超流動がある場合の

閉じ込め相とヒッグス相に対する新しい見方

IPMU 近藤　暖
共同研究者 日高義将(KEK)

(arxiv:2210.11492)

予定

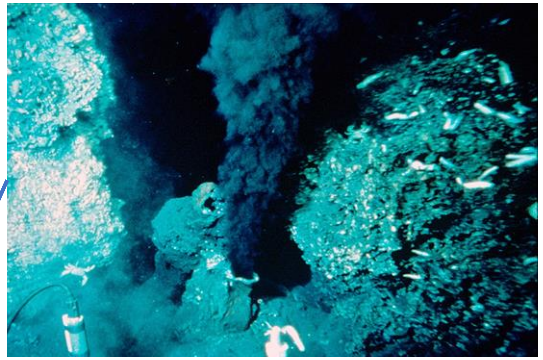
- 動機
- 高次対称性の準備
- 高次対称性の具体例　物質場のない電磁気
- 高次対称性が創発する例１　超流動
- 高次対称性が創発する例２　超伝導
- $U(1)_{gauge} \times U(1)_{global}$の対称性を持った模型
- 閉じ込め相とヒッグス相について

動機

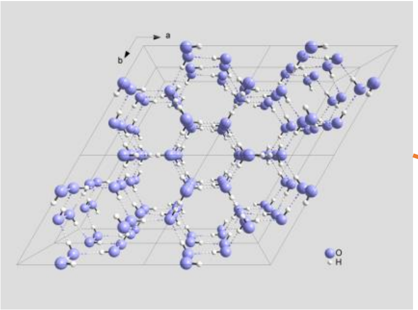
対称性と相の区別

並進対称性

区別がつかない

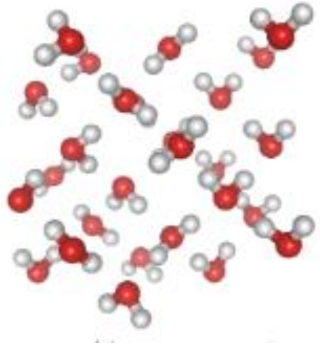


熱水噴出孔

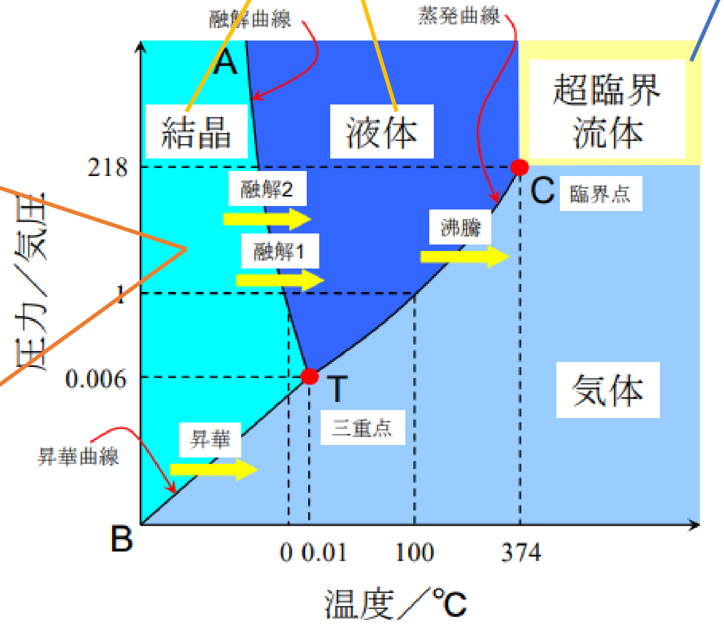


離散対称性

Ih相　六方晶 $\mathbb{Z}_6$



Ic相　立方晶 $\mathbb{Z}_4$

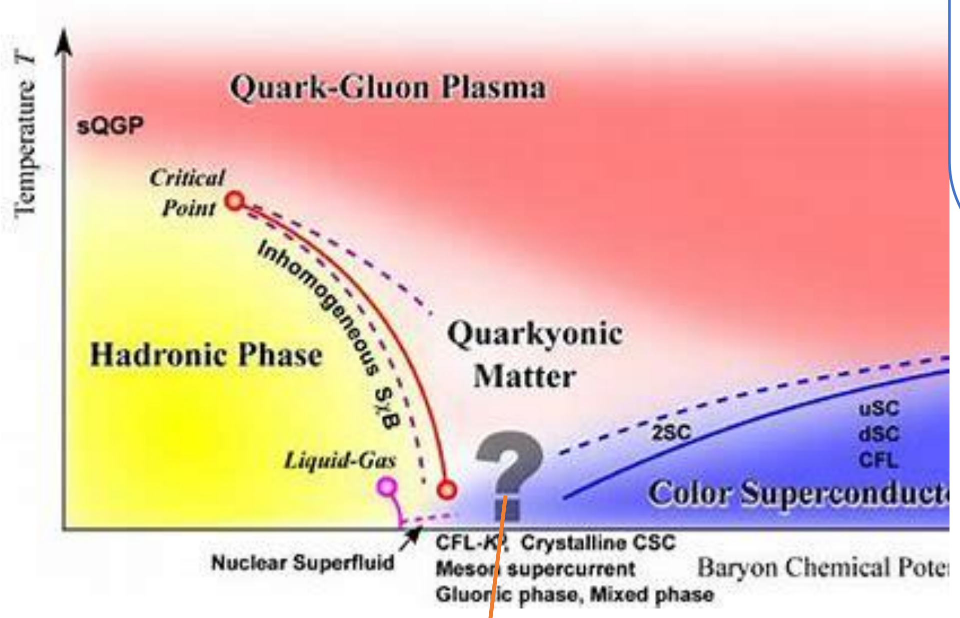


水の相図

chapter10.pdf (osaka-cu.ac.jp)　より

QCDの相図

K. Fukushima and T.Hatsuda, Rept.Prog.Phys.74,014001(2011)



閉じ込め相とヒッグス相の間は
どうなっているのか??
境界は区別できるのか？

大域的な対称性が２つの相で同じ
→２つの相は連続でつながっていて区別がつかない

Schafer and Wilczek,PRL82,3956(1999)
Hatsuda,Tachibana,Yamamoto,Baym,PRL97 122001(2006)
