

ワイル半金属における動的カイラル磁気効果と不安定性

網谷達也

東京工業大学 理学院 物理学系

([TA](#) and Y. Nishida, arXiv:2207.14272)

Outline

1. Introduction
2. Dynamical chiral magnetic current
3. Chiral magnetic instability
4. Summary

Outline

1. Introduction

2. Dynamical chiral magnetic current

3. Chiral magnetic instability

4. Summary

Introduction

✓ カイラル輸送現象

- 質量ゼロのフェルミオン系で起きる輸送現象
- カイラルアノマリーと関連

✓ カイラル磁気効果(CME)¹

$$\underline{j = \frac{\mu_5}{2\pi^2} B}$$

Axial chemical potential

$$\mu_5 := (\mu_R - \mu_L)/2$$

✓ カイラル渦効果(CVE)²

$$\underline{j = \frac{\mu\mu_5}{\pi^2} \omega}$$

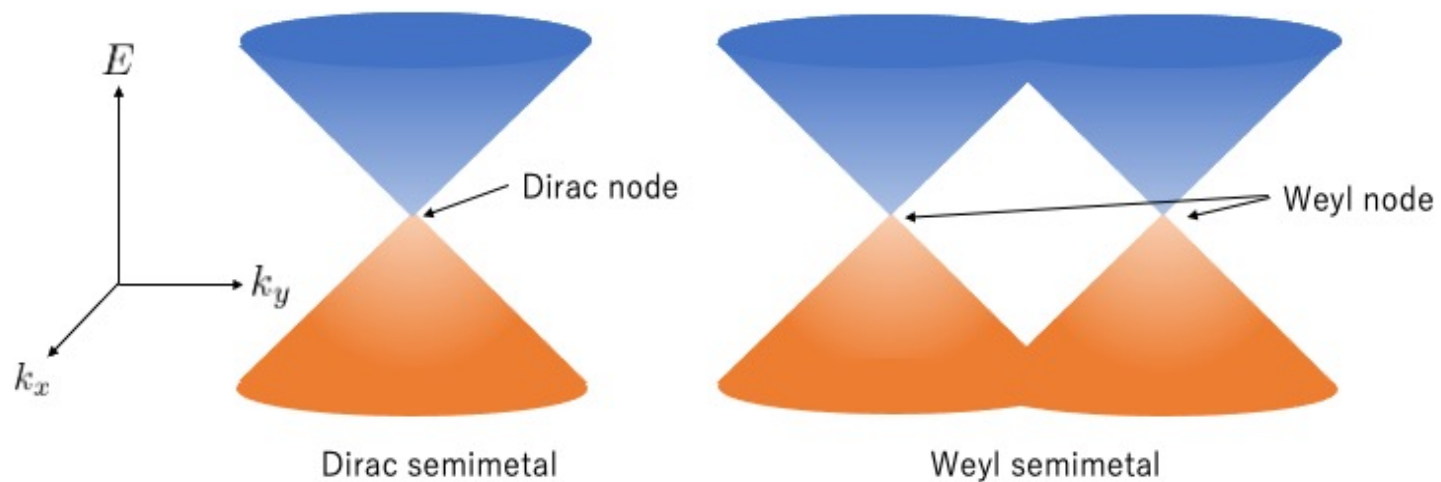
[1] K. Fukushima et al., PRD, 78, 074033 (2008)

[2] M. A. Stephanov and Y. Yin, PRL, 109, 162001 (2012)

Introduction

✓ カイラル磁気効果

- クォーク・グルーオンプラズマ
- Dirac/Weyl半金属(DSM/WSM)



