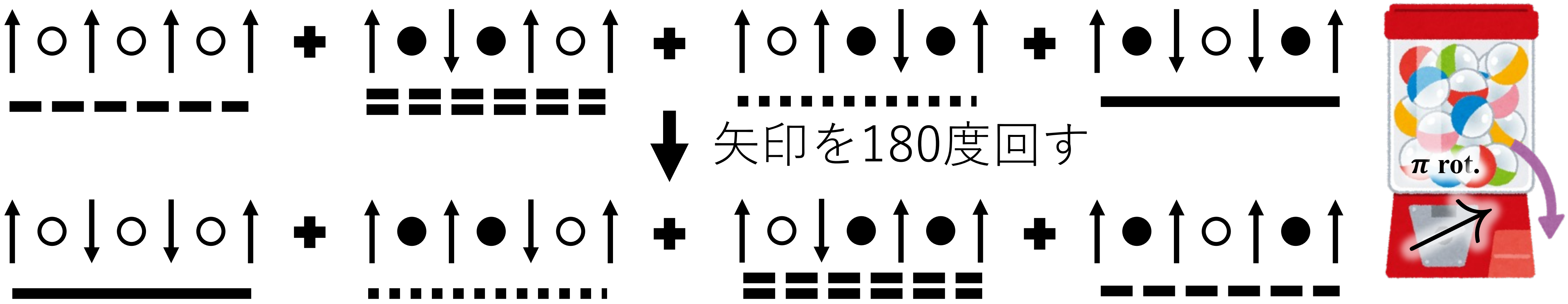


系の片方の端からもう片方の端ににZ/2 chargeがpumpされた.

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.



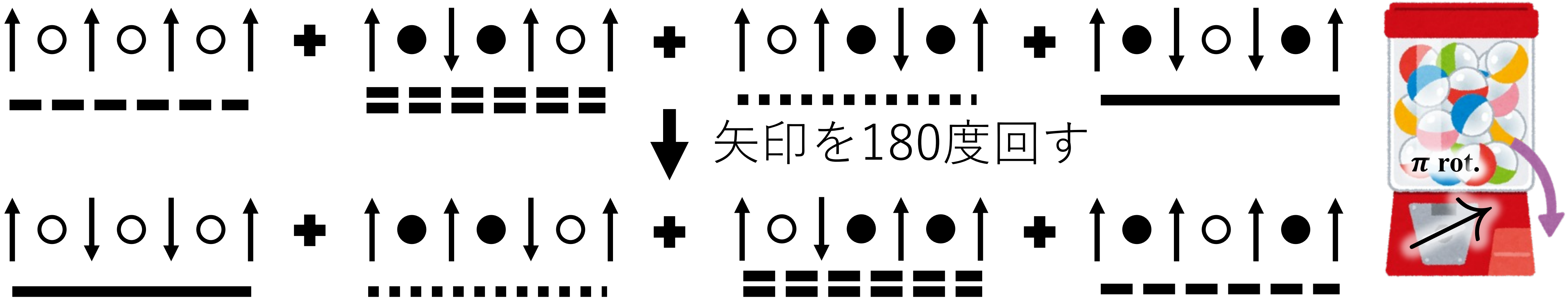
系の片方の端からもう片方の端ににZ/2 chargeがpumpされた.

★ 矢印をspin，丸をcpx. fermionに読み替えると以下のHam.で実現できる：

ガチャガチャ模型の定義

例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定.



系の片方の端からもう片方の端にZ/2 chargeがpumpされた.

★ 矢印をspin，丸をcpx. fermionに読み替えると以下のHam.で実現できる：

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1 - 2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

ガチャガチャ模型の定義

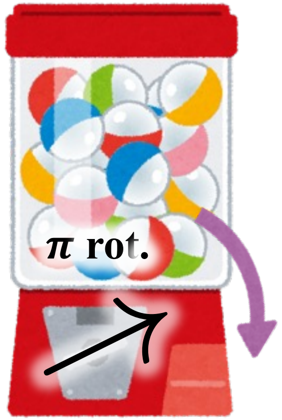
例）ガチャガチャ模型

上/下矢印を並べて間に黒/白丸を置く．両端は上向きに固定．

↑○↑○↑○↑ + ↑●↓●↑○↑ + ↑○↑●↓●↑ + ↑●↓○↓●↑

↓ 矢印を180度回す

↑○↓○↓○↑ + ↑●↑●↓○↑ + ↑○↓●↑●↑ + ↑●↑○↑●↑



系の片方の端からもう片方の端ににZ/2 chargeがpumpされた．

★ 矢印をspin，丸をcpx. fermionに読み替えると以下のHam.で実現できる：

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1-2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

ただし $\tau_j^{z,\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}\tau_j^z e^{-i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}$． このとき $H(0) = H(\pi)$．

ガチャガチャ模型の特徴

例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1 - 2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

ガチャガチャ模型の特徴

例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1 - 2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

・各 θ に対してuniqueかつgappedなHamiltonianである．

　このようなHam.のG.S.を**Short-Range Entangled(SRE)**状態という．

ガチャガチャ模型の特徴

例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1 - 2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

・各 θ に対してuniqueかつgappedなHamiltonianである．

このようなHam.のG.S.を**Short-Range Entangled(SRE)**状態という．

・各 θ に対して適当なunitary変換を行うと， $\theta=0$にできる：

ガチャガチャ模型の特徴

例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1-2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

・各 θ に対してuniqueかつgappedなHamiltonianである．

このようなHam.のG.S.を**Short-Range Entangled(SRE)**状態という．

・各 θ に対して適当なunitary変換を行うと，θ =0にできる：

$$H(\theta) = (\prod_j e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x})H(0)(\prod_j e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x})^\dagger$$

ガチャガチャ模型の特徴

例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1-2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

・各 θ に対してuniqueかつgappedなHamiltonianである.

　このようなHam.のG.S.を**Short-Range Entangled(SRE)**状態という.

・各 θ に対して適当なunitary変換を行うと， θ =0にできる：

$$H(\theta) = (\prod_j e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x})H(0)(\prod_j e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x})^\dagger$$

　すなわち各 θ におけるHam.は本質的に同じもの.

ガチャガチャ模型の特徴

例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1 - 2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

・各 θ に対してuniqueかつgappedなHamiltonianである.

　このようなHam.のG.S.を**Short-Range Entangled(SRE)**状態という.

・各 θ に対して適当なunitary変換を行うと，θ =0にできる：

$$H(\theta) = (\prod_j e^{i\frac{\theta}{2}\tau^x_j})H(0)(\prod_j e^{i\frac{\theta}{2}\tau^x_j})^\dagger$$

　すなわち各 θ におけるHam.は本質的に同じもの.

つまりpumpはunique gapped Ham.の**族としての非自明性**と関係する.

ガチャガチャ模型の特徴

例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta)=-\sum_j(a_j^\dagger-a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger+a_{j+1})-\sum_j\tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1-2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

・各θに対してuniqueかつgappedなHamiltonianである.

このようなHam.のG.S.を**Short-Range Entangled(SRE)**状態という.

・各θに対して適当なunitary変換を行うと，θ=0にできる：

$$H(\theta)=(\prod_j e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x})H(0)(\prod_j e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x})^\dagger$$

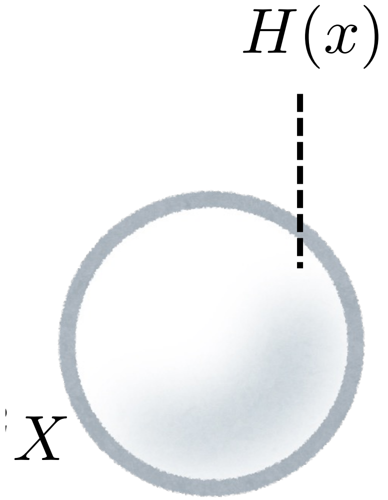
すなわち各θにおけるHam.は本質的に同じもの.

つまりpumpはunique gapped Ham.の**族としての非自明性**と関係する.

(Kitaevの予想から一般的に期待されている.[Kitaev10])

一般的な問い

d+1次元のSRE状態の族に対して，**族としての非自明さを測る量**は何か？



X ：parameter空間

$H(x)$：d+1次元 unique gapped Ham.

目次

- **研究の背景**

  SRE状態とGTPについて

- **研究の目的と方法**

  MPSを用いたinteracting fermionic systemにおけるGTPの検証

- **結果１：Pump不変量の定義**

  fundamental theorem for fMPS

  Pump不変量の定義

- **結果２：Pump不変量の計算**

  non-trivial phaseにおけるpump

  trivial phaseにおけるpump

- **まとめ**

[J.C.Y.Teo,C.L.Kane,”Topologicaldefectsandgaplessmodesininsulatorsandsuperconductors” Phys. Rev. B 82, 115120 (2010).]

研究の目的と方法

X=S^1の場合の先行研究

[J.C.Y.Teo,C.L.Kane,”Topologicaldefectsandgaplessmodesininsulatorsandsuperconductors” Phys. Rev. B 82, 115120 (2010).]

研究の目的と方法

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]

[J.C.Y.Teo,C.L.Kane,"Topologicaldefectsandgaplessmodesininsulatorsandsuperconductors" Phys. Rev. B 82, 115120 (2010).]

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
　非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
　非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

目的

[J.C.Y.Teo,C.L.Kane,"Topologicaldefectsandgaplessmodesininsulatorsandsuperconductors" Phys. Rev. B 82, 115120 (2010).]

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
　非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

目的

※一般には難しいので次元を1+1次元に限定する

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

目的

※一般には難しいので次元を1+1次元に限定する

目的：

1+1次元interacting fermion系において**自明相/非自明相のS1族を分類**.

[J.C.Y.Teo,C.L.Kane,"Topologicaldefectsandgaplessmodesininsulatorsandsuperconductors" Phys. Rev. B 82, 115120 (2010).]

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
　非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

目的

※一般には難しいので次元を1+1次元に限定する

目的：

1+1次元interacting fermion系において**自明相/非自明相のS1族を分類**.

＝SRE状態のS^1 familyに対して不変量を構成したい.

[J.C.Y.Teo,C.L.Kane,"Topologicaldefectsandgaplessmodesininsulatorsandsuperconductors" Phys. Rev. B 82, 115120 (2010).]

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

目的

※一般には難しいので次元を1+1次元に限定する

目的：

1+1次元interacting fermion系において**自明相/非自明相のS1族を分類**.

＝SRE状態のS^1 familyに対して不変量を構成したい.

方法：

Z/2-graded central simpleなfermionic Matrix Product Stateの利用.

[J.C.Y.Teo,C.L.Kane,"Topologicaldefectsandgaplessmodesininsulatorsandsuperconductors" Phys. Rev. B 82, 115120 (2010).]

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

目的

※一般には難しいので次元を1+1次元に限定する

目的：

1+1次元interacting fermion系において**自明相/非自明相のS1族を分類**.

＝SRE状態のS^1 familyに対して不変量を構成したい.

方法：

Z/2-graded central simpleな**fermionic Matrix Product Stateの利用**.

[J.C.Y.Teo,C.L.Kane,"Topologicaldefectsandgaplessmodesininsulatorsandsuperconductors" Phys. Rev. B 82, 115120 (2010).]

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
　非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

目的

※一般には難しいので次元を1+1次元に限定する

目的：

1+1次元interacting fermion系において**自明相/非自明相のS1族を分類.**

＝SRE状態のS^1 familyに対して不変量を構成したい.

方法：　**次のスライドで説明**

Z/2-graded central simpleな**fermionic Matrix Product Stateの利用.**

[J.C.Y.Teo,C.L.Kane,”Topologicaldefectsandgaplessmodesininsulatorsandsuperconductors” Phys. Rev. B 82, 115120 (2010).]

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
　非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

目的

※一般には難しいので次元を1+1次元に限定する

目的：

1+1次元interacting fermion系において**自明相/非自明相のS1族を分類**.

＝SRE状態のS^1 familyに対して不変量を構成したい.

方法：　**次のスライドで説明**

Z/2-graded central simpleな**fermionic Matrix Product Stateの利用**.

研究の目的と方法

※自明相：product stateと連続的に繋がる
　非自明相：自明相以外

X=S^1の場合の先行研究

	自明相	非自明相
free fermion	fermion parity[Teo-Kane]	fermion parity[Teo-Kane]
interacting fermion	未検証	未検証

目的

※一般には難しいので次元を1+1次元に限定する

目的：

1+1次元interacting fermion系において**自明相/非自明相のS1族を分類**.

＝SRE状態のS^1 familyに対して不変量を構成したい.

方法：　**次のスライドで説明**　**次の次のスライドで説明**

Z/2-graded central simpleな**fermionic Matrix Product State**の利用.