Alford, Baym, Fukushima, Hatsuda, Tachibana, Phys. Rev. D 99, 036004 (2019)
Chatterjee, Nitta, Yasui Phys. Rev. D99, 034001 (2019)
Hirono, Tanizaki, PRL 122, 212001 (2019)

（量子）相転移がある
Cherman, Sen, Yaffe, PRD 100, 034015 (2019)
Cherman et.all Phys.Rev.D 102 (2020) 10, 105021

（あれば）
どんな対称性で相を区別できるか？

高次対称性の準備

（通常の）対称性について

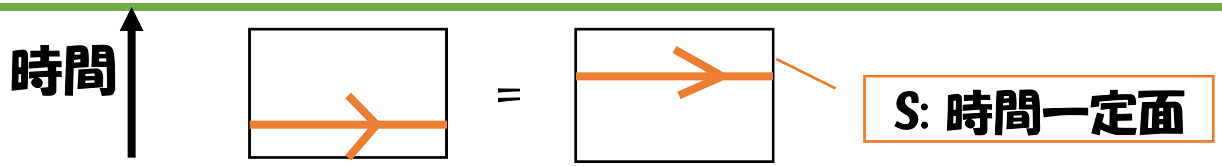
対称性があると

$\partial_\mu j^\mu = 0$ 保存則, $Q = \int d^d x\, j^0(x)$ 電荷(生成子)

$j = \frac{1}{d!}\epsilon_{\mu\mu_1\dots\mu_d} j^\mu dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}$ **とすると**

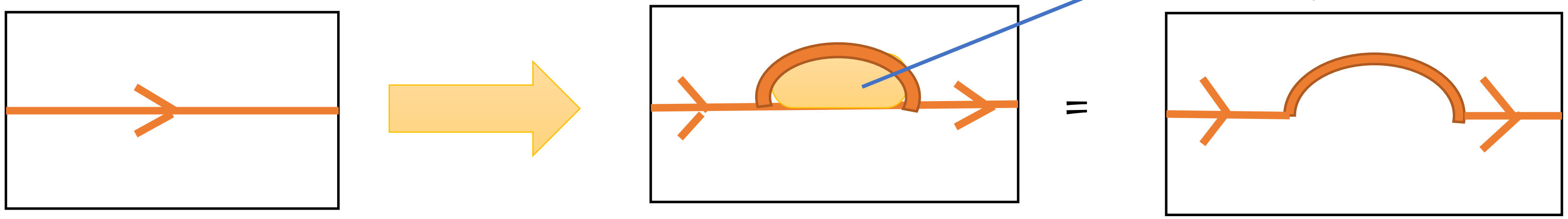
保存則は $dj = 0$

電荷（生成子）は $Q = \int_S j$



保存則が成り立っていれば、積分する面を$S \to S + \partial V$としてもストークスの定理より同じ。（トポロジカルな変形で不変。）

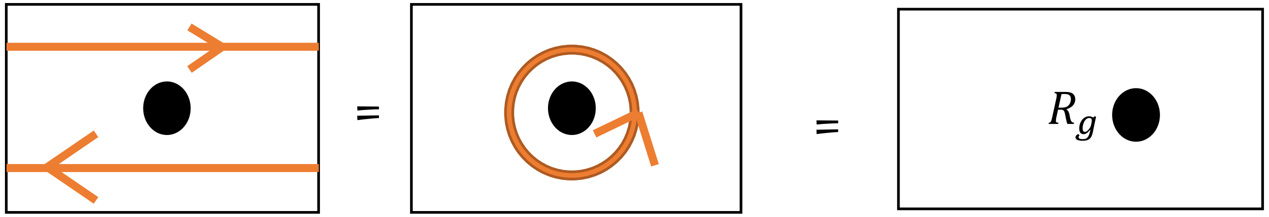
$\delta Q = \int_{S+\partial V} j - \int_S j = \int_{\partial V} j = \int_V dj = 0$



