時間依存Bose-Einstein凝縮系に対する非平衡Thermo Field Dynamicsにおける4x4行列形式

[Physica A 591, 126732 (2022)] からの発展

中村祐介

長野県松本県ヶ丘高等学校

早稲田大学凝縮系物質科学研究所

共同研究者：大山京尋、山中由也（早大基幹理工）

時間依存Bose-Einstein凝縮系に対する非平衡Thermo Field Dynamicsにおける4x4行列形式

時間依存Bose-Einstein凝縮系

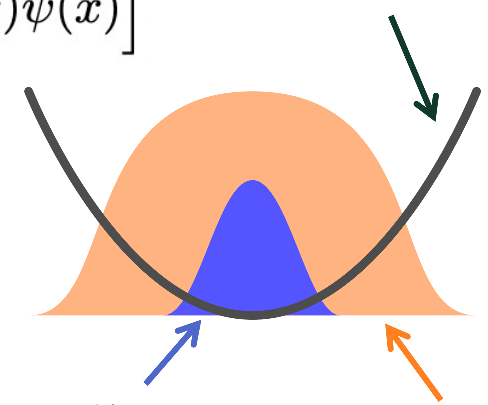
- **冷却Bose気体系**を想定
- 自発的対称性が破れ、**凝縮体**が存在する系

$$H = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left[\psi^\dagger(x) h(x) \psi(x) + \frac{g}{2} \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right]$$

$$\left[\psi(x), \psi^\dagger(x')\right] = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

$$x = (\boldsymbol{x}, t), \qquad x' = (\boldsymbol{x}', t)$$

$$\langle \psi(x) \rangle = \zeta(x) \neq 0$$



時間依存Bose-Einstein凝縮系に対する
非平衡Thermo Field Dynamics
における4x4行列形式

非平衡TFD

[H.Umezawa, *Advanced Field Theory - Micro, Macro, and Thermal Physics*, AIP (1993)]

- **非平衡系**を記述する場の量子論
- 演算子の数を2倍にすることで、熱的な混合状態を**純粋状態**で記述する

超演算子 $\hat{A} : \rho \mapsto \rho'$ ⇒ $\hat{A}\,|\rho\rangle\!\rangle = |\rho'\rangle\!\rangle$

特に $\psi\rho \Rightarrow \psi\,|\rho\rangle\!\rangle$, $\rho\psi \Rightarrow \tilde{\psi}^\dagger\,|\rho\rangle\!\rangle$ とする

混合状態期待値 ⇨ 純粋状態期待値

$$\mathrm{Tr}[A\rho] = \langle\!\langle I|A\rho\rangle\!\rangle = \langle\!\langle I|\,\hat{A}\,|\rho\rangle\!\rangle = \langle 0|\,\hat{A}\,|0\rangle$$

熱的真空のブラ・ケットは対称ではない！

Liouville方程式 ⇨ Schrödinger方程式

$$i\partial_t\rho = [H,\rho] \Rightarrow \left(H - \tilde{H}\right)|\rho\rangle\!\rangle = \hat{H}\,|0\rangle$$

TFDのハミルトニアン

時間依存Bose-Einstein凝縮系に対する非平衡Thermo Field Dynamicsにおける4x4行列形式

4x4行列形式

倍化された場の演算子

$$\psi, \psi^\dagger, \tilde{\psi}, \tilde{\psi}^\dagger$$

$$[\psi(x), \psi^\dagger(x')] = [\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}^\dagger(x')] = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

$$[\psi(x), \tilde{\psi}(x')] = [\psi(x), \tilde{\psi}^\dagger(x')] = 0$$

4x4行列のBogoliubov変換 →

熱的真空の生成消滅演算子

$$\xi, \xi^\dagger, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}^\dagger$$

$$[\xi_\ell, \xi_{\ell'}^\dagger] = [\tilde{\xi}_\ell, \tilde{\xi}_{\ell'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'}$$

$$[\xi_\ell, \tilde{\xi}_{\ell'}] = [\xi_\ell, \tilde{\xi}_{\ell'}^\dagger] = 0$$