Introduction

カイラル磁気電流は平衡状態で消える

✓ WSMでCMEを誘起する方法

- 電場を印加する³

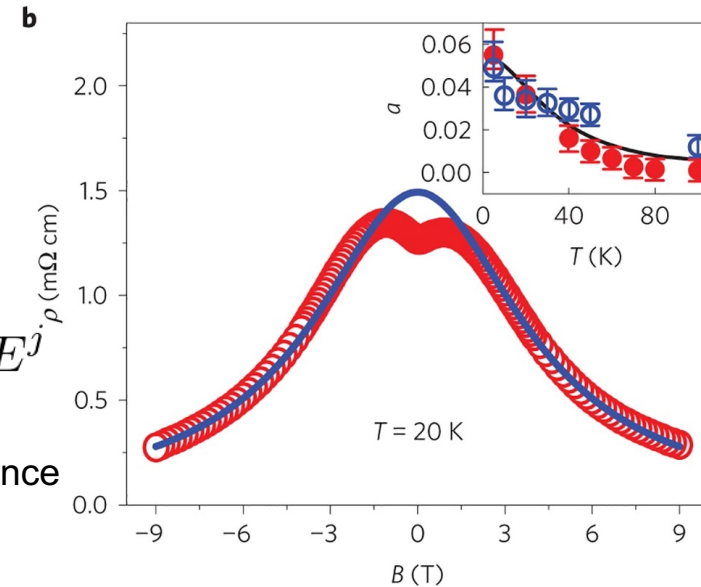
$$\delta\mu_5 \sim \frac{\tau}{\chi} C \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad \longrightarrow \quad j^i = \left(\sigma_{\text{ohm}} \delta^{ij} + \frac{\tau}{\chi} C^2 B^i B^j \right) E^j$$

Negative magnetoresistance

- WSMをねじる⁴

他の方法は?

➡ 時間依存する磁場でカイラル磁気効果を駆動する！



Cited from Ref. [5]

[3] D. T. Son and B. Z. Spivak, PRB 88, 104412 (2013)

[4] A. Cortijo, et al., PRB 94, 241405(R) (2016)

[5] Q. Li et al., Nature Physics 12, 550 (2016)

Introduction

本研究では、時間依存する磁場によって
駆動されるカイラル磁気効果について解析した

- ✓ 低エネルギー有効場の理論と運動論の2つの方法で、電磁場に対する線形応答を計算した
- ✓ Maxwell方程式に従う電磁場の元での集団励起について解析した

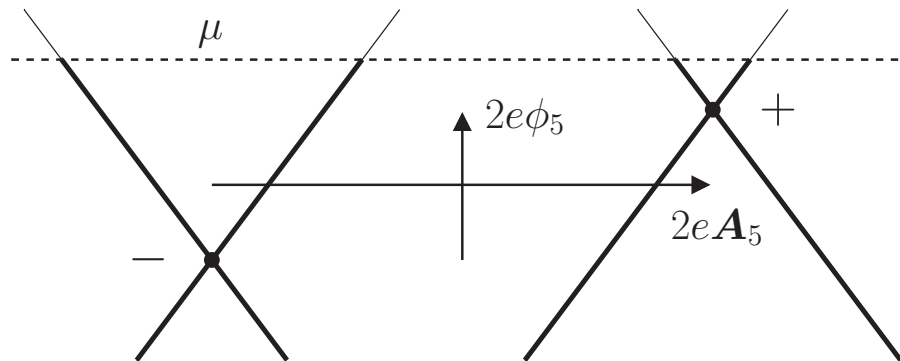
Outline

1. Introduction
- 2. Dynamical chiral magnetic current**
3. Chiral magnetic instability
4. Summary

Dynamical chiral magnetic current

✓ WSMの低エネルギー有効作用

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(x) [i\partial - eA_5\gamma^5 - eA(x)]\psi(x)$$



➡ $A_\mu(x)$ と $A_{5\mu}$ の1次の応答を調べる

✓ ダイアグラム

$$j^\mu = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}$$

Dynamical chiral magnetic current

✓ 正則化

$$j^\mu(k) = e^3 \Pi^{\mu\nu\lambda}(k) A_{5\lambda} A_\nu(k)$$

$$\Pi^{\mu\nu\lambda}(k) = T \sum_{p_0} \int_{\mathbf{p}} \text{tr} \left[\frac{1}{\not{p} + \not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma^5 \frac{1}{\not{p}} \gamma^\mu \right] + T \sum_{p_0} \int_{\mathbf{p}} \text{tr} \left[\frac{1}{\not{p}} \gamma^\lambda \gamma^5 \frac{1}{\not{p}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \gamma^\mu \right]$$