対称性演算子 $U_g = e^{i\theta Q}$ に対する対称性変換の仕方は

$$U_g \psi U_g^{-1} = R_g \psi$$

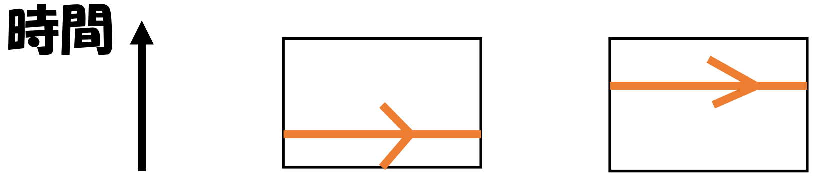
荷電物体 **表現行列**

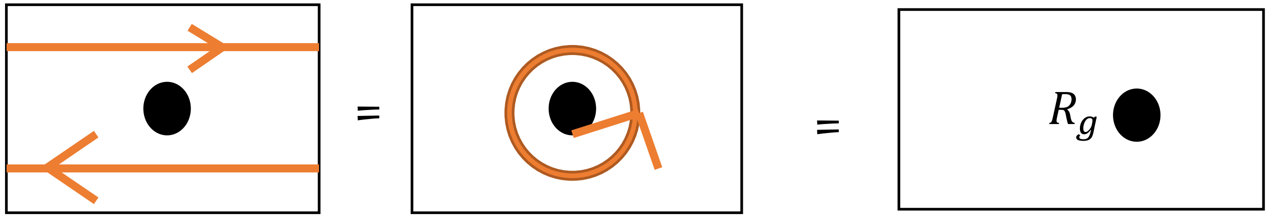


通常

$$Q = \int_{M^d} j$$

$$U_g \psi U_g^{-1} = R_g \psi$$



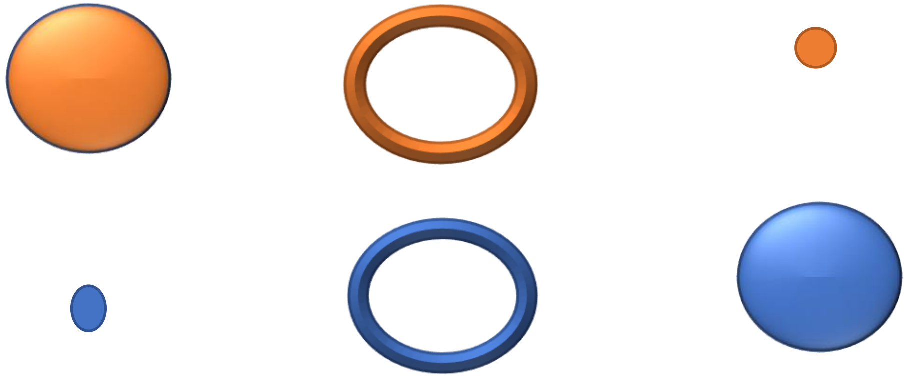


拡張可能性…余次元が増えても
$dj = 0$が保存則とみなせる

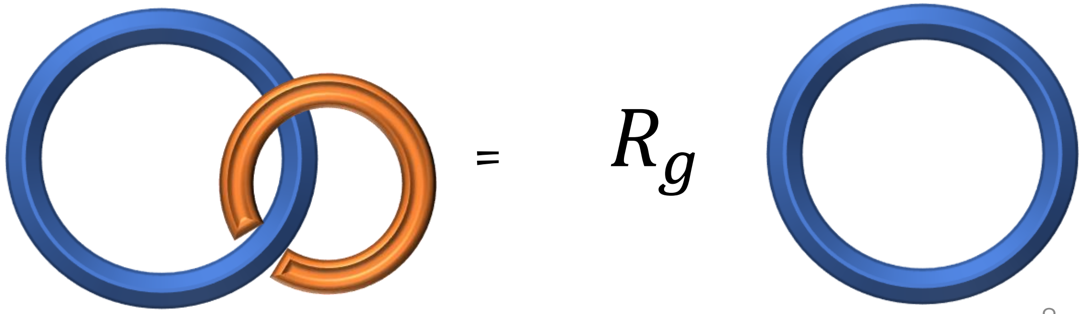
高次

例えば2+1次元だと

	0次	1次	2次
対称性演算子			
荷電物体			



<u>**生成子と荷電物体が絡むと表現行列が出てくる**</u>



高次対称性の具体例
高次対称性の出方をみる

高次対称性の例　物質場のない電磁気

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0$$
$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu f_{\rho\sigma} = 0$$

微分形式で書くと

$$d\boxed{* f} = 0$$
$$d\boxed{f} = 0$$

保存量

$j_E := * \frac{f}{e^2}$, $j_M := \frac{f}{2\pi}$ として、

対称性演算子

$$\boxed{U^E_{e^{i\theta}}(S) := \exp\left[i\theta \int_S j_E\right]}$$ 電気的対称性

$$\boxed{U^M_{e^{i\eta}}(S) := \exp\left[i\eta \int_S j_M\right]}$$ 磁気的対称性

を定義する。

3+1次元時空で、空間の積分領域 Sが2次元なので、1次対称性
電束・磁束の保存に対応する。

高次対称性の例　物質場のない電磁気

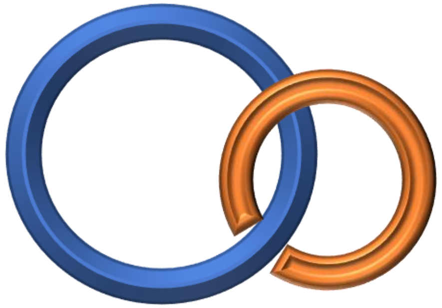
$U^E_{e^{i\theta}}(S) := \exp\left[i\theta\int_S j_E\right]$ 電気的対称性