$$\xi_\ell |0\rangle = \tilde{\xi}_\ell |0\rangle = 0$$

$$\langle 0| \xi_\ell^\dagger = \langle 0| \tilde{\xi}_\ell^\dagger = 0$$

$$\langle 0| A |0\rangle = \langle A \rangle$$

- 粒子描像を定義し、摂動計算を行いたい
- 従来は2x2変換を2回行っていた
- 4x4変換の一般形は？

レビュー：凝縮体なしの非平衡TFD

ハミルトニアンのψ演算子について2次の部分を対角化

$$H_0 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \psi^\dagger(x) h(\boldsymbol{x}) \psi(x) = \sum_\ell \omega_\ell a_\ell^\dagger a_\ell$$

1. 完全系を用意　$h(\boldsymbol{x}) u_\ell(\boldsymbol{x}) = \omega_\ell u_\ell(\boldsymbol{x})$

2. 場を展開　$\psi(x) = \sum_\ell u_\ell(\boldsymbol{x}) a_\ell(t)$

倍加して、TFDへ

$$\hat{H}_0 = \sum_\ell \omega_\ell \left(a_\ell^\dagger a_\ell - \tilde{a}_\ell^\dagger \tilde{a}_\ell \right)$$

3. 熱的Bogoliubov変換（2x2）でξ演算子を導入

$$\begin{pmatrix} a_\ell \\ \tilde{a}_\ell^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_\ell \\ 1 & 1 + n_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell^\dagger \end{pmatrix}$$

$$n_\ell = \langle 0 | a_\ell^\dagger a_\ell | 0 \rangle$$

非平衡の分布関数(これを求めたい)

4. 非摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}_u = \sum_\ell \begin{pmatrix} a_\ell^\dagger & -\tilde{a}_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\ell - i\dot{n}_\ell & i\dot{n}_\ell \\ -i\dot{n}_\ell & \omega_\ell + i\dot{n}_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\ell \\ \tilde{a}_\ell^\dagger \end{pmatrix}$$

$$i\partial_t a_\ell = \left[a_\ell, \hat{H}_u \right]$$

レビュー：凝縮体なしの非平衡TFD

倍加して、TFDへ (再掲)

3. 熱的Bogoliubov変換（2x2）でξ演算子を導入

$$\begin{pmatrix} a_\ell \\ \tilde{a}_\ell^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_\ell \\ 1 & 1+n_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell^\dagger \end{pmatrix}$$

$$n_\ell = \langle 0 | a_\ell^\dagger a_\ell | 0 \rangle$$

非平衡の分布関数(これを求めたい)

4. 非摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}_u = \sum_\ell \begin{pmatrix} a_\ell^\dagger & -\tilde{a}_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\ell - i\dot{n}_\ell & i\dot{n}_\ell \\ -i\dot{n}_\ell & \omega_\ell + i\dot{n}_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\ell \\ \tilde{a}_\ell^\dagger \end{pmatrix}$$

$$i\partial_t a_\ell = \left[a_\ell, \hat{H}_u \right]$$

輸送方程式の導出

5. 摂動計算をして、自己エネルギーを求める

$$\begin{pmatrix} S_{\ell_1\ell_2}^{11}(t_1,t_2) & S_{\ell_1\ell_2}^{12}(t_1,t_2) \\ S_{\ell_1\ell_2}^{21}(t_1,t_2) & S_{\ell_1\ell_2}^{22}(t_1,t_2) \end{pmatrix}$$

6. on-shell自己エネルギーを定義し、繰り込み条件を課す

$$\dot{n}_\ell(t) = 2\,\mathrm{Im} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\, S_{\ell\ell}^{12}(t,t')\; e^{i\int_{t'}^{t} \mathrm{d}t'' \omega_\ell(t'')}$$

レビュー：定常な凝縮体ありの絶対零度

非凝縮気体を表すφを導入

$$\zeta(\boldsymbol{x}) = \langle \psi(x) \rangle \qquad \psi(x) = \zeta(\boldsymbol{x}) + \varphi(x)$$