目次

- **研究の背景**

  SRE状態とGTPについて

- **研究の目的と方法**

  MPSを用いたinteracting fermionic systemにおけるGTPの検証

- **結果１：Pump不変量の定義**

  fundamental theorem for fMPS

  Pump不変量の定義

- **結果２：Pump不変量の計算**

  non-trivial phaseにおけるpump

  trivial phaseにおけるpump

- **まとめ**

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

①

②

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の2パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

②

$\mathbb{Z}/2$-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

<u>大事な点</u>

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の 2 パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

(＋)-type：

②

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の２パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

(＋)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$

②

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の２パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

(＋)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$

(－)-type：

②

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の 2 パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

(+)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$

(−)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$

②

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の 2 パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

(＋)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$

(－)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C})$

② Z/2-gr. CSAには $u^2 \propto 1$ を満たす元 u が存在する.

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の 2 パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

(＋)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$

(－)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C})$

② Z/2-gr. CSAには $u^2 \propto 1$ を満たす元 u が存在する.
上の行列表示において u は以下の行列で与えられる：

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の2パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

(＋)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$

(−)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C})$

② Z/2-gr. CSAには $u^2 \propto 1$ を満たす元 u が存在する.
上の行列表示において u は以下の行列で与えられる：

(＋)-type：$u \propto \begin{pmatrix} 1_n & \\ & -1_n \end{pmatrix}$

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の 2 パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

(+)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$

(−)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C})$

② Z/2-gr. CSAには $u^2 \propto 1$ を満たす元 u が存在する.
上の行列表示において u は以下の行列で与えられる：

(+)-type：$u \propto \begin{pmatrix} 1_n & \\ & -1_n \end{pmatrix}$ (−)-type：$u \propto \begin{pmatrix} & -1_n \\ 1_n & \end{pmatrix}$

Z/2-graded Central Simple Algebra(CSA)

Z/2-gr. CSAは抽象的に定義されるが今回のトークでは使わないので割愛

大事な点

① Z/2-gr. CSA $\mathcal{A}$ は以下の2パターンのどちらかに同型(Wallの定理)：

(＋)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$

(－)-type：$\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{n}(\mathbb{C})$

② Z/2-gr. CSAには $u^2 \propto 1$ を満たす元 u が存在する.

上の行列表示において u は以下の行列で与えられる：

(＋)-type：$u \propto \begin{pmatrix} 1_n & \\ & -1_n \end{pmatrix}$　(－)-type：$u \propto \begin{pmatrix} & -1_n \\ 1_n & \end{pmatrix}$

N. Bultinck, et.al., Phys.Rev.B 95 (2017) 7, 075108.

fermionic Matrix Product State (fMPS)

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$：$2n \times 2n$ 行列の組

N. Bultinck, et.al., Phys.Rev.B 95 (2017) 7, 075108.

fermionic Matrix Product State (fMPS)

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$： $2n \times 2n$ 行列の組

$s.t.\ \mathcal{A} = \mathrm{Span}(\{A^i\})$ がZ/2-gr. CSA

N. Bultinck, et.al., Phys.Rev.B 95 (2017) 7, 075108.

fermionic Matrix Product State (fMPS)

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$： $2n \times 2n$ 行列の組

$s.t.\ \mathcal{A} = \mathrm{Span}(\{A^i\})$ がZ/2-gr. CSA with some technical conditions.

N. Bultinck, et.al., Phys.Rev.B 95 (2017) 7, 075108.

fermionic Matrix Product State (fMPS)

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$： $2n \times 2n$ 行列の組

$s.t.\ \mathcal{A} = \mathrm{Span}(\{A^i\})$ がZ/2-gr. CSA with some technical conditions.

このとき次で状態を定める： $|\{A^i, u\}\rangle = \sum \mathrm{tr}(uA^{i_1} \cdots A^{i_L})\,|i_1, ..., i_L\rangle$

fermionic Matrix Product State (fMPS)

N. Bultinck, et.al., Phys.Rev.B 95 (2017) 7, 075108.

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$： $2n \times 2n$ 行列の組

$s.t.\ \mathcal{A} = \mathrm{Span}(\{A^i\})$ がZ/2-gr. CSA with some technical conditions.

このとき次で状態を定める： $|\{A^i, u\}\rangle = \sum \mathrm{tr}(uA^{i_1} \cdots A^{i_L})\,|i_1, ..., i_L\rangle$

すると $|\{A^i, u\}\rangle$ はfermionic SRE状態を与える [Bultinck,et.al.,]

N. Bultinck, et.al., Phys.Rev.B 95 (2017) 7, 075108.

fermionic Matrix Product State (fMPS)

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$：$2n \times 2n$ 行列の組

$s.t.\ \mathcal{A} = \mathrm{Span}(\{A^i\})$ がZ/2-gr. CSA with some technical conditions.

このとき次で状態を定める： $|\{A^i, u\}\rangle = \sum \mathrm{tr}(uA^{i_1} \cdots A^{i_L})\,|i_1, \ldots, i_L\rangle$

すると $|\{A^i, u\}\rangle$ はfermionic SRE状態を与える[Bultinck,et.al.,]

$|\{A^i, u\}\rangle$：fermionic SRE state $\rightleftarrows$ $\{A^i\}$：Z/2-gr. CSA

N. Bultinck, et.al., Phys.Rev.B 95 (2017) 7, 075108.

fermionic Matrix Product State (fMPS)

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$： $2n \times 2n$ 行列の組

$s.t.$ $\mathcal{A} = \mathrm{Span}(\{A^i\})$ がZ/2-gr. CSA with some technical conditions.

このとき次で状態を定める： $|\{A^i, u\}\rangle = \sum \mathrm{tr}(uA^{i_1} \cdots A^{i_L})\, |i_1, \ldots, i_L\rangle$

すると $|\{A^i, u\}\rangle$ はfermionic SRE状態を与える[Bultinck,et.al.,]

$|\{A^i, u\}\rangle$ ：fermionic SRE state $\rightleftarrows$ $\{A^i\}$：Z/2-gr. CSA

例)periodic Kitaev chain： $H = \sum -a^\dagger_{j+1} a_{j+1} - a^\dagger_{j+1} a_j + a^\dagger_j a^\dagger_{j+1} + a_{j+1} a_j$

fermionic Matrix Product State (fMPS)

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$：$2n \times 2n$ 行列の組

$s.t.$ $\mathcal{A} = \mathrm{Span}(\{A^i\})$がZ/2-gr. CSA with some technical conditions.

このとき次で状態を定める： $|\{A^i, u\}\rangle = \sum \mathrm{tr}(uA^{i_1} \cdots A^{i_L})\, |i_1, ..., i_L\rangle$

すると $|\{A^i, u\}\rangle$ はfermionic SRE状態を与える [Bultinck,et.al.,]

$$\boxed{|\{A^i, u\}\rangle \text{ : fermionic SRE state} \rightleftarrows \{A^i\}\text{ : Z/2-gr. CSA}}$$

例)periodic Kitaev chain：$H = \sum -a_{j+1}^\dagger a_{j+1} - a_{j+1}^\dagger a_j + a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger + a_{j+1} a_j$

このとき行列の組として $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $A^1 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

とすると $|\{A^i, u\}\rangle$ は基底状態を与える.

N. Bultinck, et.al., Phys.Rev.B 95 (2017) 7, 075108.

fermionic Matrix Product State (fMPS)

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$： $2n \times 2n$ 行列の組

$s.t.\ \mathcal{A} = \mathrm{Span}(\{A^i\})$ がZ/2-gr. CSA with some technical conditions.

このとき次で状態を定める： $|\{A^i, u\}\rangle = \sum \mathrm{tr}(uA^{i_1} \cdots A^{i_L})\, |i_1, \ldots, i_L\rangle$

すると $|\{A^i, u\}\rangle$ はfermionic SRE状態を与える [Bultinck,et.al.,]

$$\boxed{|\{A^i, u\}\rangle \text{ ：fermionic SRE state} \rightleftarrows \{A^i\}\text{：Z/2-gr. CSA}}$$

例)periodic Kitaev chain： $H = \sum -a^\dagger_{j+1} a_{j+1} - a^\dagger_{j+1} a_j + a^\dagger_j a^\dagger_{j+1} + a_{j+1} a_j$

このとき行列の組として $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $A^1 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

とすると $|\{A^i, u\}\rangle$ は基底状態を与える.

$\{A^i\}$ の生成する代数 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

fermionic Matrix Product State (fMPS)

Z/2-gr. central simple matrices： $\{A^i\}$：$2n \times 2n$ 行列の組

$s.t.\ \mathcal{A} = \mathrm{Span}(\{A^i\})$がZ/2-gr. CSA with some technical conditions.

このとき次で状態を定める： $|\{A^i, u\}\rangle = \sum \mathrm{tr}(uA^{i_1} \cdots A^{i_L})\,|i_1, \ldots, i_L\rangle$

すると $|\{A^i, u\}\rangle$ はfermionic SRE状態を与える[Bultinck,et.al.,]

$|\{A^i, u\}\rangle$ ：fermionic SRE state $\rightleftarrows$ $\{A^i\}$：Z/2-gr. CSA

例)periodic Kitaev chain：$H = \sum -a^\dagger_{j+1}a_{j+1} - a^\dagger_{j+1}a_j + a^\dagger_j a^\dagger_{j+1} + a_{j+1}a_j$

このとき行列の組として $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $A^1 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

とすると $|\{A^i, u\}\rangle$ は基底状態を与える.

$\{A^i\}$ の生成する代数 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ よりZ/2-gr. CSAでtype(−).

目次

- 研究の背景
  SRE状態とGTPについて
- 研究の目的と方法
  MPSを用いたinteracting fermionic systemにおけるGTPの検証
- 結果１：Pump不変量の定義
  fundamental theorem for fMPS
  Pump不変量の定義
- 結果２：Pump不変量の計算
  non-trivial phaseにおけるpump
  trivial phaseにおけるpump
- まとめ

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

0+1次元系におけるBerry位相：

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

0+1次元系におけるBerry位相：

$$
\begin{array}{lcl}
\text{ファイバー} & \mathbb{C} & \text{：状態の位相} \\
 & \downarrow & \\
\text{全空間} & \mathcal{L} & \\
 & \downarrow & \\
\text{低空間} & X & \text{：parameter空間}
\end{array}
$$

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

0+1次元系におけるBerry位相：

$$
\begin{array}{lll}
\text{ファイバー} & \mathbb{C} & \text{：状態の位相} \\
 & \downarrow & \\
\text{全空間} & \mathcal{L} & \\
 & \downarrow & \\
\text{低空間} & X & \text{：parameter空間}
\end{array}
$$

Berry接続/曲率 $=\mathcal{L}$ のtopology

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

<u>0+1次元系におけるBerry位相：</u>

$$\begin{array}{lll} \text{ファイバー} & \mathbb{C} & \text{：状態の位相} \\ & \downarrow & \\ \text{全空間} & \mathcal{L} & \\ & \downarrow & \\ \text{低空間} & X & \text{：parameter空間} \end{array}$$

Berry接続/曲率 $= \mathcal{L}$ のtopology

<u>1+1次元系におけるPump不変量：</u>

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

0+1次元系におけるBerry位相：

ファイバー　$\mathbb{C}$ ：状態の位相

$\downarrow$

全空間　$\mathcal{L}$

$\downarrow$

低空間　X ：parameter空間

Berry接続/曲率 $=\mathcal{L}$ のtopology

1+1次元系におけるPump不変量：

ファイバー　A ：Z/2-gr. CSA

$\downarrow$

全空間　$\mathcal{A}$

$\downarrow$

低空間　X ：parameter空間

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

<u>0+1次元系におけるBerry位相：</u>

ファイバー $\mathbb{C}$ ：状態の位相

$\downarrow$

全空間 $\mathcal{L}$

$\downarrow$

低空間 X ：parameter空間

Berry接続/曲率 $=\mathcal{L}$ のtopology

<u>1+1次元系におけるPump不変量：</u>

ファイバー A ：Z/2-gr. CSA

$\downarrow$

全空間 $\mathcal{A}$

$\downarrow$

低空間 X ：parameter空間

Pump不変量 $=\mathcal{A}$ のtopology

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

0+1次元系におけるBerry位相：

ファイバー	$\mathbb{C}$	：状態の位相
	$\downarrow$	
全空間	$\mathcal{L}$	
	$\downarrow$	
低空間	X	：parameter空間

Berry接続/曲率 $=\mathcal{L}$ のtopology

1+1次元系におけるPump不変量：

ファイバー	A	：Z/2-gr. CSA
	$\downarrow$	
全空間	$\mathcal{A}$	
	$\downarrow$	
低空間	X	：parameter空間