$U^M_{e^{i\eta}}(S) := \exp\left[i\eta\int_S j_M\right]$ 磁気的対称性

荷電物体は…

$W(C) = \exp \mathrm{i}\int_C a$ ウィルソンループ

$H_n(C) = \exp \mathrm{i}n\int_C \tilde{a}$ トフーフトループ



$U^E_{e^{\mathrm{i}\theta}}(S)W(C) = e^{\mathrm{i}\theta}W(C)$ お互いに巻き付くと結果を出力する

高次対称性が創発する例

低エネルギー有効理論で高次対称性が創発することがある

しばしば相転移がある

高次対称性が創発する例1　超流動

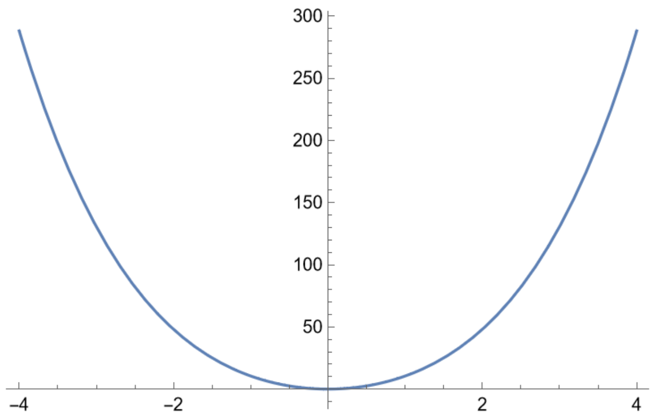
大域的U(1)対称性を持った複素スカラー場の理論

作用

$$S = -\int (d\phi^\dagger \wedge * \, d\phi + * \, m^2|\phi|^2 + * \, g^2|\phi|^4)$$

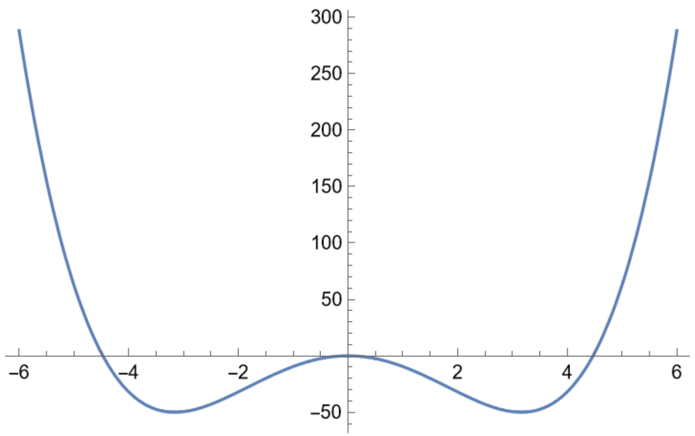
U(1)対称性 (0form) $\phi \to e^{i\theta}\phi$**で** S**は不変**

$m^2 > 0$**の場合**



m^2**によって**
対称性が自発的に
破れてない相/破れた相
にわかれる

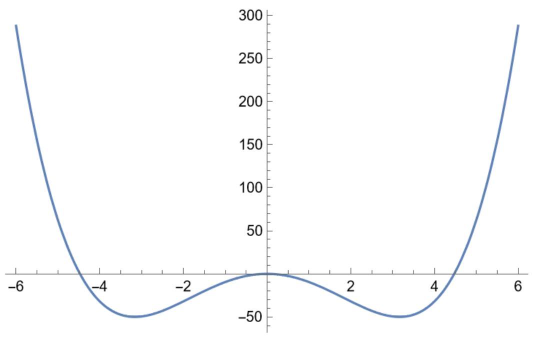
$m^2 < 0$**の場合**



$m^2 < 0$ 破れている場合

静的な解は

$$|\phi|^2 = 0, -\frac{m^2}{2g^2}$$



$v = \sqrt{-\frac{m^2}{g^2}}$ **として安定な解のまわりで**

場を$\phi = \frac{(v+h)e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}$ **と展開すると**

$$S = -\int \frac{1}{2}(v^2 + 2vh + h^2)d\varphi \wedge * \, d\varphi + \frac{1}{2}dh \wedge * \, dh + |m^2| * h^2 + \frac{g^2}{4} * (4vh^3 + h^4)$$

h**は質量**$\sqrt{2|m^2|}$**をもつ**

→低エネルギーで見えなくなる

低エネルギー有効理論は

$$S_{eff} = -\frac{v^2}{2}\int d\varphi \wedge * \, d\varphi + \cdots$$

保存則は２つ

$d * \boxed{d\varphi} = 0$…**もともとあった**$U(1)$ **0form 対称性**

$d\boxed{d\varphi} = 0$…**創発した**$U(1)$ **2form 対称性**

高次対称性が創発する例２　超伝導（＝超流動＋電磁場）

$$S = -\frac{1}{2e^2}\int f \wedge *f - \int (d_a\phi^\dagger \wedge d_a\phi + *m^2|\phi|^2 + *g^2|\phi|^4)$$