ハミルトニアンのφ演算子について2次の部分を非摂動部に

$$H_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \begin{pmatrix} \varphi^\dagger(x) & -\varphi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}) & \mathcal{M}(\boldsymbol{x}) \\ -\mathcal{M}^*(\boldsymbol{x}) & -\mathcal{L}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^\dagger(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}) &= h(\boldsymbol{x}) + 2g|\zeta(\boldsymbol{x})|^2 \\ \mathcal{M}(\boldsymbol{x}) &= g\zeta^2(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

非エルミートな行列の固有値問題（Bogoliubov-de Gennes方程式）

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix}$$

行列の対称性
$$\sigma_1 T \sigma_1 = -T^* \qquad \sigma_3 T \sigma_3 = T^\dagger$$

*T*の右固有ベクトルと左固有ベクトルで作る完全系で場を展開

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^\dagger(x) \end{pmatrix} = \sum_\ell \begin{pmatrix} c_\ell(\boldsymbol{x}) & s^*_\ell(\boldsymbol{x}) \\ s_\ell(\boldsymbol{x}) & c^*_\ell(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_\ell(t) \\ b^\dagger_\ell(t) \end{pmatrix}$$

本講演では無視

$$H_0 = \sum_\ell \omega_\ell b^\dagger_\ell b_\ell + (\text{ゼロ\&複素固有値の部分})$$

4x4行列形式に向けて

- 場の演算子φと熱的真空の生成消滅演算子ξを結ぶ**変換の一般形**は？
  - 今までは2回の2x2の変換を行っていた。 [YN, YY, Ann. Phys., **326**, 1070 (2011)]

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^\dagger(x) \end{pmatrix} = \sum_\ell \begin{pmatrix} c_\ell(\boldsymbol{x}) & s_\ell^*(\boldsymbol{x}) \\ s_\ell(\boldsymbol{x}) & c_\ell^*(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_\ell(t) \\ b_\ell^\dagger(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_\ell \\ \tilde{b}_\ell^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_\ell \\ 1 & 1+n_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell^\dagger \end{pmatrix}$$

  - 2段階に分けなくてはいけない理由はない。b_ℓは不要
  - 一般には 2x2の直積に潰せない4x4行列となるはず

- **TFDの非摂動ハミルトニアンの構造**はどうあるべき？
  - naiveな $\hat{H}_u = H_0 - \tilde{H}_0$ ではない
  - 非チルダと非チルダの交差項を含んでも良いはず

$$H_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix}$$

4x4行列変換

ψからξの変換

naiveには4x4行列は実関数32個分のパラメータ

TFDからの要請

- チルダ共役則（チルダと非チルダを入れ替えると複素共役が付く）
- 熱的状態条件 $\langle 0|\varphi = \langle 0|\tilde{\varphi}^\dagger$ （熱的ブラは恒等演算子）

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \tilde{\varphi}(x) \\ \tilde{\varphi}^\dagger(x) \\ \varphi^\dagger(x) \end{pmatrix} = \sum_\ell \begin{pmatrix} c_\ell(x) & s_\ell^*(x) & u_{1\ell}(x) & u_{2\ell}^*(x) \\ s_\ell(x) & c_\ell^*(x) & u_{2\ell}(x) & u_{1\ell}^*(x) \\ c_\ell(x) & s_\ell^*(x) & u_{3\ell}(x) & u_{4\ell}^*(x) \\ s_\ell(x) & c_\ell^*(x) & u_{4\ell}(x) & u_{3\ell}^*(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell^\dagger \\ \xi_\ell^\dagger \end{pmatrix}$$