Pump不変量 $=\mathcal{A}$ のtopology

$\mathcal{A}$ の変換関数は何か？

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

0+1次元系におけるBerry位相：			1+1次元系におけるPump不変量：		
ファイバー	$\mathbb{C}$	：状態の位相	ファイバー	A	：Z/2-gr. CSA
	$\downarrow$			$\downarrow$	
全空間	$\mathcal{L}$		全空間	$\mathcal{A}$	
	$\downarrow$			$\downarrow$	
低空間	X	：parameter空間	低空間	X	：parameter空間

Berry接続/曲率 $=\mathcal{L}$ のtopology

Pump不変量 $=\mathcal{A}$ のtopology

$\mathcal{A}$ の変換関数は何か？$\Leftrightarrow$ $|\{A^i, u\}\rangle \propto |\{A'^i, u'\}\rangle$ の時 $\{A^i\}$ と $\{A'^i\}$ の関係は？

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

<u>0+1次元系におけるBerry位相：</u>

$$\begin{array}{lll} \text{ファイバー} & \mathbb{C} & \text{：状態の位相} \\ & \downarrow & \\ \text{全空間} & \mathcal{L} & \\ & \downarrow & \\ \text{低空間} & X & \text{：parameter空間} \end{array}$$

Berry接続/曲率 $=\mathcal{L}$ のtopology

<u>1+1次元系におけるPump不変量：</u>

$$\begin{array}{lll} \text{ファイバー} & A & \text{：Z/2-gr. CSA} \\ & \downarrow & \\ \text{全空間} & \mathcal{A} & \\ & \downarrow & \\ \text{低空間} & X & \text{：parameter空間} \end{array}$$

Pump不変量 $=\mathcal{A}$ のtopology

$\mathcal{A}$ の変換関数は何か？⇔ $|\{A^i, u\}\rangle \propto |\{A'^i, u'\}\rangle$ の時 $\{A^i\}$ と $\{A'^i\}$ の関係は？

⇒fermionic MPSのfundamental theoremを証明する必要がある.

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

Theorem 3. (fundamental theorem for fMPS with Wall invariant (+))
Let $\{A^i\}_i$ and $\{\tilde{A}^i\}_i$ be injective fMPSs with the Wall invariant (+) in the canonical form (111). They give the same physical state in APBC, in other words, $\{A^i\}_i \sim \{\tilde{A}^i\}_i$ holds if and only if there exist a unitary matrix $V \in \mathrm{U}(2n)$ and a U(1) phase $e^{i\beta} \in \mathrm{U}(1)$ obeying that

$$\tilde{A}^i = e^{i\beta} V^\dagger A^i V. \tag{112}$$

The unitary matrix V is unique up to U(1) phase, and $e^{i\beta}$ is unique.

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

Theorem 3. (fundamental theorem for fMPS with Wall invariant (+))
Let $\{A^i\}_i$ and $\{\tilde{A}^i\}_i$ be injective fMPSs with the Wall invariant (+) in the canonical form (111). They give the same physical state in APBC, in other words, $\{A^i\}_i \sim \{\tilde{A}^i\}_i$ holds if and only if there exist a unitary matrix $V \in \mathrm{U}(2n)$ and a U(1) phase $e^{i\beta} \in \mathrm{U}(1)$ obeying that

$$\tilde{A}^i = e^{i\beta} V^\dagger A^i V. \tag{112}$$

The unitary matrix V is unique up to U(1) phase, and $e^{i\beta}$ is unique.

変換関数がZ/2-gradingを保つunitary変換のみであることを証明した.

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

Theorem 3. (fundamental theorem for fMPS with Wall invariant (+))
Let $\{A^i\}_i$ and $\{\tilde{A}^i\}_i$ be injective fMPSs with the Wall invariant (+) in the canonical form (111). They give the same physical state in APBC, in other words, $\{A^i\}_i \sim \{\tilde{A}^i\}_i$ holds if and only if there exist a unitary matrix $V \in \mathrm{U}(2n)$ and a U(1) phase $e^{i\beta} \in \mathrm{U}(1)$ obeying that

$$\tilde{A}^i = e^{i\beta} V^\dagger A^i V. \tag{112}$$

The unitary matrix V is unique up to U(1) phase, and $e^{i\beta}$ is unique.

変換関数がZ/2-gradingを保つunitary変換のみであることを証明した.

不変量の具体的な計算法(解析的な方法)：

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

Theorem 3. (fundamental theorem for fMPS with Wall invariant (+))
Let $\{A^i\}_i$ and $\{\tilde{A}^i\}_i$ be injective fMPSs with the Wall invariant (+) in the canonical form (111). They give the same physical state in APBC, in other words, $\{A^i\}_i \sim \{\tilde{A}^i\}_i$ holds if and only if there exist a unitary matrix $V \in \mathrm{U}(2n)$ and a U(1) phase $e^{i\beta} \in \mathrm{U}(1)$ obeying that

$$\tilde{A}^i = e^{i\beta} V^\dagger A^i V. \tag{112}$$

The unitary matrix V is unique up to U(1) phase, and $e^{i\beta}$ is unique.

変換関数がZ/2-gradingを保つunitary変換のみであることを証明した.

不変量の具体的な計算法(解析的な方法)：

①ゲージ変換で$\{A^i(\theta), u(\theta)\}$を周期的にとる：$\{\tilde{A}^i(0), \tilde{u}(0)\} = \{\tilde{A}^i(2\pi), \tilde{u}(2\pi)\}$,

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

Theorem 3. (fundamental theorem for fMPS with Wall invariant (+))
Let $\{A^i\}_i$ and $\{\tilde{A}^i\}_i$ be injective fMPSs with the Wall invariant (+) in the canonical form (111). They give the same physical state in APBC, in other words, $\{A^i\}_i \sim \{\tilde{A}^i\}_i$ holds if and only if there exist a unitary matrix $V \in \mathrm{U}(2n)$ and a U(1) phase $e^{i\beta} \in \mathrm{U}(1)$ obeying that

$$\tilde{A}^i = e^{i\beta} V^\dagger A^i V. \tag{112}$$

The unitary matrix V is unique up to U(1) phase, and $e^{i\beta}$ is unique.

変換関数がZ/2-gradingを保つunitary変換のみであることを証明した.

不変量の具体的な計算法(解析的な方法)：

①ゲージ変換で$\{A^i(\theta), u(\theta)\}$を周期的にとる：$\{\tilde{A}^i(0), \tilde{u}(0)\} = \{\tilde{A}^i(2\pi), \tilde{u}(2\pi)\}$,

② $\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)$ は周期的なので**巻きつき数は量子化**： $n_{\mathrm{top.}} = \int d\log(\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)) \in \mathbb{Z}$

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

Theorem 3. (fundamental theorem for fMPS with Wall invariant (+))
Let $\{A^i\}_i$ and $\{\tilde{A}^i\}_i$ be injective fMPSs with the Wall invariant (+) in the canonical form (111). They give the same physical state in APBC, in other words, $\{A^i\}_i \sim \{\tilde{A}^i\}_i$ holds if and only if there exist a unitary matrix $V \in \mathrm{U}(2n)$ and a U(1) phase $e^{i\beta} \in \mathrm{U}(1)$ obeying that

$$\tilde{A}^i = e^{i\beta} V^\dagger A^i V. \tag{112}$$

The unitary matrix V is unique up to U(1) phase, and $e^{i\beta}$ is unique.

変換関数がZ/2-gradingを保つunitary変換のみであることを証明した.

不変量の具体的な計算法(解析的な方法)：

①ゲージ変換で$\{A^i(\theta), u(\theta)\}$を周期的にとる：$\{\tilde{A}^i(0), \tilde{u}(0)\} = \{\tilde{A}^i(2\pi), \tilde{u}(2\pi)\}$,

② $\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)$ は周期的なので**巻きつき数は量子化**： $n_{\mathrm{top.}} = \int d\log(\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)) \in \mathbb{Z}$

③ $\tilde{u}(\theta)$ は周期的な位相の付け替えで $n_{\mathrm{top.}}$は**偶数だけシフト**：

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

Theorem 3. (fundamental theorem for fMPS with Wall invariant (+))
Let $\{A^i\}_i$ and $\{\tilde{A}^i\}_i$ be injective fMPSs with the Wall invariant (+) in the canonical form (111). They give the same physical state in APBC, in other words, $\{A^i\}_i \sim \{\tilde{A}^i\}_i$ holds if and only if there exist a unitary matrix $V \in \mathrm{U}(2n)$ and a U(1) phase $e^{i\beta} \in \mathrm{U}(1)$ obeying that

$$\tilde{A}^i = e^{i\beta} V^\dagger A^i V. \tag{112}$$

The unitary matrix V is unique up to U(1) phase, and $e^{i\beta}$ is unique.

変換関数がZ/2-gradingを保つunitary変換のみであることを証明した.

<u>不変量の具体的な計算法(解析的な方法)：</u>

①ゲージ変換で$\{A^i(\theta), u(\theta)\}$を周期的にとる：$\{\tilde{A}^i(0), \tilde{u}(0)\} = \{\tilde{A}^i(2\pi), \tilde{u}(2\pi)\}$,

② $\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)$ は周期的なので**巻きつき数は量子化**： $n_{\mathrm{top.}} = \int \mathrm{dlog}(\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)) \in \mathbb{Z}$

③ $\tilde{u}(\theta)$ は周期的な位相の付け替えで $n_{\mathrm{top.}}$は**偶数だけシフト**：

例) $\tilde{u}(\theta) \to e^{i\theta}\tilde{u}(\theta)$ に対して $n_{\mathrm{top.}} \mapsto n_{\mathrm{top.}} + 2$.

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

Theorem 3. (fundamental theorem for fMPS with Wall invariant (+))
Let $\{A^i\}_i$ and $\{\tilde{A}^i\}_i$ be injective fMPSs with the Wall invariant (+) in the canonical form (111). They give the same physical state in APBC, in other words, $\{A^i\}_i \sim \{\tilde{A}^i\}_i$ holds if and only if there exist a unitary matrix $V \in \mathrm{U}(2n)$ and a U(1) phase $e^{i\beta} \in \mathrm{U}(1)$ obeying that

$$\tilde{A}^i = e^{i\beta} V^\dagger A^i V. \tag{112}$$

The unitary matrix V is unique up to U(1) phase, and $e^{i\beta}$ is unique.

変換関数がZ/2-gradingを保つunitary変換のみであることを証明した.

<u>不変量の具体的な計算法(解析的な方法)：</u>

①ゲージ変換で$\{A^i(\theta), u(\theta)\}$を周期的にとる：$\{\tilde{A}^i(0), \tilde{u}(0)\} = \{\tilde{A}^i(2\pi), \tilde{u}(2\pi)\}$,

② $\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)$ は周期的なので**巻きつき数は量子化**： $n_{\mathrm{top.}} = \int d\log(\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)) \in \mathbb{Z}$

③ $\tilde{u}(\theta)$ は周期的な位相の付け替えで $n_{\mathrm{top.}}$は**偶数だけシフト**：

例） $\tilde{u}(\theta) \to e^{i\theta}\tilde{u}(\theta)$ に対して $n_{\mathrm{top.}} \mapsto n_{\mathrm{top.}} + 2$.

$$\boxed{\textbf{Pump不変量}：n_{\mathrm{top.}} = \int d\log(\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$$

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

Theorem 3. (fundamental theorem for fMPS with Wall invariant (+))
Let $\{A^i\}_i$ and $\{\tilde{A}^i\}_i$ be injective fMPSs with the Wall invariant (+) in the canonical form (111). They give the same physical state in APBC, in other words, $\{A^i\}_i \sim \{\tilde{A}^i\}_i$ holds if and only if there exist a unitary matrix $V \in \mathrm{U}(2n)$ and a U(1) phase $e^{i\beta} \in \mathrm{U}(1)$ obeying that

$$\tilde{A}^i = e^{i\beta} V^\dagger A^i V. \tag{112}$$

The unitary matrix V is unique up to U(1) phase, and $e^{i\beta}$ is unique.

変換関数がZ/2-gradingを保つunitary変換のみであることを証明した.

不変量の具体的な計算法(**解析的**な方法)：

①ゲージ変換で$\{A^i(\theta), u(\theta)\}$を周期的にとる：$\{\tilde{A}^i(0), \tilde{u}(0)\} = \{\tilde{A}^i(2\pi), \tilde{u}(2\pi)\}$,

② $\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)$ は周期的なので**巻きつき数は量子化**： $n_{\mathrm{top.}} = \int \mathrm{dlog}(\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)) \in \mathbb{Z}$

③ $\tilde{u}(\theta)$ は周期的な位相の付け替えで $n_{\mathrm{top.}}$は**偶数だけシフト**：

例） $\tilde{u}(\theta) \to e^{i\theta}\tilde{u}(\theta)$ に対して $n_{\mathrm{top.}} \mapsto n_{\mathrm{top.}} + 2$.