$d_a\phi = (d - iqa)\phi$ **共変微分**

対称性は？
ゲージ変換での対称性
$a \to a + d\lambda,\ \phi \to e^{iq\lambda}\phi$

磁気的U(1) 1次対称性

$$U^M_{e^{i\eta}}(S) = \exp\left[i\eta\frac{1}{2\pi}\int_S f\right]$$

電気的な対称性は？

$$U^E_{e^{i\theta}}(S) = \exp\left[i\theta\frac{1}{e^2}\int_S *f\right]$$

$S \to S + \partial V$**では**

$$U^E_{e^{i\theta}}(S) \to \exp\left[i\theta\frac{1}{e^2}\int_{S+\partial V} *f\right] = e^{i\theta\frac{1}{g^2}\int_V d*f}U^E_{e^{i\theta}}(S) = e^{iq\theta\int_V j}U^E_{e^{i\theta}}(S)$$

$\int j \in \mathbb{Z}$**なので**$\theta = \frac{2\pi n}{q}\ (n = 0,1,\ldots,q-1)$**だと**

$U^E_{e^{i\theta}}(S)$**はトポロジカルになっている。**

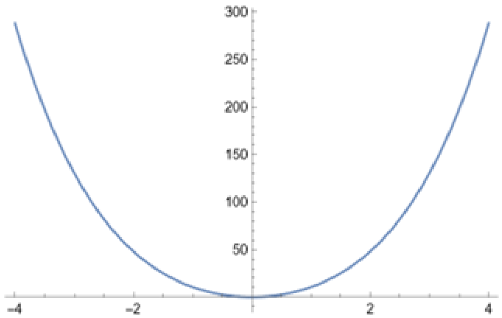
$\to \mathbb{Z}_q$－1次対称性

$$S = -\frac{1}{2e^2}\int f \wedge {}^* f - \int (d_a\phi^\dagger \wedge d_a\phi +^* m^2|\phi|^2 +^* g^2|\phi|^4)$$

$m^2 > 0$の場合
低エネルギー有効理論は

$$S_{eff} = -\frac{1}{2e^2}\int f \wedge^* f$$

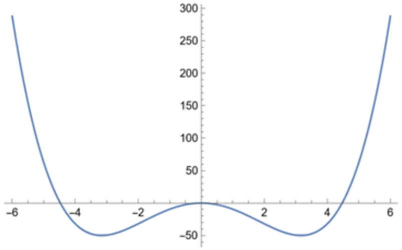
物質場がいなくなって
U(1)1次対称性として創発している。



$m^2 < 0$の場合（複素場は凝縮している）
低エネルギー有効理論は

$$S_{eff} = -\frac{1}{2e^2}\int f \wedge^* f - \frac{v^2}{2}\int (d\varphi - qa) \wedge^* (d\varphi - qa)$$

$\mathbb{Z}_q$(d-1)次対称性が創発している。



$$U_{e^{i2\pi/q}}(C) = e^{i\frac{1}{q}\int_C d\varphi}$$

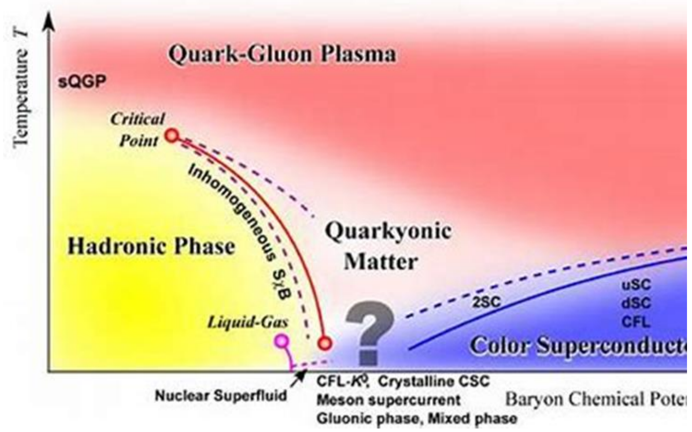
- $d\varphi$**とかけているのでトポロジカル。**
- **ゲージ変換**$(\varphi \to \varphi + q\lambda)$**で不変**