交換関係の両立

$$[\psi(x), \psi^\dagger(x')] = [\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}^\dagger(x')] = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \qquad [\xi_\ell, \xi_{\ell'}^\dagger] = [\tilde{\xi}_\ell, \tilde{\xi}_{\ell'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'}$$

$$[\psi(x), \tilde{\psi}(x')] = [\psi(x), \tilde{\psi}^\dagger(x')] = 0 \qquad [\xi_\ell, \tilde{\xi}_{\ell'}] = [\xi_\ell, \tilde{\xi}_{\ell'}^\dagger] = 0$$

$$\sum_\ell \begin{pmatrix} c_\ell^*(x) & s_\ell(x) \\ s_\ell^*(x) & c_\ell(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3\ell}(x') - u_{1\ell}(x') \\ u_{4\ell}^*(x') - u_{2\ell}^*(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_\ell \begin{pmatrix} c_\ell^*(x) & s_\ell(x) \\ s_\ell^*(x) & c_\ell(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1\ell}(x') \\ u_{2\ell}^*(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(x, x') \\ m(x, x') \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n(x, x') &= \langle 0|\varphi^\dagger(x)\varphi(x')|0\rangle \\ m(x, x') &= \langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle \end{aligned}$$

4x4行列変換

連立方程式を解く

次の性質を満たすWがあれば良い

$$W_\ell^{-1}(x) = \begin{pmatrix} c_\ell(x) & s_\ell^*(x) \\ s_\ell(x) & c_\ell^*(x) \end{pmatrix}$$

$$\sum_\ell W_\ell^{-1}(x) W_\ell(x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ W_\ell(x) W_{\ell'}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_{\ell\ell'}$$

$$N(x,x') = \begin{pmatrix} \langle \varphi(x)^\dagger \varphi(x) \rangle^* & \langle \varphi(x)\varphi(x) \rangle \\ \langle \varphi^\dagger(x)\varphi^\dagger(x) \rangle & \langle \varphi^\dagger(x)\varphi(x) \rangle \end{pmatrix} \quad I(x,x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

今回得られた4x4行列変換の一般形

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \tilde{\varphi}(x) \\ \tilde{\varphi}^\dagger(x) \\ \varphi^\dagger(x) \end{pmatrix} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \underbrace{\begin{bmatrix} I(x,x') & N(x,x') \\ I(x,x') & I(x,x') + N(x,x') \end{bmatrix}}_{\text{熱的な期待値}} \cdot \sum_\ell \underbrace{\begin{bmatrix} W_\ell^{-1}(x') & O \\ O & W_\ell^\dagger(x') \end{bmatrix}}_{\text{完全系による展開}} \begin{pmatrix} \xi_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell^\dagger \\ \xi_\ell^\dagger \end{pmatrix}$$

比較：従来の2つの2x2変換

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^\dagger(x) \end{pmatrix} = \sum_\ell \underbrace{\begin{pmatrix} c_\ell(\boldsymbol{x}) & s_\ell^*(\boldsymbol{x}) \\ s_\ell(\boldsymbol{x}) & c_\ell^*(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}_{\text{完全系による展開}} \begin{pmatrix} b_\ell(t) \\ b_\ell^\dagger(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_\ell \\ \tilde{b}_\ell^\dagger \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & n_\ell \\ 1 & 1 + n_\ell \end{pmatrix}}_{\text{熱的な期待値}} \begin{pmatrix} \xi_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell^\dagger \end{pmatrix}$$

$$n_\ell = \langle a_\ell^\dagger a_\ell \rangle$$

Wの作り方　その1

次の性質を満たすWを作るには？

$$\sum_\ell W_\ell^{-1}(x)W_\ell(x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$W_\ell^{-1}(x) = \begin{pmatrix} c_\ell(x) & s_\ell^*(x) \\ s_\ell(x) & c_\ell^*(x) \end{pmatrix}$$

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ W_\ell(x)W_{\ell'}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta_{\ell\ell'}$$

その1：【固有値問題】以下の性質を持つ行列の固有値ベクトルを使う

行列の対称性：$\sigma_1 T(x,x')\sigma_1 = -T^*(x,x')$

$$Ty_\ell = E_\ell y_\ell \qquad y_{*\ell}^\dagger T = E_\ell y_{*\ell}^\dagger \qquad \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ y_{*\ell}^\dagger(\boldsymbol{x})y_{\ell'}(\boldsymbol{x}) = \delta_{\ell\ell'}$$

$$\Rightarrow \quad W_\ell^{-1} = \begin{bmatrix} y_\ell & \sigma_1 y_\ell^* \end{bmatrix} \qquad W_\ell = \begin{bmatrix} y_{*\ell}^\dagger \\ \sigma_1 y_{*\ell}^t \end{bmatrix}$$