Pump不変量：$n_{\mathrm{top.}} = \int \mathrm{dlog}(\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

不変量の具体的な計算法(**代数的**な方法)：

① Xの**開被覆** $\{U_\alpha\}$を取り，各 U_α 上のfMPS表示 $\{A^i_\alpha, u_\alpha\}$ を取る.

② $u_\alpha(\theta)$の**位相を取り替えて**，$u_\alpha(\theta)^2 = 1$ を満たすようにとる.

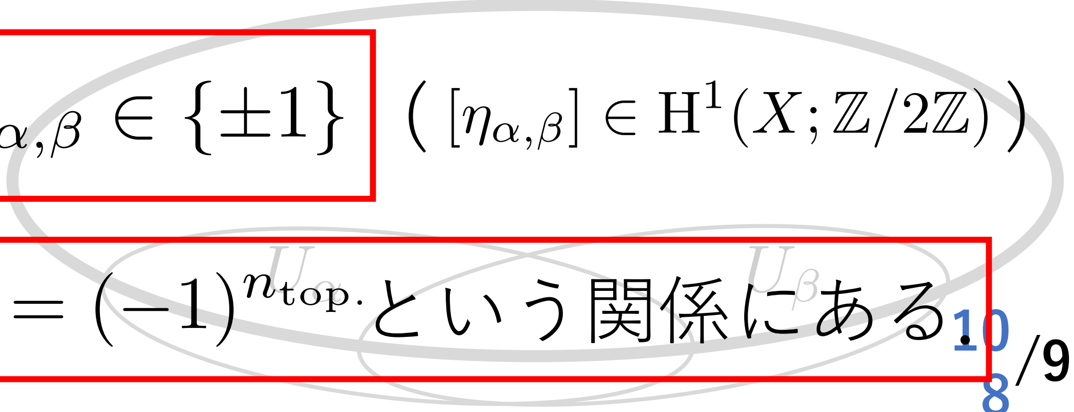
③ U_α と U_β の共通部分において**fundamental theorem**を用いる：

$$A^i_\alpha(\theta) = e^{i\phi_{\alpha,\beta}} V_{\alpha,\beta}(\theta) A^i_\beta(\theta) V_{\alpha,\beta}(\theta)^\dagger$$

④ $u_\alpha(\theta)^2 = u_\beta(\theta)^2 = 1$ を満たすように取った時, $V_{\alpha,\beta}(\theta)$ は**以下を満たす：**

$$u_\alpha(\theta) V_{\alpha,\beta}(\theta) = \eta_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}(\theta) u_\beta(\theta) \qquad (\ \eta_{\alpha,\beta} = \pm 1\ )$$

$$\boxed{\textbf{Pump不変量}：\eta_{\text{top.}} = \prod \eta_{\alpha,\beta} \in \{\pm 1\}} \quad (\ [\eta_{\alpha,\beta}] \in \mathrm{H}^1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ )$$



特に二つの不変量は等価で，一般に $\eta_{\text{top.}} = (-1)^{n_{\text{top.}}}$ という関係にある.

fundamental thm. for Z/2-gr. CS MPS

不変量の具体的な計算法(**代数的**な方法)：

① Xの**開被覆** $\{U_\alpha\}$ を取り，各 U_α 上のfMPS表示 $\{A^i_\alpha, u_\alpha\}$ を取る．

② $u_\alpha(\theta)$ の**位相を取り替えて**，$u_\alpha(\theta)^2 = 1$ を満たすようにとる．

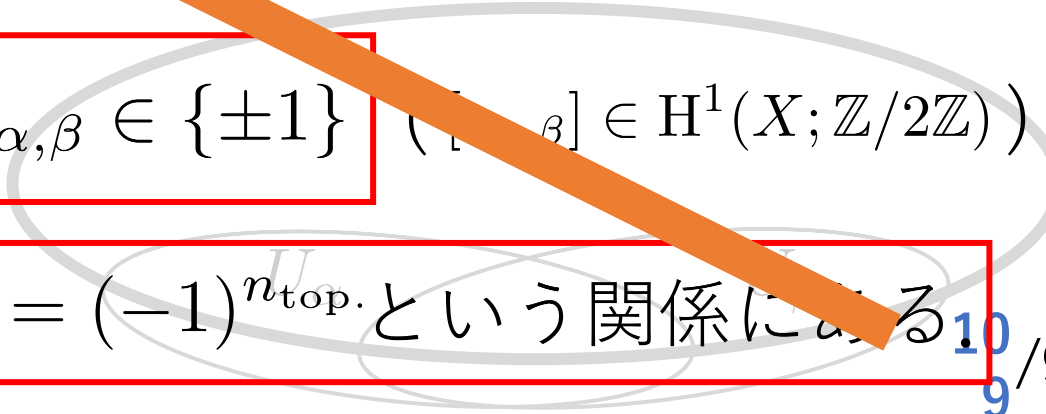
③ U_α と U_β の共通部分において**fundamental theorem**を用いる：

$$A^i_\alpha(\theta) = e^{i\phi_{\alpha,\beta}(\theta)} V_{\alpha,\beta}(\theta) A^i_\beta(\theta) V_{\alpha,\beta}(\theta)^\dagger$$

④ $u_\alpha(\theta)^2 = u_\beta(\theta)^2 = 1$ を満たすようにとった時，$V_{\alpha,\beta}(\theta)$ は**以下を満たす：**

$$u_\alpha(\theta) V_{\alpha,\beta}(\theta) = \eta_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}(\theta) u_\beta(\theta) \qquad (\ \eta_{\alpha,\beta} = \pm 1\ )$$

$$\boxed{\textbf{Pump不変量}：\eta_{\mathrm{top.}} = \prod \eta_{\alpha,\beta} \in \{\pm 1\}} \quad \left([\eta_{\alpha,\beta}] \in \mathrm{H}^1(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \right)$$



特に二つの不変量は等価で，一般に $\eta_{\mathrm{top.}} = (-1)^{n_{\mathrm{top.}}}$ という関係にある．

割愛

目次

- **研究の背景**

  SRE状態とGTPについて

- **研究の目的と方法**

  MPSを用いたinteracting fermionic systemにおけるGTPの検証

- **結果１：Pump不変量の定義**

  fundamental theorem for fMPS

  Pump不変量の定義

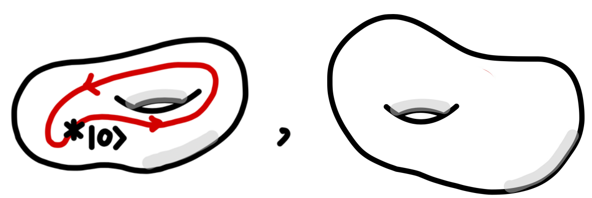
- **結果２：Pump不変量の計算**

  non-trivial phaseにおけるpump

  trivial phaseにおけるpump

- **まとめ**

Pump不変量の計算例①

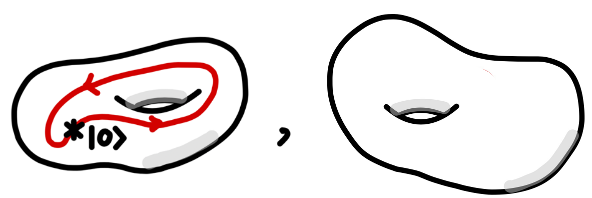


例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a^\dagger_{j+1} + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1 - 2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

ただし $\tau_j^{z,\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}\tau_j^z e^{-i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}$. このとき $H(0) = H(\pi)$.

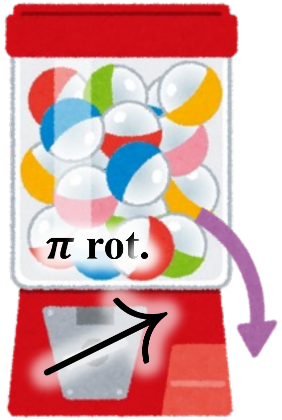
Pump不変量の計算例①



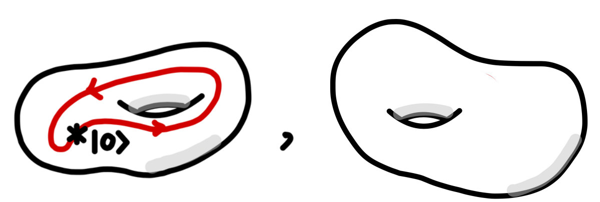
例) ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1-2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

ただし $\tau_j^{z,\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}\tau_j^z e^{-i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}$. このとき $H(0)=H(\pi)$.



Pump不変量の計算例①



例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1 - 2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

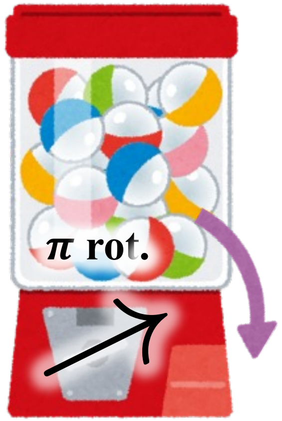
ただし $\tau_j^{z,\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}\tau_j^z e^{-i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}$. このとき $H(0) = H(\pi)$.

この模型は自明相に属することが確認できる.

対応する周期的なfMPSは

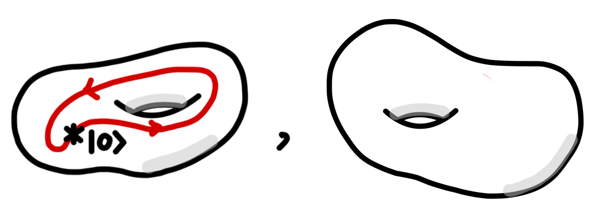
$$C^{\uparrow,\circ}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \\ & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, C^{\downarrow,\circ}(\theta) = \begin{pmatrix} i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \\ & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad u(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{\uparrow,\bullet}(\theta) = \begin{pmatrix} & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \end{pmatrix}, C^{\downarrow,\bullet}(\theta) = \begin{pmatrix} & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \end{pmatrix}.$$



を用いて $\tilde{C}^{i,j}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x} C^{i,j}(\theta) e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x}, \tilde{u}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x} u(\theta) e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x}$ で与えられる.

Pump不変量の計算例①



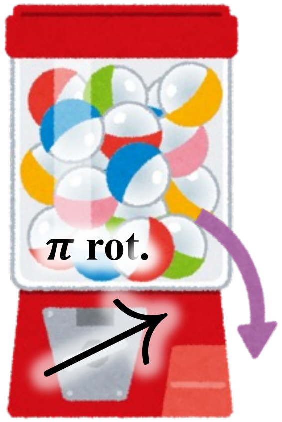
例）ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1-2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

ただし $\tau^{z,\theta}_j = e^{i\frac{\theta}{2}\tau^x_j}\tau^z_j e^{-i\frac{\theta}{2}\tau^x_j}$． このとき $H(0)=H(\pi)$．

この模型は自明相に属することが確認できる．

対応する周期的なfMPSは



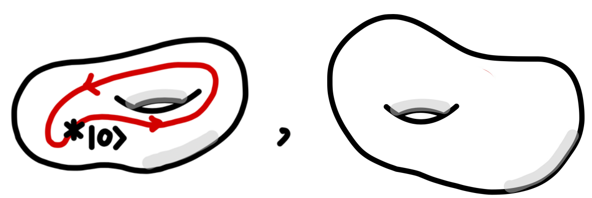
$$C^{\uparrow,\circ}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \\ & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}, C^{\downarrow,\circ}(\theta) = \begin{pmatrix} i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \\ & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}, \quad u(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1\end{pmatrix}$$

$$C^{\uparrow,\bullet}(\theta) = \begin{pmatrix} & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \end{pmatrix}, C^{\downarrow,\bullet}(\theta) = \begin{pmatrix} & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \end{pmatrix}.$$

を用いて $\tilde{C}^{i,j}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x}C^{i,j}(\theta)e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x}, \tilde{u}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x}u(\theta)e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x}$ で与えられる．

$\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2) = -2e^{i\theta}$ なので，$n_{\mathrm{top.}} = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より**pump不変量は非自明**．

Pump不変量の計算例①



例) ガチャガチャ模型

$$H(\theta) = -\sum_j (a_j^\dagger - a_j)\tau^x_{j+\frac{1}{2}}(a_{j+1}^\dagger + a_{j+1}) - \sum_j \tau^{z,\theta}_{j-\frac{1}{2}}(1-2a_j^\dagger a_j)\tau^{z,\theta}_{j+\frac{1}{2}}$$

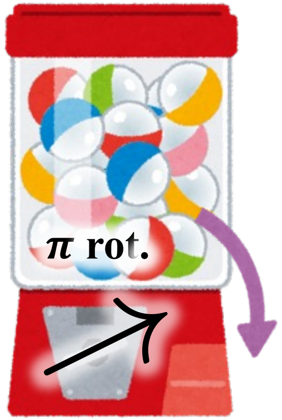
ただし $\tau_j^{z,\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}\tau_j^z e^{-i\frac{\theta}{2}\tau_j^x}$． このとき $H(0) = H(\pi)$．

この模型は自明相に属することが確認できる.