この積分は発散しているように見える

➡ Pauli-Villars正則化

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{reg}}^{\mu\nu\lambda}(k) &= T \sum_{p_0} \int_{\mathbf{p}} \text{tr} \left[\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\lambda \gamma^5 \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu \right]_{\text{reg}} \\ &+ T \sum_{p_0} \int_{\mathbf{p}} \text{tr} \left[\frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\lambda \gamma^5 \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \gamma^\mu \right]_{\text{reg}} \end{aligned}$$

$$\int [f(m)]_{\text{reg}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int [f(0) - f(m)]$$

Dynamical chiral magnetic current

✓ 結果

$$j^\mu(k) = -\frac{e^3 v}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\lambda\kappa\nu} A_{5\lambda} i k_\kappa A_\nu \quad \text{Chern-Simons current}$$

$$+ \frac{e^3}{2\pi^2} \int_0^\infty d\epsilon N'_+(\epsilon) f_\epsilon(\omega_+, |\mathbf{k}|) \delta_i^\mu \phi_5 B^i(k)$$

$$N_+(\epsilon) = n_T(\epsilon - \mu) + n_T(\epsilon + \mu)$$

$$f_\epsilon(\omega, k) = \frac{\omega^2 - (vk)^2}{4(vk)^2} \left[\frac{\omega}{vk} \ln \left(\frac{(\omega + vk)^2 [(\omega - vk)^2 - 4\epsilon^2]}{(\omega - vk)^2 [(\omega + vk)^2 - 4\epsilon^2]} \right) + \frac{2\epsilon}{vk} \ln \left(\frac{\omega^2 - (vk - 2\epsilon)^2}{\omega^2 - (vk + 2\epsilon)^2} \right) \right]$$

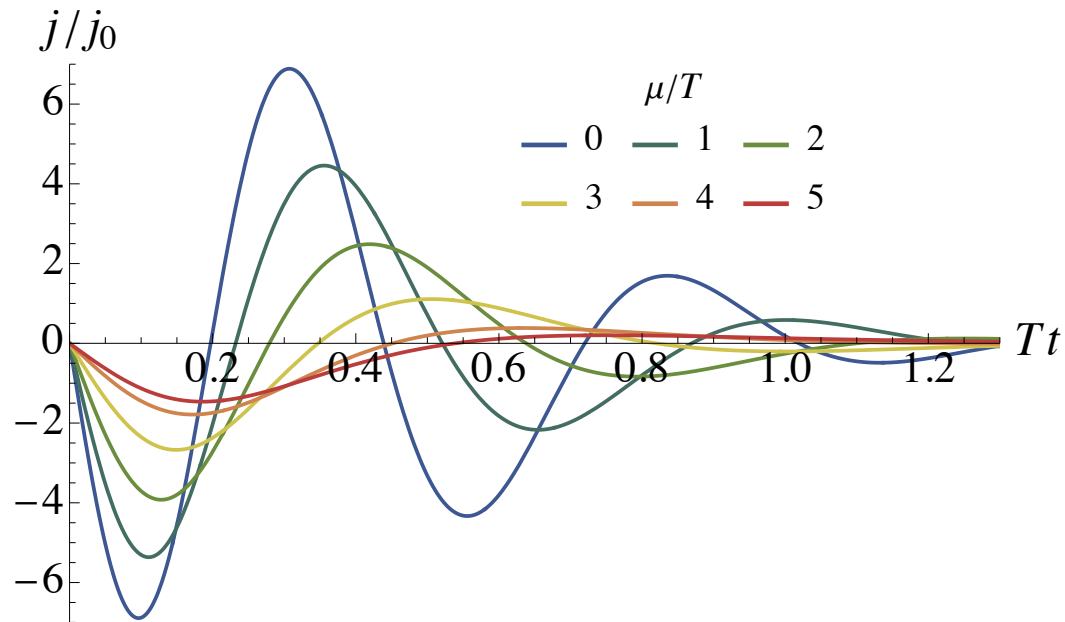
✓ 極限の順番

$$\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} f_\epsilon(\omega, k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}_{\text{static}} = -\frac{e^3}{2\pi^2} \mathbf{A}_5 \times \mathbf{E}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} f_\epsilon(\omega, k) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}_{\text{uniform}} = -\frac{e^3}{2\pi^2} \mathbf{A}_5 \times \mathbf{E} + \frac{e^3}{3\pi^2} \phi_5 \mathbf{B}$$