このWでハミルトニアンが対角化されるようにTを選べるか？

Wの作り方　その2

$$x = (\boldsymbol{x}, t),\quad x' = (\boldsymbol{x}', t)$$

その2：【TDCS】完全性を時間発展させる方法

[H.Matsumoto *et al.*, PTP 105, 573 (2001)]
[Y.Nakamura *et al.*, Ann.Phys. 326, 1070 (2011)]

「その1」で作った完全系を初期条件にして、次の微分方程式で時間発展

$$i\partial_t W_\ell^{-1}(x,x') = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, T(x,x'')W_\ell^{-1}(x'',x') \qquad -i\partial_t W_\ell(x,x') = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, W_\ell(x,x'')T(x'',x')$$

✓ **この方法は、演算子の時間依存性を全て完全系に押し付ける形式になっている。展開後の演算子は時間に依存しなくなる。**

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \tilde{\varphi}(x) \\ \tilde{\varphi}^\dagger(x) \\ \varphi^\dagger(x) \end{pmatrix} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \begin{bmatrix} I(x,x') & N(x,x') \\ I(x,x') & I(x,x')+N(x,x') \end{bmatrix} \cdot \sum_\ell \begin{bmatrix} W_\ell^{-1}(x') & O \\ O & W_\ell^\dagger(x') \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell^\dagger \\ \xi_\ell^\dagger \end{pmatrix}$$

イメージ　　**Wに押し付ける**

$$\xi(t) = \xi(t_0)e^{-iE(t-t_0)}$$

✓ **凝縮体が時間依存する場合、非摂動ハミルトニアンに時間依存するc数が現れる(予定)なので、方法2が有効**

非摂動ハミルトニアンの一般形

変換が時間依存する場合の注意：相互作用描像の時間発展演算子は$\hat{H}_u$とは限らない

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\psi, \hat{H}_u\right] \qquad i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\varphi, \hat{H}_\varphi\right] \qquad i\frac{\partial}{\partial t}\xi = \left[\xi, \hat{H}_\xi\right]$$

非摂動ハミルトニアン

$$\psi(x) = \zeta(x) + \varphi(x)$$

4x4行列変換

解析計算のための事情

・非摂動ハミルトニアンは演算子について2次以下とする

TFDからの要請

・チルダ共役則の保存（あるいはLiouville方程式の構造） $\left(\hat{H}_u\right)^{\sim} = -\hat{H}_u$

・熱的状態条件 $\langle 0|\,\varphi = \langle 0|\,\tilde{\varphi}^\dagger$ の保存 $\langle 0|\,\hat{H}_u = 0$

“対角化”の要請とカウンター項

非摂動ハミルトニアン　　※引数と積分記号を省略している

$$\hat{H}_u=\frac{1}{2}\bar{\varphi}^i_x\begin{pmatrix}\mathcal{L}-i\gamma & \eta & i(\gamma-\kappa) & \mathcal{M}-\eta\\ -\eta^* & -\mathcal{L}^*-i\gamma^* & -\mathcal{M}^*+\eta^* & i(\gamma^*-\kappa^*)\\ -i(\gamma+\kappa) & \mathcal{M}+\eta & \mathcal{L}+i\gamma & -\eta\\ -\mathcal{M}^*-\eta^* & -i(\gamma^*+\kappa^*) & \eta^* & -\mathcal{L}^*+i\gamma^*\end{pmatrix}^{ij}_{xx'}\varphi^j_{x'}+\bar{\varphi}^i_x\begin{pmatrix}C\\-C^*\\C\\-C^*\end{pmatrix}^i_x$$