対応する周期的なfMPSは

$$C^{\uparrow,\circ}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \\ & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}, C^{\downarrow,\circ}(\theta) = \begin{pmatrix} i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \\ & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}, \quad u(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1\end{pmatrix}$$

$$C^{\uparrow,\bullet}(\theta) = \begin{pmatrix} & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \end{pmatrix}, C^{\downarrow,\bullet}(\theta) = \begin{pmatrix} & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \end{pmatrix}.$$

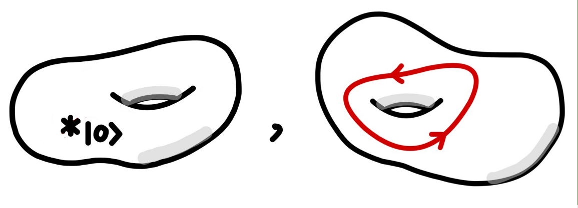


を用いて $\tilde{C}^{i,j}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x}C^{i,j}(\theta)e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x}, \tilde{u}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x}u(\theta)e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x}$ で与えられる.

$\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2) = -2e^{i\theta}$ なので, $n_{\mathrm{top.}} = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より**pump不変量は非自明**.

interacting fermionic SPTの**自明相におけるpump**を確認した.

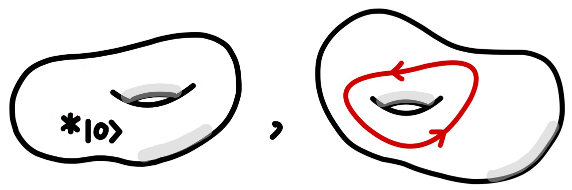
Pump不変量の計算例②



例)非自明相のKitaev chain with parameter θ

$$H(\theta)=\sum_j -a_{j+1}^\dagger a_{j+1}-a_{j+1}^\dagger a_j+e^{i\theta}a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger+e^{-i\theta}a_{j+1}a_j$$

Pump不変量の計算例②



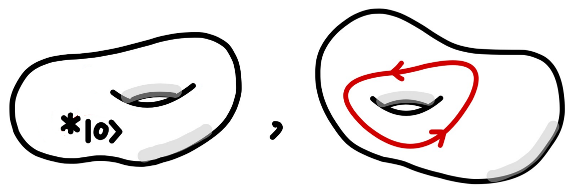
例)非自明相のKitaev chain with parameter θ

$$H(\theta)=\sum_j -a_{j+1}^\dagger a_{j+1}-a_{j+1}^\dagger a_j+e^{i\theta}a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger+e^{-i\theta}a_{j+1}a_j$$

$$\rightarrow\ A^0(\theta)=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix},\quad A^1(\theta)=e^{i\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix},\quad u(\theta)=e^{i\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\ \tilde{A}^0(\theta)=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix},\quad \tilde{A}^1(\theta)=\begin{pmatrix} & -1\\ e^{i\theta} & \end{pmatrix},\quad \tilde{u}(\theta)=\begin{pmatrix} & -1\\ e^{i\theta} & \end{pmatrix}$$

Pump不変量の計算例②



例)非自明相のKitaev chain with parameter θ

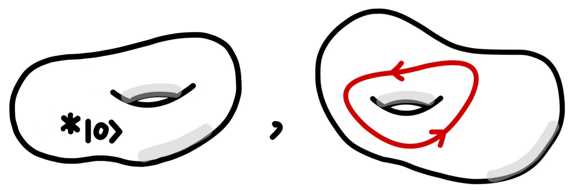
$$H(\theta)=\sum_j -a_{j+1}^\dagger a_{j+1}-a_{j+1}^\dagger a_j+e^{i\theta}a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger+e^{-i\theta}a_{j+1}a_j$$

$$\to\quad A^0(\theta)=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix},\quad A^1(\theta)=e^{i\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix},\quad u(\theta)=e^{i\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\to\quad \tilde{A}^0(\theta)=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix},\quad \tilde{A}^1(\theta)=\begin{pmatrix} & -1\\ e^{i\theta} & \end{pmatrix},\quad \tilde{u}(\theta)=\begin{pmatrix} & -1\\ e^{i\theta} & \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)=-2e^{i\theta}$ なので, $n_{\mathrm{top.}}=1\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より**pump不変量は非自明**.

Pump不変量の計算例②



例)非自明相のKitaev chain with parameter θ

$$H(\theta)=\sum_j -a_{j+1}^\dagger a_{j+1}-a_{j+1}^\dagger a_j+e^{i\theta}a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger+e^{-i\theta}a_{j+1}a_j$$

$$\to\quad A^0(\theta)=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix},\quad A^1(\theta)=e^{i\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix},\quad u(\theta)=e^{i\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}$$

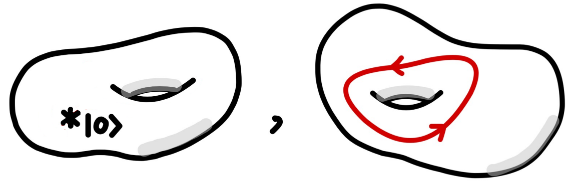
$$\to\quad \tilde{A}^0(\theta)=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix},\quad \tilde{A}^1(\theta)=\begin{pmatrix}&-1\\e^{i\theta}&\end{pmatrix},\quad \tilde{u}(\theta)=\begin{pmatrix}&-1\\e^{i\theta}&\end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)=-2e^{i\theta}$ なので, $n_{\mathrm{top.}}=1\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より**pump不変量は非自明**.

Kitaev chainのgap関数の位相を回すことでf.p.がpumpされることは,

free fermionの範囲で知られている. [Kitaev,Teo-Kane]

Pump不変量の計算例②



例)非自明相のKitaev chain with parameter θ

$$H(\theta)=\sum_j -a_{j+1}^\dagger a_{j+1}-a_{j+1}^\dagger a_j+e^{i\theta}a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger+e^{-i\theta}a_{j+1}a_j$$

$$\to\ A^0(\theta)=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix},\quad A^1(\theta)=e^{i\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix},\quad u(\theta)=e^{i\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\to\ \tilde{A}^0(\theta)=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix},\quad \tilde{A}^1(\theta)=\begin{pmatrix} & -1\\ e^{i\theta} & \end{pmatrix},\quad \tilde{u}(\theta)=\begin{pmatrix} & -1\\ e^{i\theta} & \end{pmatrix}$$

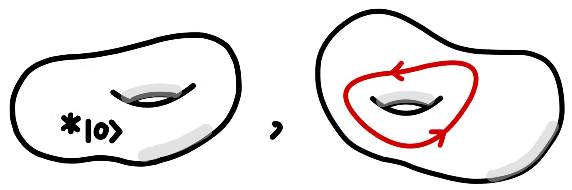
$\mathrm{tr}(\tilde{u}(\theta)^2)=-2e^{i\theta}$ なので, $n_{\mathrm{top.}}=1\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より**pump不変量は非自明.**

Kitaev chainのgap関数の位相を回すことでf.p.がpumpされることは,
free fermionの範囲で知られている. [Kitaev,Teo-Kane]

我々の結果はこのpumpが**相互作用に対して安定**であることを意味している.

[H.Katsura,et.al., ” Exact ground states and topological order in interacting Kitaev/Majorana chains”]

Pump不変量の計算例③

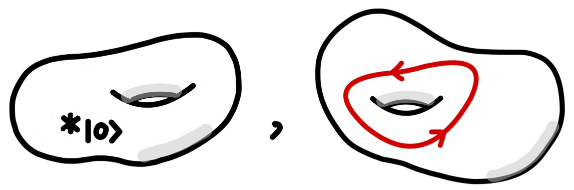


例)非自明相のinteracting Kitaev chain with parameter θ [Katsura et.al.]

$$H(\theta)=\sum_j -ta_j^\dagger a_j - ta_{j+1}a_j^\dagger + |\Delta|\, e^{i\theta} a_j a_{j+1} + |\Delta|\, e^{-i\theta} a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger$$
$$-\frac{\mu}{2}(2a_j^\dagger a_j - 1) + U(2a_j^\dagger a_j - 1)(2a_{j+1}^\dagger a_{j+1} - 1)$$

[H.Katsura,et.al., ” Exact ground states and topological order in interacting Kitaev/Majorana chains”]

Pump不変量の計算例③

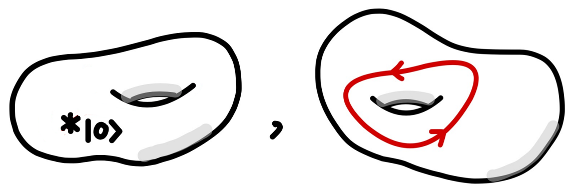


例)非自明相のinteracting Kitaev chain with parameter θ [Katsura et.al.]

$$H(\theta) = \sum_j -ta_j^\dagger a_j - ta_{j+1}a_j^\dagger + |\Delta|\, e^{i\theta} a_j a_{j+1} + |\Delta|\, e^{-i\theta} a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger$$
$$-\frac{\mu}{2}(2a_j^\dagger a_j - 1) + U(2a_j^\dagger a_j - 1)(2a_{j+1}^\dagger a_{j+1} - 1)$$

特に $\mu = 4\sqrt{U^2 + tU + \frac{t^2 - |\Delta|}{4}}$ のところではG.S.が求まる.

Pump不変量の計算例③



例)非自明相のinteracting Kitaev chain with parameter θ [Katsura et.al.]

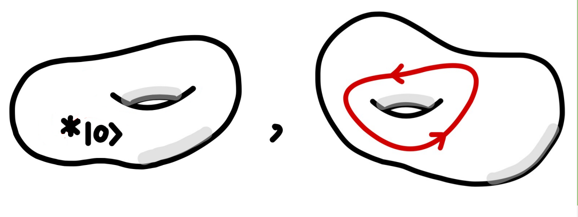
$$H(\theta)=\sum_j -ta_j^\dagger a_j - ta_{j+1}a_j^\dagger + |\Delta|\, e^{i\theta} a_j a_{j+1} + |\Delta|\, e^{-i\theta} a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger$$
$$-\frac{\mu}{2}(2a_j^\dagger a_j - 1) + U(2a_j^\dagger a_j - 1)(2a_{j+1}^\dagger a_{j+1} - 1)$$

特に $\mu = 4\sqrt{U^2 + tU + \frac{t^2 - |\Delta|}{4}}$ のところではG.S.が求まる.

このとき周期的なfMPSは以下で与えられる：

$$\tilde{A}^0(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}^1(\theta) = \lambda(|\Delta|, \mu)\begin{pmatrix} & -1 \\ e^{i\theta} & \end{pmatrix},\ \tilde{u}(\theta) = \begin{pmatrix} & -1 \\ e^{i\theta} & \end{pmatrix}$$

Pump不変量の計算例③



例)非自明相のinteracting Kitaev chain with parameter θ [Katsura et.al.]

$$H(\theta)=\sum_j -ta_j^\dagger a_j - ta_{j+1}a_j^\dagger + |\Delta|\, e^{i\theta} a_j a_{j+1} + |\Delta|\, e^{-i\theta} a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger$$
$$-\frac{\mu}{2}(2a_j^\dagger a_j - 1) + U(2a_j^\dagger a_j - 1)(2a_{j+1}^\dagger a_{j+1} - 1)$$

特に $\mu = 4\sqrt{U^2 + tU + \frac{t^2-|\Delta|}{4}}$ のところではG.S.が求まる.

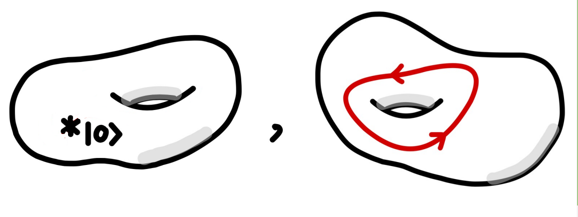
このとき周期的なfMPSは以下で与えられる：

$$\tilde{A}^0(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}^1(\theta) = \lambda(|\Delta|,\mu)\begin{pmatrix} & -1 \\ e^{i\theta} & \end{pmatrix},\ \tilde{u}(\theta) = \begin{pmatrix} & -1 \\ e^{i\theta} & \end{pmatrix}$$

従ってfreeの場合と同様に, $n_{\text{top.}} = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$より**pump不変量は非自明**.