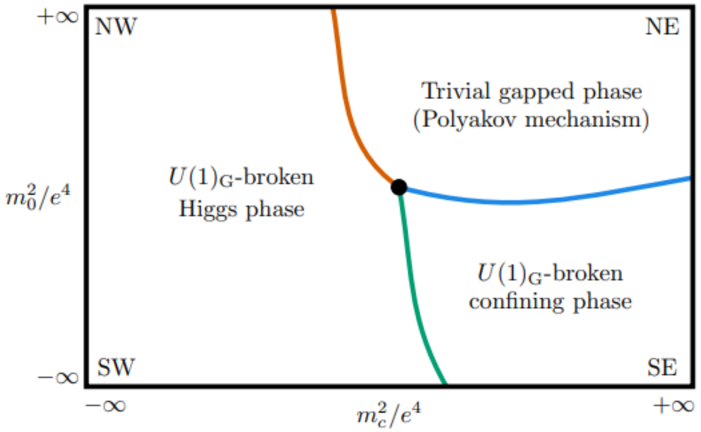
$$\because \frac{1}{q}\int d\varphi \to \frac{1}{q}\int d\varphi + \int d\lambda = \frac{1}{q}\int d\varphi + 2\pi n$$

ポイント：低エネルギー有効理論で高次対称性が創発することがある。

$U(1)_{gauge} \times U(1)_{global}$の対称性を持った模型

高密度QCDのおもちゃの模型になっている。（状況が似ている）





K. Fukushima and T.Hatsuda, Rept.Prog.Phys.74,014001(2011)

Cherman et.all Phys.Rev.D 102 (2020) 10, 105021

先行研究…超流動＋超伝導の模型
(Cherman et.all Phys.Rev.D 102 (2020) 10, 105021)

作用・・・2+1次元の設定

$$S=-\frac{1}{2e^2}\int f\wedge * f-\int\left(d\phi_0^\dagger\wedge * d\phi_0+* m_0^2|\phi_0|^2+* \lambda_0|\phi_0|^4\right)-\epsilon\int *(\phi_+\phi_-\phi_0+h.c)$$
$$-\int\left(d_a\phi_+^\dagger\wedge d_a\phi_++d_a\phi_-^\dagger\wedge d_a\phi_-+m_c^2(|\phi_+|^2+|\phi_-|^2)+\lambda_c(|\phi_+|^4+|\phi_-|^4)\right)$$

バリオンに相当

	ϕ_0	ϕ_+	ϕ_-
U(1)電荷 (gauge)	0	1	-1
U(1)電荷(global)	2	-1	-1

クォークに相当

対称性は

U(1) (gauge) $a\to a+d\lambda,\ \phi_\pm\to e^{\pm i\lambda}\phi_\pm$

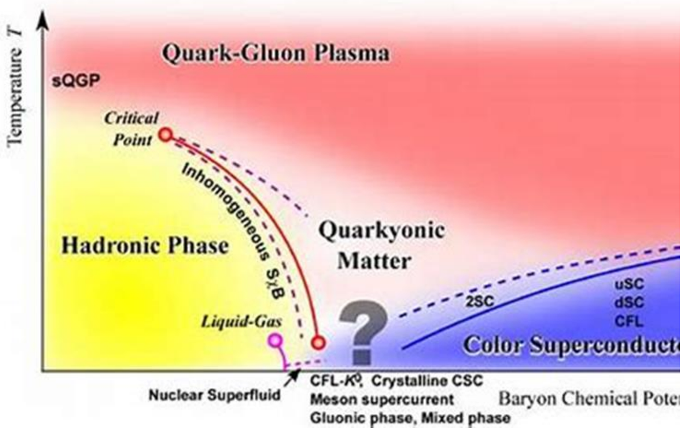
U(1) (global) $\phi_0\to e^{i2\psi}\phi_0, \phi_\pm\to e^{-i\psi}\phi_\pm$

作用

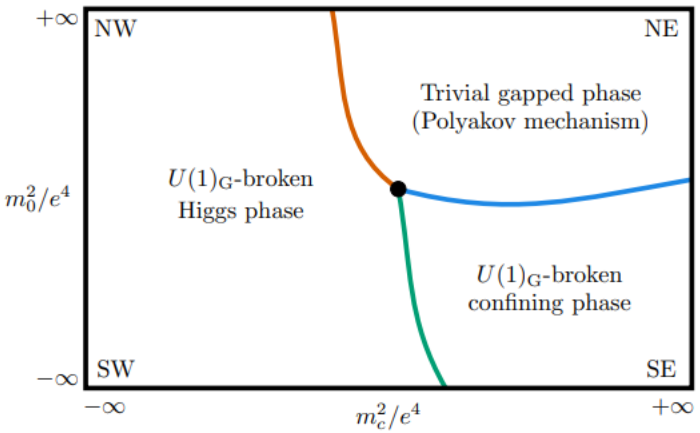
$$S=-\frac{1}{2e^2}\int f\wedge * f-\int\left(d\phi_0^\dagger\wedge * d\phi_0+* m_0^2|\phi_0|^2+*\lambda_0|\phi_0|^4\right)-\epsilon\int *\left(\phi_+\phi_-\phi_0+h.c\right)$$

$$-\int\left(d_a\phi_+^\dagger\wedge d_a\phi_++d_a\phi_-^\dagger\wedge d_a\phi_-+m_c^2(|\phi_+|^2+|\phi_-|^2)+\lambda_c(|\phi_+|^4+|\phi_-|^4)\right)$$