Dynamical chiral magnetic current

✓ パルス磁場 $B = b\delta(t)$



- 電流密度は振動する
- 積分値は T, μ に依存しない: $\int_{t>0} j(t) = -\frac{e^3 \phi_5 b}{6\pi^2}$

Outline

1. Introduction
2. Dynamical chiral magnetic current
- 3. Chiral magnetic instability**
4. Summary

Chiral magnetic instability

✓ カイラル運動論^{6,7}

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}(x)}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f_{\mathbf{p}}(x) + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}(x) = -\frac{\delta f_{\mathbf{p}}(x)}{\tau}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{p}}(x) + e\mathbf{E}_{\mathbf{p}}(x) \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}} + e[\mathbf{v}_{\mathbf{p}}(x) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}}]\mathbf{B}(x)}{1 + e\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}}}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e\mathbf{E}_{\mathbf{p}}(x) + e\mathbf{v}_{\mathbf{p}}(x) \times \mathbf{B}(x) + e^2[\mathbf{E}_{\mathbf{p}}(x) \cdot \mathbf{B}(x)]\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}}(x)}{1 + e\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}}}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}} = \pm \frac{\hat{\mathbf{p}}}{2p^2} : \text{Berry曲率}$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{p}} = \mathbf{E}(x) - \nabla \epsilon_{\mathbf{p}}(x) \quad \epsilon_{\mathbf{p}}(x) = v|\mathbf{p}|[1 - e\mathbf{B}(x) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}}]$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}(x) = \nabla_{\mathbf{p}} \epsilon(x)$$

[6] M. A. Stephanov and Y. Yin, PRL, 109, 162001 (2012)

[7] D. T. Son and N. Yamamoto, PRD, 87, 085016 (2013)

Chiral magnetic instability

✓ 電流密度

$$\mathbf{j}(x) = \underbrace{\delta\mathbf{j}(x)}_{\text{Chern-Simons current}} + \sum_{\chi} \sum_{p,a} e \int_{\mathbf{p}} [1 + e\mathbf{B}(x) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}}] \dot{\mathbf{r}}(x) f_{\mathbf{p}}(x)$$

$$+ e \nabla \times \int_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}(x) f_{\mathbf{p}}(x)$$

- 電荷保存のためにChern-Simons currentを手で足す⁸

$$\delta\mathbf{j}(x) = -\frac{e^3}{2\pi^2} \mathbf{A}_5 \times \mathbf{E}(x) + \frac{e^3}{2\pi^2} \phi_5 \mathbf{B}(x)$$

✓ 分布関数の計算

$$f_{\mathbf{p}}(x) = n_T(v|\mathbf{p}| \mp \mu_{\chi}) + \delta f_{\mathbf{p}}(x) \quad \delta f_{\mathbf{p}}(x) \sim \mathcal{O}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$$

➡
$$\delta f_{\mathbf{p}} = -iv \frac{eE_{\mathbf{p}}(k) \cdot \hat{\mathbf{p}}}{\omega_{\tau} - v\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}} n'_T(v|\mathbf{p}| - \mu_{\chi})$$

[8] E. V. Gorbar, et al., PRL, 118, 127601 (2017)