[H.Katsura,et.al., ” Exact ground states and topological order in interacting Kitaev/Majorana chains”]

Pump不変量の計算例③



例)非自明相のinteracting Kitaev chain with parameter θ [Katsura et.al.]

$$H(\theta)=\sum_j -ta_j^\dagger a_j - ta_{j+1}a_j^\dagger + |\Delta|\, e^{i\theta} a_j a_{j+1} + |\Delta|\, e^{-i\theta} a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger$$
$$-\frac{\mu}{2}(2a_j^\dagger a_j - 1) + U(2a_j^\dagger a_j - 1)(2a_{j+1}^\dagger a_{j+1} - 1)$$

特に $\mu = 4\sqrt{U^2 + tU + \frac{t^2 - |\Delta|}{4}}$ のところではG.S.が求まる.

このとき周期的なfMPSは以下で与えられる：

$$\tilde{A}^0(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}^1(\theta) = \lambda(|\Delta|, \mu)\begin{pmatrix} & -1 \\ e^{i\theta} & \end{pmatrix},\ \tilde{u}(\theta) = \begin{pmatrix} & -1 \\ e^{i\theta} & \end{pmatrix}$$

従ってfreeの場合と同様に, $n_{\mathrm{top.}} = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$より**pump不変量は非自明**.

interacting fermionic SPTの**非自明相におけるpump**を確認した.

Appendix

1-parameter familyとpump

[A.Kitaev, ”Unpaired Majorana fermions in quantum wires” Phys.-Usp. 44 131 (2000).]

periodic Kitaev chain

●periodic Kitaev chain(時空1+1次元の超伝導の模型)

$$H=\sum_j -a^\dagger_{j+1}a_{j+1}-a^\dagger_{j+1}a_j+a^\dagger_j a^\dagger_{j+1}+a_{j+1}a_j \quad (a_j\text{ : complex fermion})$$

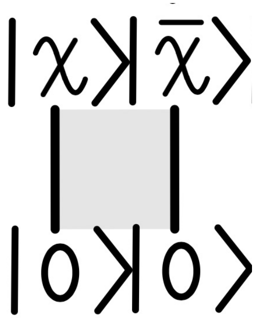
hopping **gap 関数**

H は**gapped**かつ**unique**な基底状態を持つ.

●任意の**d次元の閉多様体**の上で**gapped**かつ**unique**な基底状態として得られる状態を時空d+1次元**Short-Range Entangled**(**SRE**)状態と呼ぶ.

SRE状態はtensor積に対する逆元が存在する：

$$|\chi\rangle\otimes|\bar{\chi}\rangle\sim|0\rangle\otimes|0\rangle$$



ここで“～”はgapを保った連続変形.

[A. Kitaev, ”On the classification of short-range entangled states. ”Talk at Simons Center (2013).]

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

[A. Kitaev, ”On the classification of short-range entangled states. ”Talk at Simons Center (2013).]

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

d次元自明状態

$|0\rangle_d$

[A. Kitaev, ”On the classification of short-range entangled states. ”Talk at Simons Center (2013).]

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

$$|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d\cdots|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d = |0\rangle_{d+1}$$

$$\xrightarrow{\hspace{12em}}$$

d+1次元目方向

[A. Kitaev, "On the classification of short-range entangled states. "Talk at Simons Center (2013).]

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

自明相 $\mathcal{M}^{d+1}$

$$|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d\cdots|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d=|0\rangle_{d+1}$$

$\xrightarrow{\hspace{6cm}}$

d+1次元目方向

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

d次元SRE状態

$|\chi\rangle_d$

自明相 $\mathcal{M}^{d+1}$

$$|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d\cdots|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d|0\rangle_d=|0\rangle_{d+1}$$

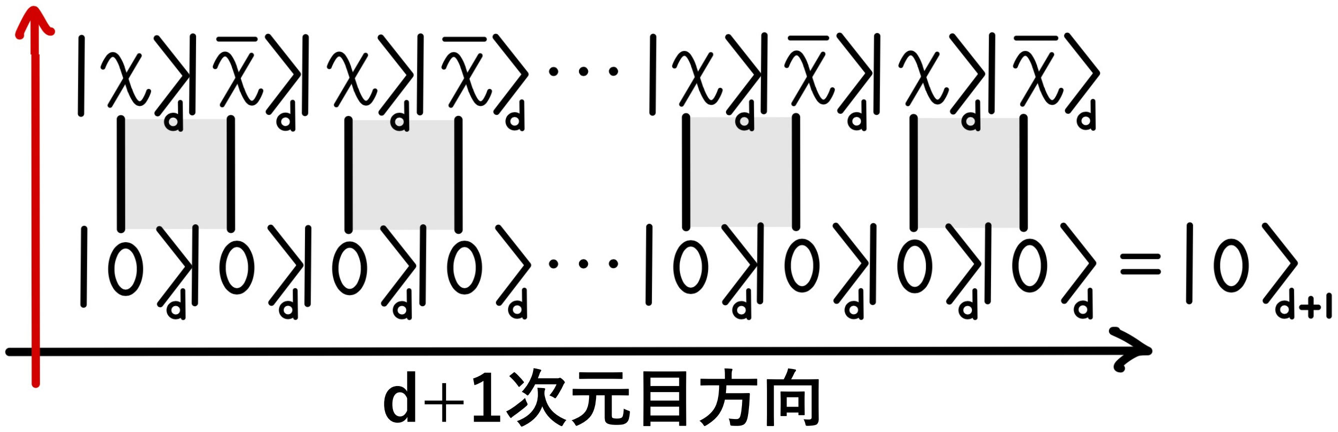
d+1次元目方向

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

d次元SRE状態

$$|\chi\rangle_d$$



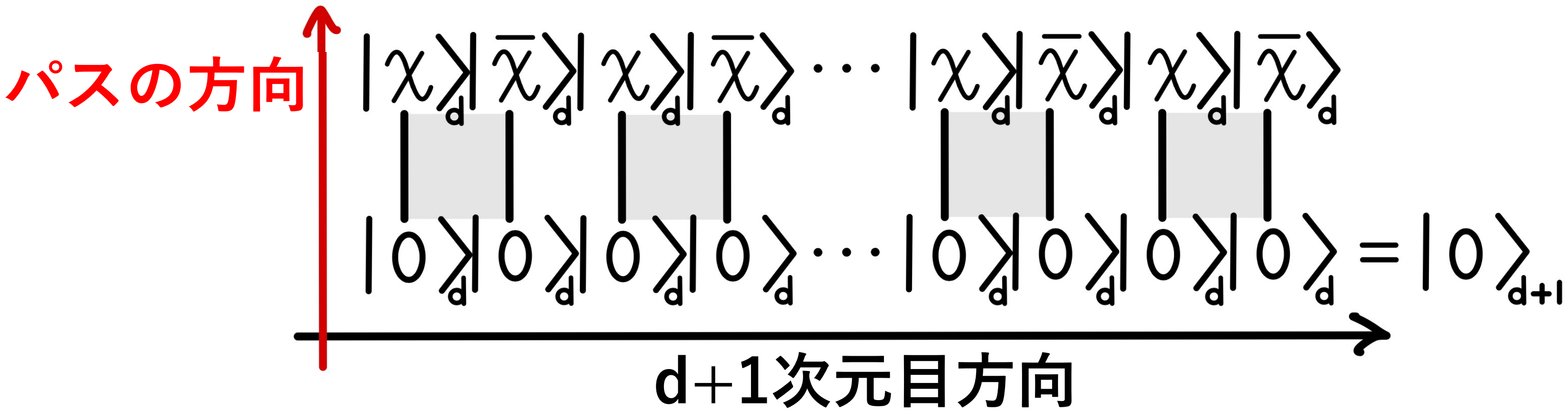
[A. Kitaev, "On the classification of short-range entangled states. "Talk at Simons Center (2013).]

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

d次元SRE状態

$|\chi\rangle_d$



[A. Kitaev, ”On the classification of short-range entangled states. ”Talk at Simons Center (2013).]

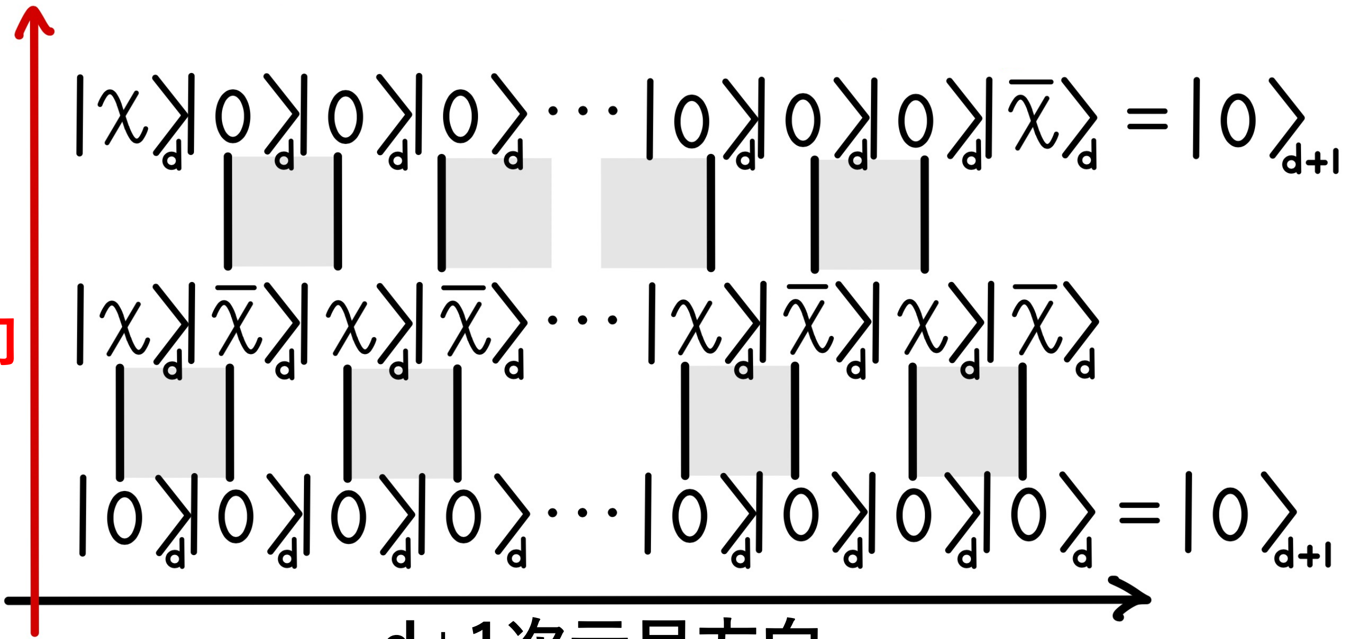
自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