作用自体は超伝導と超流動の組み合わせ。



K. Fukushima and T.Hatsuda, Rept.Prog.Phys.74,014001(2011)



Cherman et.all Phys.Rev.D 102 (2020) 10, 105021

低エネルギー有効理論で $-m_0^2\gg e^4$ のところをみる。

→ m_c^2/e^4 によって2つの可能性がある。大域的対称性の破れ方はどちらの可能性も同じ。

予想として、渦の解を仮定する。

$$\phi_\pm = v_c f_\pm(r) e^{i\nu_\pm\theta}, \phi_0 = v_0 f_0(r) e^{ik\theta}, a_\theta(r) = \frac{\Phi h(r)}{2\pi r}$$

（巻き付き数１の最低限の状況で）ホロノミーを考える

$$\Omega \equiv e^{i\oint_C a} \qquad O_\Omega \equiv \lim_{r\to\infty} \frac{\langle \Omega(C) \rangle_1}{\langle \Omega(C) \rangle}$$

エネルギーを最小化すると

ヒッグス相

$$O_\Omega = -1$$

※よりQCDに近い模型だと$\exp\left[\frac{2}{3} i\pi\right]$

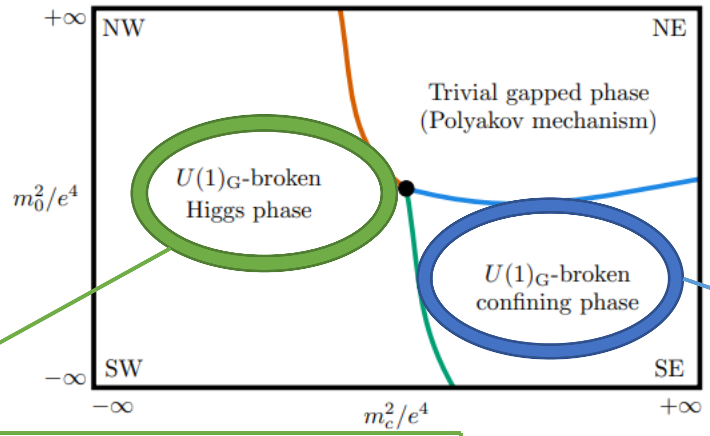
閉じ込め相

$$O_\Omega = 1$$

※よりQCDに近い模型でも1

どこかで飛ぶから相転移があるだろう

本研究



$-m_c^2 \gg e^4$ の場合(ヒッグス相)
低エネルギー有効理論で、$\phi_\pm$は凝縮する。
電気的に中性な超流動の渦と
磁束が貫いている渦がいる。

有効作用

$$S_{eff} = -\frac{1}{2e^2}\int f \wedge * f - \frac{v_c^2}{2}\int \left(d_a\pi_+^\dagger \wedge * d_a\pi_+ + d_a\pi_-^\dagger \wedge * d_a\pi_-\right)$$

$m_c^2 \gg e^4$ の場合(閉じ込め相)
低エネルギー有効理論で、$\phi_\pm$はいなくなる。
電気的に中性な超流動の渦がいる。

有効作用

$$S_{eff} = -\frac{1}{2e^2}\int f \wedge * f - \frac{v_0^2}{2}\int d\pi_0 \wedge * d\pi_0$$

$-m_c^2 \gg e^4$ の場合(ヒッグス相)

有効作用

$$S_{eff} = -\frac{1}{2e^2}\int f \wedge * f - \int \left(d_a\pi_+^\dagger \wedge * d_a\pi_+ + d_a\pi_-^\dagger \wedge * d_a\pi_-\right)$$

2種類のトポロジカルな演算子が考えられる。

1. $\exp\left[i\theta_+ \int \frac{d\pi_+ + d\pi_-}{2\pi}\right]$ **ゲージ変換で不変な演算子**

2. $\exp\left[i\theta_- \int \frac{d\pi_+ - d\pi_-}{2\pi}\right]$ $\theta_- \in \mathbb{Z}$ **であればゲージ変換で不変な演算子**

特にθ_-が奇数で、$\int d\pi_+ - d\pi_- = 2(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ だと-1の値をとる。
(ペアで相殺できない磁束が刺さっている状況)

低エネルギー有効理論で創発した高次対称性がヒッグス相を特徴づけている。

Maurer-Cartan formを使って高次対称性を構成する

$$G = \frac{U(1)_{gauge} \times U(1)_{global}}{\mathbb{Z}_2} \to H = 1 \qquad \therefore G/H = \frac{U(1)_{gauge} \times U(1)_{global}}{\mathbb{Z}_2}$$

$(\xi_c, \xi_Q) = (e^{i\pi_c}, e^{i\pi_Q}) \in U(1)_{gauge} \times U(1)_Q$ をとってくる。

これらは、$(\alpha, \beta, \gamma\ ) \in U(1)_{gauge} \times U(1)_{global} \times \mathbb{Z}_2$ として