自由度はエルミートな2変数関数**7つ**分＋実の1変数関数**2つ**分

$$\mathcal{L}(x,x'),\gamma(x,x'),\kappa(x,x'),\mathcal{M}^{(\dagger)}(x,x'),\eta^{(\dagger)}(x,x'),C^{(*)}(x)$$

$$\varphi^i_x=\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \tilde{\varphi}(x)\\ \tilde{\varphi}^\dagger(x)\\ \varphi^\dagger(x)\end{pmatrix}^i$$

$$\bar{\varphi}^i_x=\begin{pmatrix}\varphi^\dagger(x) & \tilde{\varphi}^\dagger(x) & -\tilde{\varphi}(x) & -\varphi(x)\end{pmatrix}^i$$

$$T=\begin{pmatrix}\mathcal{L}-i\kappa & \mathcal{M}\\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L}^*-i\kappa^*\end{pmatrix}$$

ξ演算子の時間発展演算子（“対角化”する対象）

時間依存する変換に伴い $\dot{N},\dot{W},\dot{\zeta}$ が出現

$$\hat{H}_\xi=\frac{1}{2}\bar{\xi}_\ell\begin{bmatrix}W\left(TW^{-1}-i\dot{W}^{-1}\right) & W\left(\mathcal{H}^{12}+TN-NT^\dagger-i\dot{N}\right)W^\dagger\\ O & W^{-1,\dagger}\left(T^\dagger W^\dagger-i\dot{W}^\dagger\right)\end{bmatrix}_{\ell\ell'}\xi_{\ell'}-\bar{\varphi}^i_x\begin{pmatrix}i\dot{\zeta}-C\\ -i\dot{\zeta}^*+C^*\\ i\dot{\zeta}-C\\ i\dot{\zeta}^*+C^*\end{pmatrix}^i_x$$

“対角化”の要請　$\boxed{\hat{H}_\xi=0}$

平衡系なら $\hat{H}_\xi=\sum_\ell E_\ell(\xi^\dagger\xi-\tilde{\xi}^\dagger\tilde{\xi})\qquad \xi_\ell(t)=\xi_\ell e^{-iE_\ell t}$

時間発展方程式の導出

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{L} - i\kappa & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L}^* - i\kappa^* \end{pmatrix}$$

$\hat{H}_\xi = 0$ の要請から決まる方程式

$i\dfrac{\partial}{\partial t}\zeta(x) = C(x)$ 秩序変数の時間発展： **Gross-Pitaevskii方程式**

$i\dfrac{\partial}{\partial t}W^{-1} = TW^{-1}$ $\quad i\dfrac{\partial}{\partial t}W^{\dagger} = TW^{\dagger}$ 完全系の時間発展　： **時間依存BdG方程式**

$i\dot{N} = \mathcal{H}^{12} + TN - NT^{\dagger}$ η, γを消し、$\dot{N}$を導入する式：**熱的カウンター項**

残ったパラメータ

$\mathcal{L}(x,x'), \mathcal{M}(x,x'), \kappa(x,x')$：非凝縮気体に対する系の情報
$n(x,x'), m(x,x')$：非凝縮気体の粒子分布
} **エルミート関数7つ**

$C(x)$：凝縮体に対する系の情報 **実数関数2つ**

1変数のパラメータ 決定！
場の分割条件
$\langle 0|\,\varphi_H(x)\,|0\rangle = 0$

2変数のパラメータ
自己エネルギーに対する
on-shell繰り込み条件で決めたい

on-shellと繰り込み条件

伝搬関数とDyson方程式　　**全て4x4の行列**　　**Feynman図法が使える**

全伝搬関数

$$g_{\ell_1\ell_2}(t_1,t_2) = -i\,\langle 0|\,\mathrm{T}\big[\xi_{\mathrm{H},\ell_1}(t_1)\bar{\xi}_{\mathrm{H},\ell_2}(t_2)\big]\,|0\rangle$$

非摂動伝搬関数

$$d_{\ell_1\ell_2}(t_1,t_2) = -i\,\langle 0|\,\mathrm{T}\big[\xi_{\ell_1}(t_1)\bar{\xi}_{\ell_2}(t_2)\big]\,|0\rangle$$