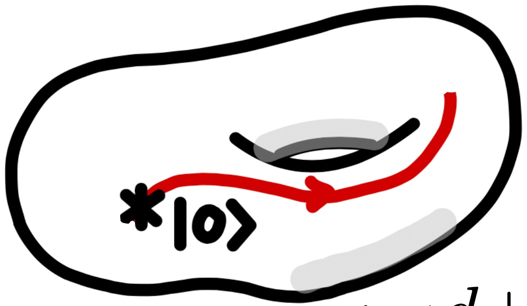
d次元SRE状態

$|\chi\rangle_d$

パスの方向



d+1次元目方向



自明相 $\mathcal{M}^{d+1}$

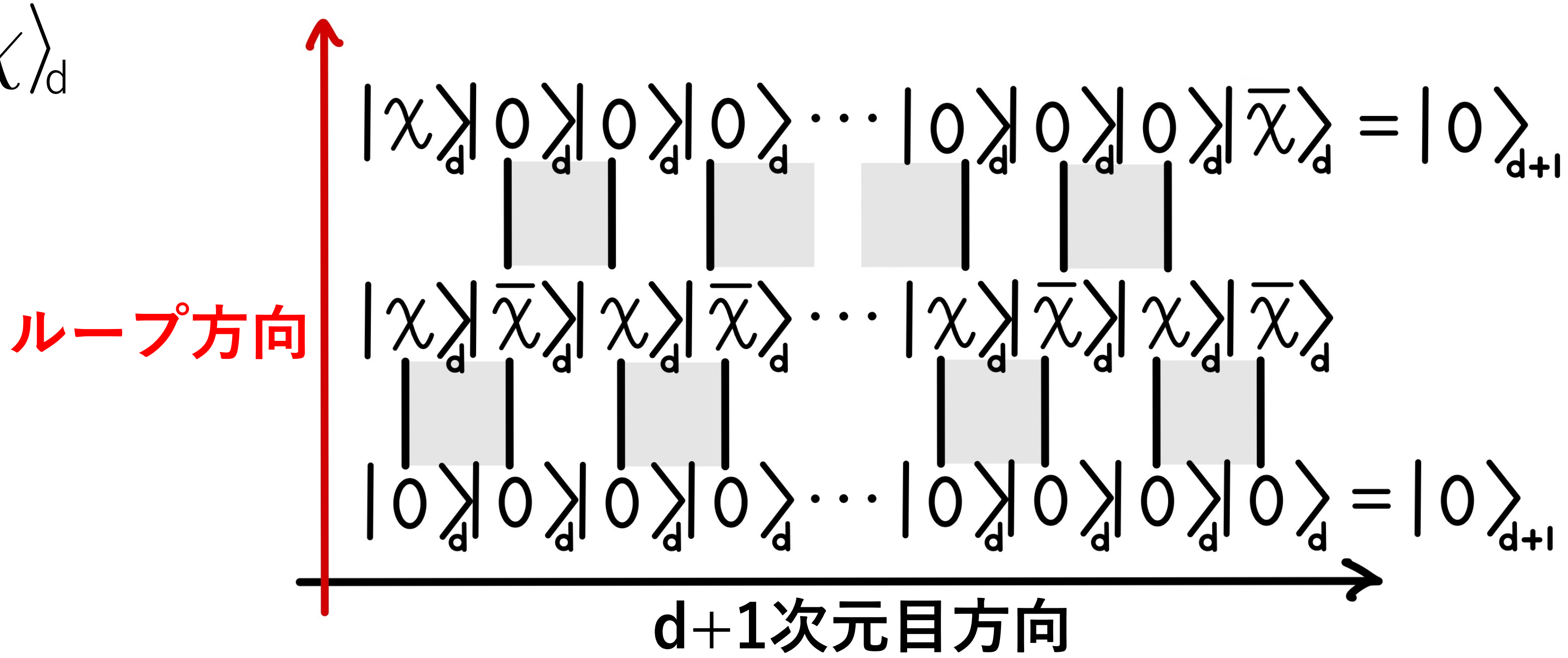
[A. Kitaev, ”On the classification of short-range entangled states. ”Talk at Simons Center (2013).]

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

d次元SRE状態

$$|\chi\rangle_d$$



[A. Kitaev, ”On the classification of short-range entangled states. ”Talk at Simons Center (2013).]

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

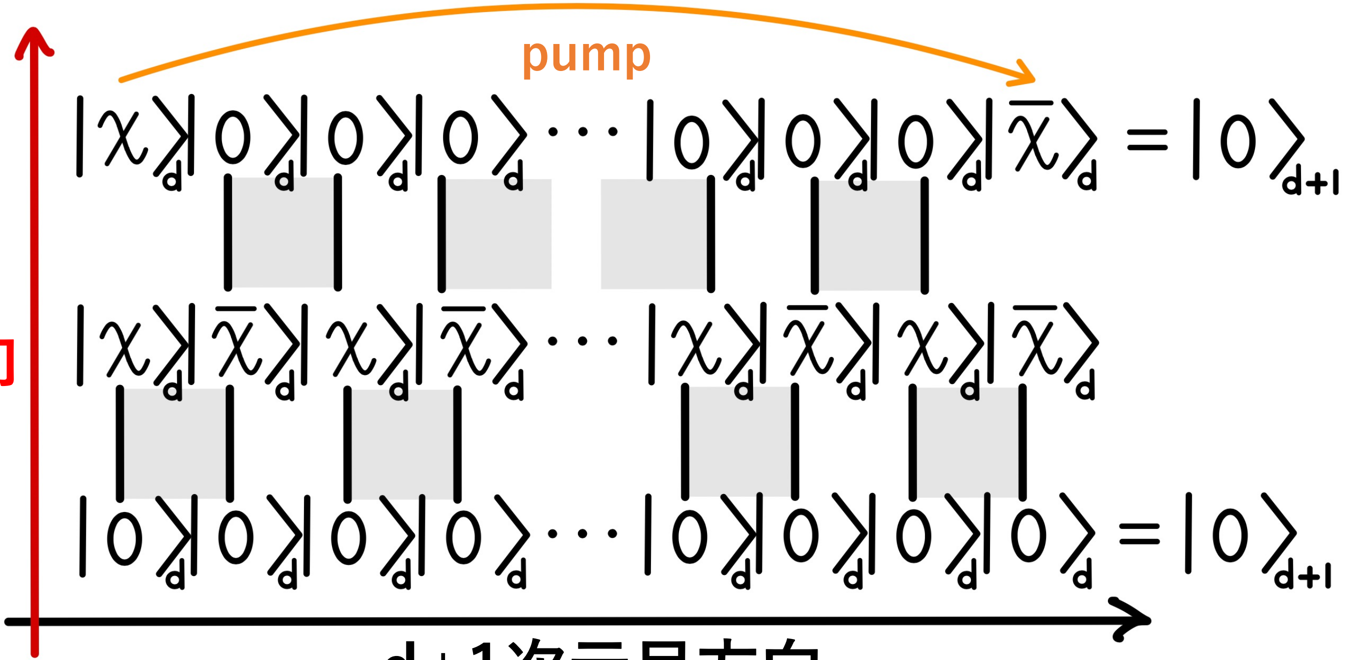
d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

d次元SRE状態

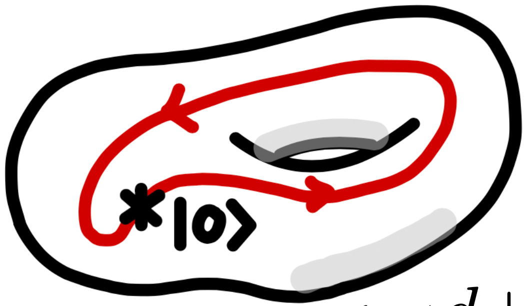
$|\chi\rangle_d$

d+1次元GTP

ループ方向



d+1次元目方向



自明相 $\mathcal{M}^{d+1}$

[A. Kitaev, ”On the classification of short-range entangled states. ”Talk at Simons Center (2013).]

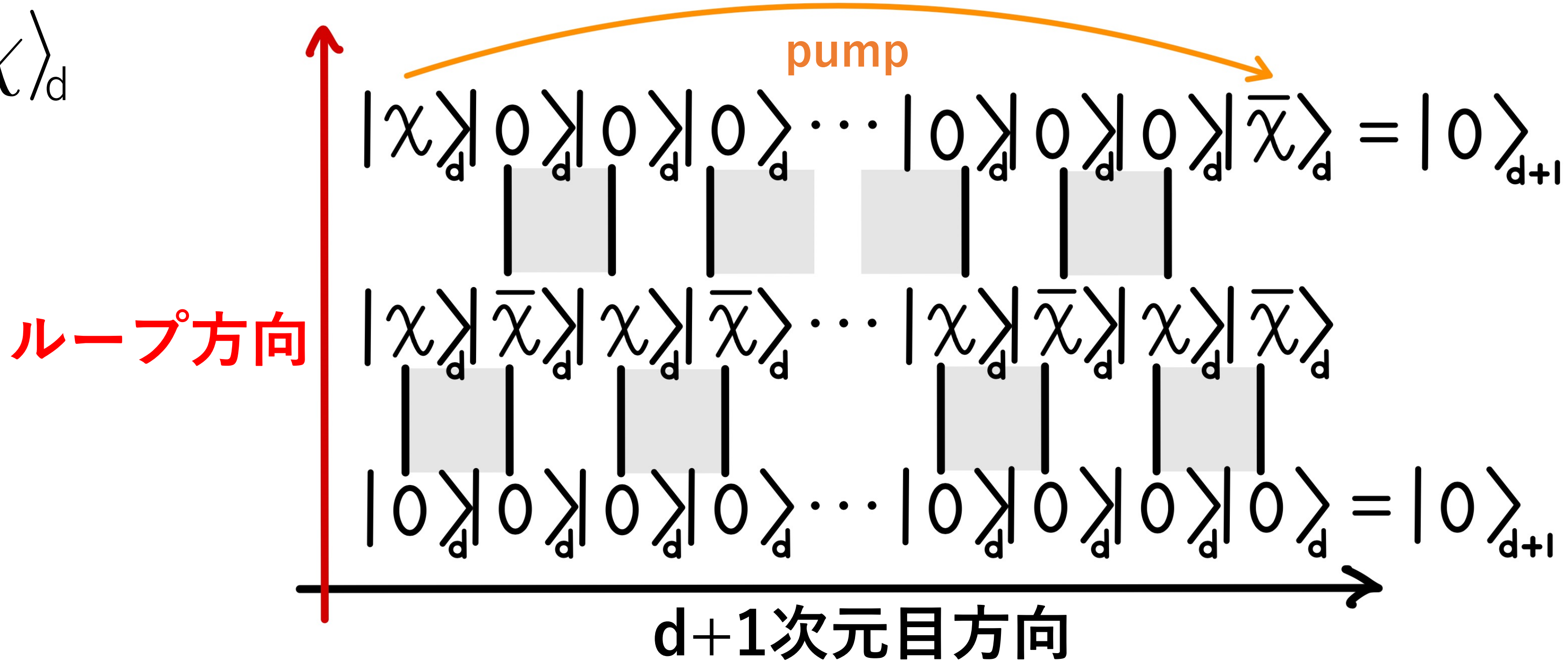
自明相におけるGTP：Kitaevの予想

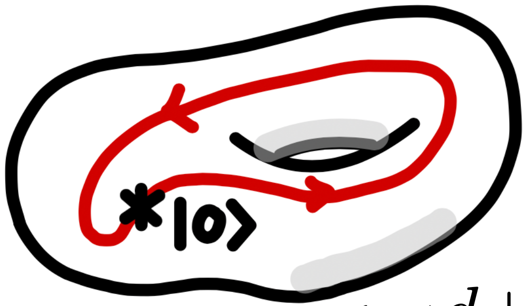
d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

d次元SRE状態

$|\chi\rangle_d$

d+1次元GTP





自明相 $\mathcal{M}^{d+1}$

要点① $\mathcal{M}^{d+1}$ のループは**d+1次元のGTP**を与える.

[A. Kitaev, "On the classification of short-range entangled states. "Talk at Simons Center (2013).]

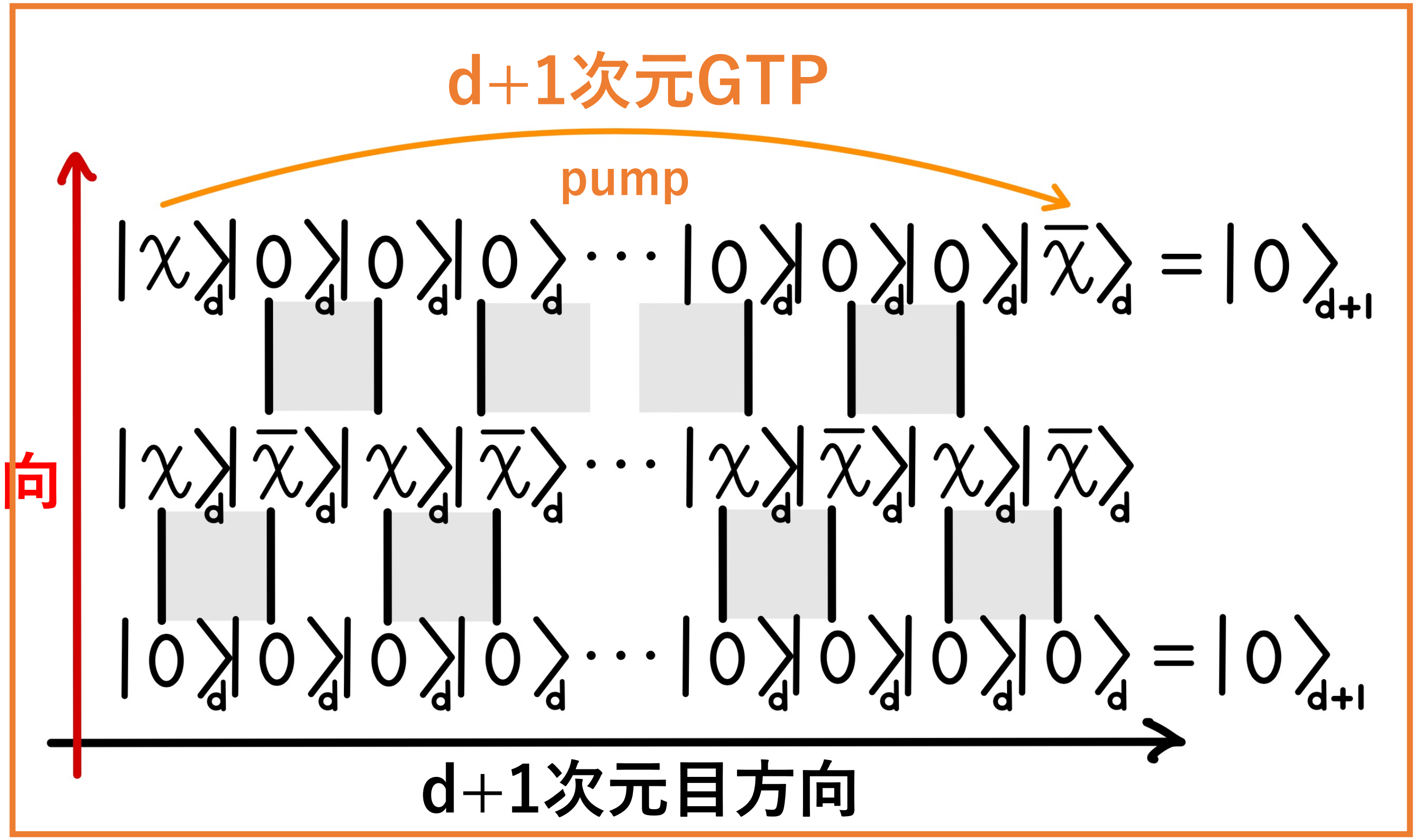
自明相におけるGTP：Kitaevの予想

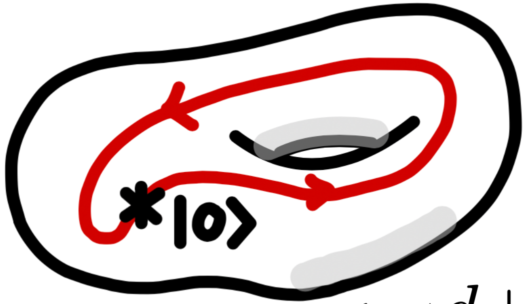
d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