$(\xi_c, \xi_Q) \to (\alpha\xi_c, \gamma^{-1}\ \beta\xi_Q\gamma^{-1})$と変換する。

この$\mathbb{Z}_2$右変換で不変なものは、例えば$\xi_c \xi_Q^\dagger, \xi_Q^2$

これらのMaurer-Cartan formは

$$i(\xi_c)d(\xi_c)^\dagger = d\pi_c$$

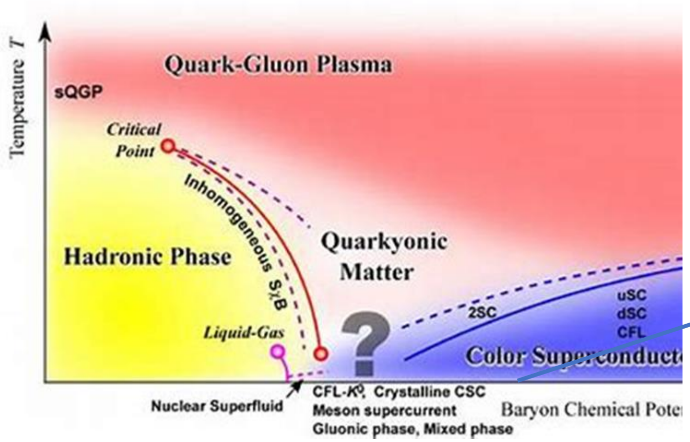
$$i(\xi_Q^2)d(\xi_Q^2)^\dagger = 2d\pi_Q$$

$\exp[i \oint d\pi_c]$は
非自明な値-1を返すことがある

$\exp[i\theta \oint 2d\pi_Q]$は
$\exp[2i\pi\theta]$返す

ヒッグス相で創発している
トポロジカルでゲージ変換で不変な演算子

閉じ込め相とヒッグス相について



K. Fukushima and T.Hatsuda,
Rept.Prog.Phys.74,014001(2011)

低エネルギー有効理論で創発した
高次対称性で特徴づけられるのでは？

Color Flavor Locked 相(CFL相)ではdiquark$(qq)_{c,f}$が特徴づける

$$G=\frac{SU(3)_c\times SU(3)_f\times U(1)_Q}{\mathbb{Z}_{3,C+Q}\times\mathbb{Z}_{3,f+Q}}\to H=\frac{SU(3)_{C+f}\times\mathbb{Z}_{6,Q}}{\mathbb{Z}_{3,C+Q}\times\mathbb{Z}_{3,f+Q}}\quad G/H\simeq\frac{SU(3)_{C-f}\times U(1)_Q}{\mathbb{Z}_6}=\frac{SU(3)_{C-f}\times U(1)_d}{\mathbb{Z}_3}$$

$(\xi_c,\xi_d)\in SU(3)\times U(1)_d$をとってくる。

$tr\left[P\exp\oint(\xi_c)d(\xi_c)^\dagger\right]$ はトポロジカルかつゲージ変換で不変な演算子

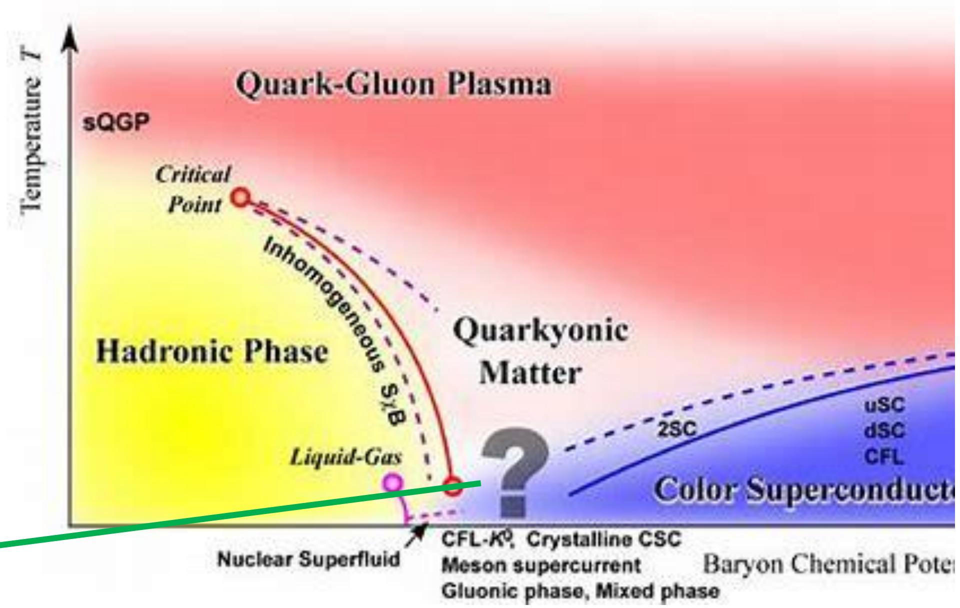
$\xi_c d\xi_c^\dagger$

$\exp\left[\frac{2}{3}i\pi\right]$を生成する

Y.Hirono and Y.Tanizaki Phys.Rev.Lett 122 212001 (2019)

まとめ

閉じ込め相とヒッグス相の間は
どうなっているのか??
境界は区別できるのか？



K. Fukushima and T.Hatsuda,
Rept.Prog.Phys.74,014001(2011)

閉じ込め相とヒッグス相は超流動になっている。（高次対称性が創発する）
ヒッグス相は超伝導にもなっている。（さらに高次対称性が創発する）
２つの相で創発する対称性が異なる。
創発した高次対称性が異なることは相転移を示唆する（要検証）