自己エネルギーの定義（Dyson方程式）

$$g_{\ell_1\ell_2}(t_1,t_2) = d_{\ell_1\ell_2}(t_1,t_2) + \sum_{\ell_1'\ell_2'}\int \mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\; d_{\ell_1\ell_1'}(t_1,s_1)S_{\ell_1'\ell_2'}(s_1,s_2)g_{\ell_2'\ell_2}(s_2,t_2)$$

on-shell自己エネルギー

[Y.Nakamura *et al.*, Ann.Phys. 311, 51 (2013)]
[Y.Kuwahara *et al.*, Int.J.Mod.Phys.B 32, 1850111 (2018)]

未来の情報を参照しないよう工夫した相対時間に関するFourier変換

$$\bar{S}^{ij}_{\ell_1\ell_2}(t) = \int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\left\{S^{ij}_{\ell_1\ell_2}(t,t+\tau) + S^{ij}_{\ell_1\ell_2}(t+\tau,t)\right\}$$

on-shell自己エネルギーに対する繰り込み条件

$$\bar{S}^{ij}_{\ell_1\ell_2}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{S}^{11}_{\ell_1\ell_2}(t) = \bar{S}^{12}_{\ell_1\ell_2}(t) = \bar{S}^{14}_{\ell_1\ell_2}(t) = \mathrm{Im}\,\bar{S}^{13}_{\ell_1\ell_2}(t) = 0$$

対称性によりエルミート関数**7つ**分の要請　⇨　**全パラメータが過不足なく決まる！**

[Ann. Phys., **331**, 51 (2013)]　[Physica A **591**, 126732 (2022)]

「2つの2x2変換」と「4x4変換」の比較

「4x4行列変換」の整合性は非常に高い。
しかし「2つの2x2行列変換」が全面的に違っていたとは考えられない。

熱的な期待値　完全系による展開

4x4変換

$$\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \tilde\varphi(x)\\ \tilde\varphi^\dagger(x)\\ \varphi^\dagger(x)\end{pmatrix} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \begin{bmatrix} I(x,x') & N(x,x') \\ I(x,x') & I(x,x')+N(x,x')\end{bmatrix}\cdot\sum_\ell \begin{bmatrix} W_\ell^{-1}(x') & O \\ O & W_\ell^\dagger(x')\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\xi_\ell\\ \tilde\xi_\ell\\ \tilde\xi_\ell^\dagger\\ \xi_\ell^\dagger\end{pmatrix}$$

2つの2x2変換

$$\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \varphi^\dagger(x)\end{pmatrix} = \sum_\ell \begin{pmatrix} c_\ell(\boldsymbol{x}) & s_\ell^*(\boldsymbol{x}) \\ s_\ell(\boldsymbol{x}) & c_\ell^*(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_\ell(t)\\ b_\ell^\dagger(t)\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_\ell\\ \tilde b_\ell^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_\ell \\ 1 & 1+n_\ell\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_\ell\\ \tilde\xi_\ell^\dagger\end{pmatrix}$$

両者は $\boldsymbol{\kappa = 0}$ で一致する

4x4の完全系を作るときに使うT

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{L} - i\kappa & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L}^* - i\kappa^*\end{pmatrix}$$

- 2つの2x2変換に出てくるT

$$H_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varphi^\dagger & -\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi \\ \varphi^\dagger\end{pmatrix}$$

- 4x4変換ではTは顕には出現しない

まとめ

- **時間依存BEC系に対する非平衡TFDにおける4x4行列変換を用いた定式化をおこなった**
  - 系の詳細に依らない議論。対称性や最低限の要請で構築
  - 非摂動ハミルトニアンのパラメータは**2**+**7**個あり、**場の分割条件**と**on-shell自己エネルギーに対する繰り込み条件**で過不足なく決定できる。
  - 従来の2x2行列変換にはなかった**パラメータκ**が出現
    - 励起の寿命みたいな意味に対応
    - 熱平衡への緩和時間に大きく影響を与えるはず

今後の課題

- 従来の方法（あるいはκの有無）との定量的な比較
- 具体的な模型での数値計算が必要
- パラメータの物理的な意味
- ゼロ固有値の扱い