d次元SRE状態

$\boxed{|\chi\rangle_d} \mapsto$

ループ方向





自明相 $\mathcal{M}^{d+1}$

要点① $\mathcal{M}^{d+1}$ のループは**d+1次元のGTP**を与える.

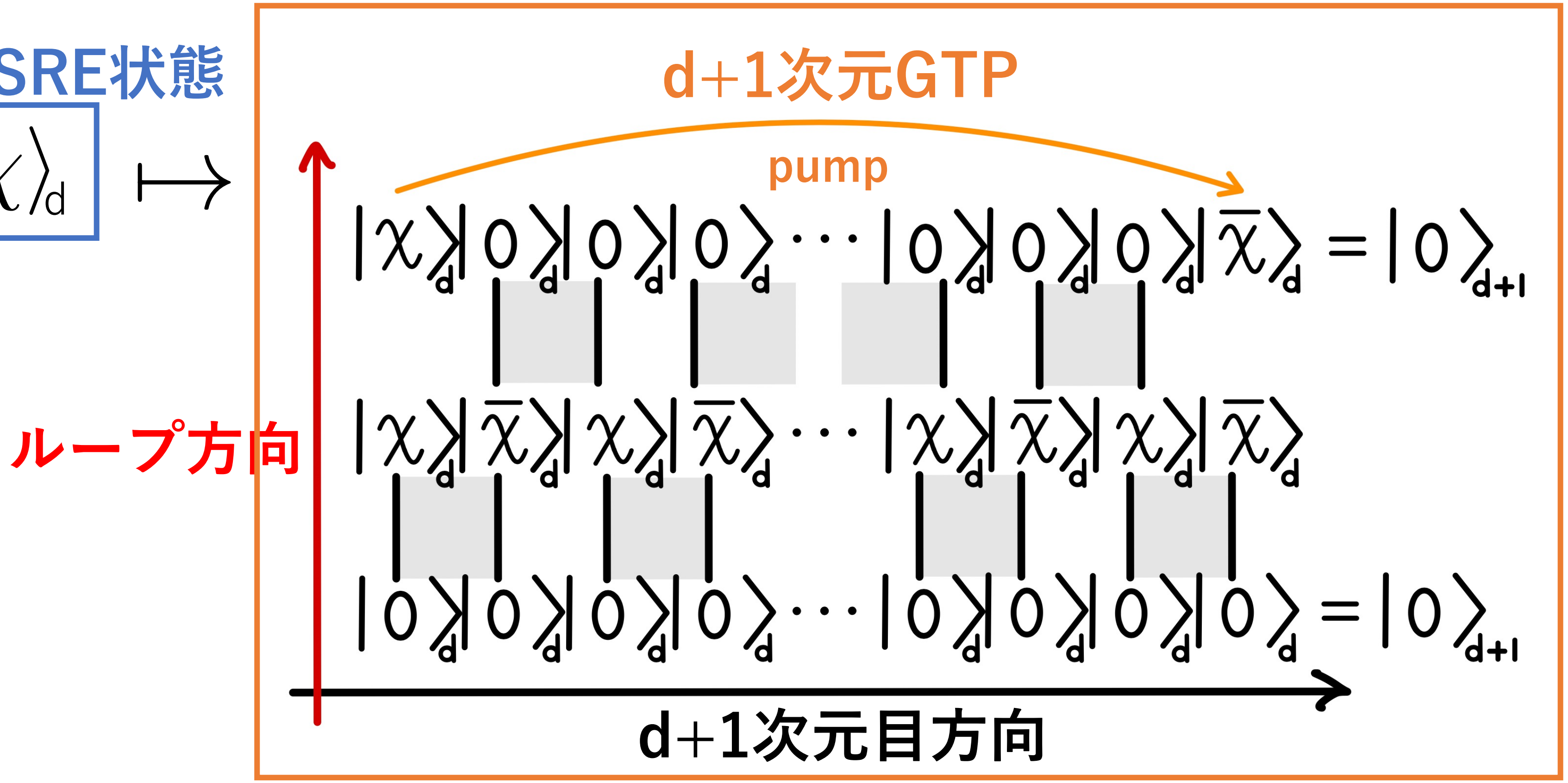
[A. Kitaev, ”On the classification of short-range entangled states. ”Talk at Simons Center (2013).]

自明相におけるGTP：Kitaevの予想

d+1次元の自明相におけるGTPを構成する:

d次元SRE状態

$\boxed{|\chi\rangle_d} \mapsto$



要点① $\mathcal{M}^{d+1}$ のループは**d+1次元のGTP**を与える.
要点②**d+1次元のGTP**は**d次元のSRE状態**で分類される.(**Kitaevの予想**)

bosonic MPS with sym. G

bosonic SRE with symmetry G

$\mathcal{H}$ に対するGの表現を固定する：

$\hat{U} \curvearrowright \mathcal{H}$ ：unitaryかつlinear s.t. $\hat{U}(g) = \bigotimes_j \hat{u}(g)$

injective MPSに対するGの作用は以下の通り：

$$\hat{U}(g) \left|\{A^i\}\right\rangle = \sum \mathrm{tr}(A^{i_1} \cdots A^{i_L}) \left|i_1^g, ..., i_L^g\right\rangle \qquad \left|i^g\right\rangle := \hat{u}(g) \left|i\right\rangle$$

$$\hat{u}(g) \left|i\right\rangle = \sum_j \left|j\right\rangle [u(g)]_{j,i} \quad (g \cdot A)^j = \sum_j [u(g)]_{j,i} A^i$$

$$= \sum \mathrm{tr}((g \cdot A)^{i_1} \cdots (g \cdot A)^{i_L}) \left|i_1, ..., i_L\right\rangle = \left|\{(g \cdot A)^i\}\right\rangle$$

従ってG対称性を持つinjective MPSは以下の条件を満たす：

$\left|\{A^i\}\right\rangle \propto \left|\{(g \cdot A)^i\}\right\rangle \Leftrightarrow e^{i\phi(g)} \in \mathrm{U}(1), U(g) \in \mathrm{U}(n)$ s.t. $(g \cdot A)^i = e^{i\phi(g)} U(g) A^i U(g)^\dagger$.

$e^{i\phi(g)}$ は一意，$U(g)$ はup to $\mathrm{U}(1)$ phaseで一意で，$U(g)$ はGの射影表現.

$\{(\{A^i\}, e^{i\phi(\bullet)}, U(\bullet)) \mid \text{s.t. 上の条件を満たす}\}$ をG-sym. inj. matricesと呼ぶ

不変量の構成のアイデア

$\{A^i(\theta), u(\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ に対して不変量を構成したい.

<u>0+1次元系におけるBerry位相：</u>

ファイバー $\mathbb{C}$ ：状態の位相

$\downarrow$

全空間 $\mathcal{L}$

$\downarrow$

低空間 X ：parameter空間

Berry接続/曲率 $=\mathcal{L}$ のtopology

<u>1+1次元系におけるPump不変量：</u>

ファイバー A ：~~Z/2-gr. CSA~~ **G-sym. CSA**

$\downarrow$

全空間 $\mathcal{A}$

$\downarrow$

低空間 X ：parameter空間

Pump不変量 $=\mathcal{A}$ のtopology

$\mathcal{A}$ の変換関数は何か？⇔ $\cancel{|\{A^i, u\}\rangle \propto |\{A'^i, u'\}\rangle}$ の時 $\{A^i\}$ と $\{A'^i\}$ の関係は？

$|(\{A^i\}, e^{i\phi(\bullet)}, U(\bullet))\rangle \propto |(\{A'^i\}, e^{i\phi'(\bullet)}, U'(\bullet))\rangle$

G-sym. inj. MPS の変換関数

$$|\{A^i\}, e^{i\varphi(\cdot)}, [U(\cdot)]\rangle \propto |\{A^i\}, e^{i\varphi'(\cdot)}, U'(\cdot)\rangle$$

$\Leftrightarrow$ $\exists!\, e^{i\beta} \in U(1)$, $\exists V \in U(n)$: unique up to $U(1)$ phase

s.t. $A^i = e^{i\beta} V A^i V^\dagger$. $\cdots$ ☆

☆ に g をあてると $e^{i\varphi(g)} U(g) A^i U(g)^\dagger = e^{i\beta} V U'(g) A^i U'(g)^\dagger V^\dagger$

$\Leftrightarrow$ $A^i = e^{i\beta - i\varphi(g) + i\varphi'(g)} \cdot U(g) V U'(g)^\dagger \cdot A^i \cdot \left(U(g) V U'(g)^\dagger\right)^\dagger$.

$= e^{i\beta}$ ($\because$ uniqueness) $\quad = {}^{\exists}\eta(g) \cdot V$ ($\because$ uniqueness)

特に $U(gh) V U'(gh)^\dagger = \eta(gh) V \Leftrightarrow e^{i\omega(g,h)} U(g) U(h) V e^{-i\omega'(g,h)} \left(U'(g) U'(h)\right)^\dagger = \eta(gh) V$

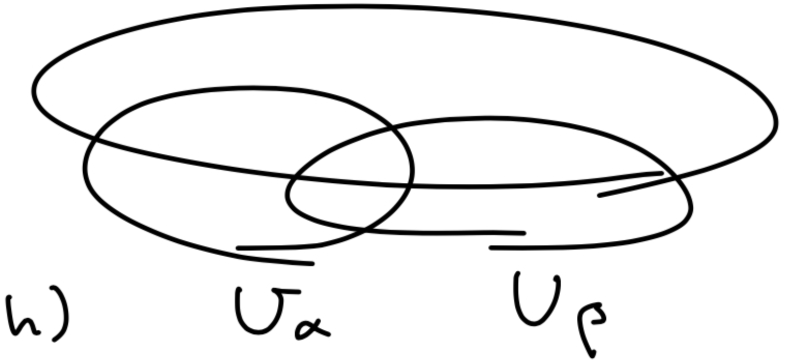
$\Leftrightarrow$ $e^{i\omega(g,h)} = e^{i\omega'(g,h)} \cdot e^{i\delta\chi(g,h)}$ $\Rightarrow$ $[e^{i\omega}] = [e^{i\omega'}]$.

よって U, U' の phase を $e^{i\omega} = e^{i\omega'}$ となるようにとれば $\eta(g) \in Z^1(G; U(1))$

G-sym. inj. MPS の pump inv.

① X の open covering $\{U_\alpha\}$ をとる.

② $e^{i\omega_{ref}} \in Z^2(G;U(1))$ を fix する.



③ $(\{A^i_\alpha\}, e^{i\beta}_\alpha, [U_\alpha])$ on U_α に対し.

U_α の phase を. $U_\alpha(g)U_\alpha(h) = e^{i\omega_{ref}}U_\alpha(gh)$

となるようにとる.

④ fundamental thm から, $\eta_{\alpha\beta} \in Z^1(G;U(1))$

が定まる.

$$[\eta] := \prod [\eta_{\alpha\beta}] \in H^1(G;U(1))$$