Chiral magnetic instability

✓ 結果

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}(k) = & -\frac{e^3}{2\pi^2} \mathbf{A}_5 \times \mathbf{E}(k) - \frac{e^3 \phi_5}{2\pi^2} g_1(\omega_\tau, |\mathbf{k}|) \frac{\omega_\tau + \omega}{2\omega_\tau} \mathbf{B}(k) \\
 & + \frac{3\epsilon_0 \Omega_e^2}{2} \left[g_1(\omega_\tau, |\mathbf{k}|) \frac{\mathbf{E}(k)}{i\omega_\tau} - g_3(\omega_\tau, |\mathbf{k}|) \frac{\hat{\mathbf{k}}[\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}(k)]}{i\omega_\tau} \right] \\
 & + \frac{e^2 v}{8\pi^2} \left[g_1(\omega_\tau, |\mathbf{k}|) + \frac{2}{3} \right] i\mathbf{k} \times \mathbf{B}(k)
 \end{aligned}$$

$$\Omega_e^2 = \frac{e^2(\pi^2 T^2/3 + \mu^2 + \mu_5^2)}{3\pi^2 \epsilon_0 v} \quad g_n(\omega, k) = \left[\frac{n\omega^2 - (vk)^2}{2(vk)^2} \ln \left(\frac{\omega + vk}{\omega - vk} \right) - \frac{n\omega}{vk} \right] \frac{\omega}{vk}$$

- 1行目は $T, \mu \sim \epsilon \gg |\omega|, v|\mathbf{k}|$ において

有効場の理論の結果と一致

$$j^\mu(k) = -\frac{e^3 v}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\lambda\kappa\nu} A_{5\lambda} i k_\kappa A_\nu + \frac{e^3}{2\pi^2} \int_0^\infty d\epsilon N'_+(\epsilon) f_\epsilon(\omega_+, |\mathbf{k}|) \delta_i^\mu \phi_5 B^i(k)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} f_\epsilon(\omega, k) = 1 + g_1(\omega, k)$$

Chiral magnetic instability

✓ Uniform limit

$$\lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \mathbf{j}(\mathbf{k}) = -\sigma_H \hat{\mathbf{A}}_5 \times \mathbf{E}(\omega) + \sigma_M \frac{1 - 2i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} \mathbf{B}(\omega) + \frac{\sigma_E}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}(\omega)$$

- ゼロ周波数極限で

$$\sigma_H = \frac{e^3 |\mathbf{A}_5|}{2\pi^2} \quad \sigma_M = \frac{e^3 \phi_5}{6\pi^2} \quad \sigma_E = \epsilon_0 \Omega_e^2 \tau$$

✓ Collective mode

- このCurrentとMaxwell方程式を組み合わせる

$$\nabla \times \mathbf{B}(x) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(x)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}(x)$$

➡ 平面波 $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}_{\omega, \mathbf{k}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ に対して特性方程式を解くことで集団励起の分散関係が得られる

Chiral magnetic instability

✓ Instability

- 低周波数・長波長極限 $\omega, v|\mathbf{k}| \ll 1/\tau \ll \mu, T$ において

$$\omega = \frac{\sigma_M \sigma_H k_{\parallel} \pm i \sigma_M \sqrt{\sigma_E^2 k_{\parallel}^2 + (\sigma_H^2 + \sigma_E^2) k_{\perp}^2}}{\sigma_H^2 + \sigma_E^2} + \mathcal{O}(k^2)$$

$$k_{\parallel} = \mathbf{k} \cdot \hat{A}_5 \quad k_{\perp}^2 = \mathbf{k}^2 - k_{\parallel}^2$$

- 正の虚部 $\text{Im}(\omega) > 0$ を持つ

➡ 指数関数的に成長するモードが存在する！

“Dynamical chiral magnetic instability”

- モードの伝搬方向はWeyl nodeのsplitの方向
- $\tau \rightarrow \infty$ でこの解は消える

Outline

1. Introduction
2. Dynamical chiral magnetic current
3. Chiral magnetic instability
- 4. Summary**

Summary

- ✓ 有効場の理論を用いて、時間依存する磁場によって駆動されるカイラル磁気電流の表式を求めた。
 - ➡ パルス磁場によって振動する電流密度が得られることを明らかにした。
- ✓ 運動論の立場からも同様の結果を得た。
 - ➡ 得られた解とMaxwell方程式を組み合わせることで、指数関数的に成長するモードが存在することを明らかにした。

- ✓ 今後の課題
 - Instabilityの運命
 - 緩和時間近似の改善^{9,10}

[9] D. Satow and H.-U. Yee, PRD, 90, 014027 (2014)

[10] M. A. Stephanov, et al. PRD, 91, 125014 (2015)