熱力学エントロピーによる有効場の理論への制限

Daiki Ueda (U. Tokyo)

熱場の量子論とその応用

August 24-26, 2020

Based on my on-going work

Idea

Idea

- **熱力学エントロピー：**系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量

Idea

- **熱力学エントロピー：**系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量

A	B
(軽い粒子)⊗(重い粒子)	(軽い粒子)⊗(重い粒子なし)
E, V, N	E, V, N

Idea

- **熱力学エントロピー：**系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量

A

(軽い粒子)$\otimes$(重い粒子)

E, V, N

B

(軽い粒子)$\otimes$(重い粒子なし)

E, V, N

Idea

- **熱力学エントロピー：**系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量

A

(軽い粒子)⊗(重い粒子)

$\underline{E, V, N}$

B

(軽い粒子)⊗(重い粒子なし)

$\underline{E, V, N}$

同じ熱力学的状態

Idea

・**熱力学エントロピー：**系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量 $\overset{\text{期待}}{\Rightarrow}$ $S(A) - S(B) \geq 0$

A	B
(軽い粒子)⊗(重い粒子)	**(軽い粒子)⊗(重い粒子なし)**
E, V, N	E, V, N

Idea

- **熱力学エントロピー** : 系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量　⇒　$S(A) - S(B) \geq 0$

A

(軽い粒子) $\otimes$ **(重い粒子)**

E, V, N

B

(軽い粒子) $\otimes$ **(重い粒子なし)**

E, V, N

- 低エネルギー領域での**重い粒子**の効果**: 有効理論**における**高次の演算子**

Idea

- **熱力学エントロピー :** 系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量 ⇒ $S(A) - S(B) \geq 0$

A	B
(軽い粒子)⊗(重い粒子)	**(軽い粒子)⊗(重い粒子なし)**
E, V, N	E, V, N

- 低エネルギー領域での**重い粒子**の効果**: 有効理論**における**高次の演算子** ⇒ $S(A) - S(B) \propto$ **(高次の演算子の係数)**

Idea

- **熱力学エントロピー：**系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量　$\Rightarrow$ $S(A) - S(B) \geq 0$

A	B
(軽い粒子)⊗(重い粒子)	**(軽い粒子)⊗(重い粒子なし)**
E, V, N	E, V, N

- 低エネルギー領域での**重い粒子**の効果: **有効理論**における**高次の演算子**　$\Rightarrow$ $S(A) - S(B) \propto$ **(高次の演算子の係数)**

$$\boxed{S(A) - S(B) \propto \text{(高次の演算子の係数)} \geq 0}$$

Idea

- **熱力学エントロピー :** 系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量　$\Rightarrow$　$S(A) - S(B) \geq 0$

A	B
(軽い粒子) $\otimes$ **(重い粒子)**	**(軽い粒子)** $\otimes$ **(重い粒子なし)**
E, V, N	E, V, N

- 低エネルギー領域での**重い粒子**の効果: **有効理論**における**高次の演算子**　$\Rightarrow$　$S(A) - S(B) \propto$ **(高次の演算子の係数)**

$$\boxed{S(A) - S(B) \propto \text{(高次の演算子の係数)} \geq 0}$$

$\Rightarrow$ **UVの理論から生成された高次の演算子の係数は任意の値を取れない**

ポスターの内容

- **熱力学エントロピー**：系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量 $\Rightarrow$ $\boxed{S(A) - S(B) \geq 0}$

A	B
(軽い粒子)$\otimes$(重い粒子)	(軽い粒子)$\otimes$(重い粒子なし)
E, V, N	E, V, N

- 低エネルギー領域での**重い粒子**の効果: **有効理論**における**高次の演算子** $\Rightarrow$ $S(A) - S(B) \propto$ (**高次の演算子の係数**)

$$\boxed{S(A) - S(B) \propto \text{(高次の演算子の係数)} \geq 0}$$

$\Rightarrow$ **UVの理論から生成された高次の演算子の係数は任意の値を取れない**

e.g. Single massless theory dimension-8 term, Euler-Heisenberg model, dimension-6 four-fermion theory

Contents

- Introduction
- Entropy constraint
- Entropy constraint in effective field theory

Introduction

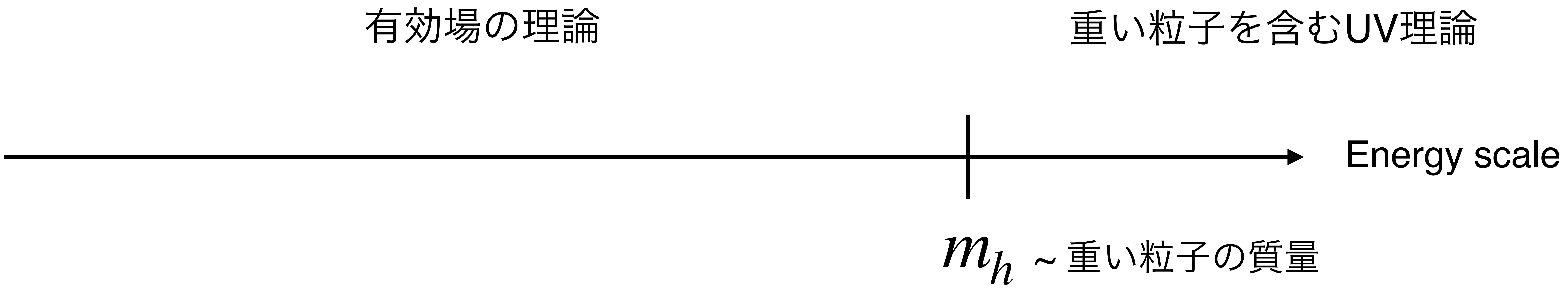
- Higgs粒子の発見後、新しい素粒子はLHC実験で見つかってない
- 新粒子の質量は電弱対称性の破れのスケールより遥かに大きいかもしれない
- 新粒子はon-shell stateではなく、量子補正の効果として間接的に見えてくるかも

  EDM, Muon g-2, Flavor physics, …

$\Rightarrow$ **有効場の理論**は**重い粒子**の間接測定において重要な道具

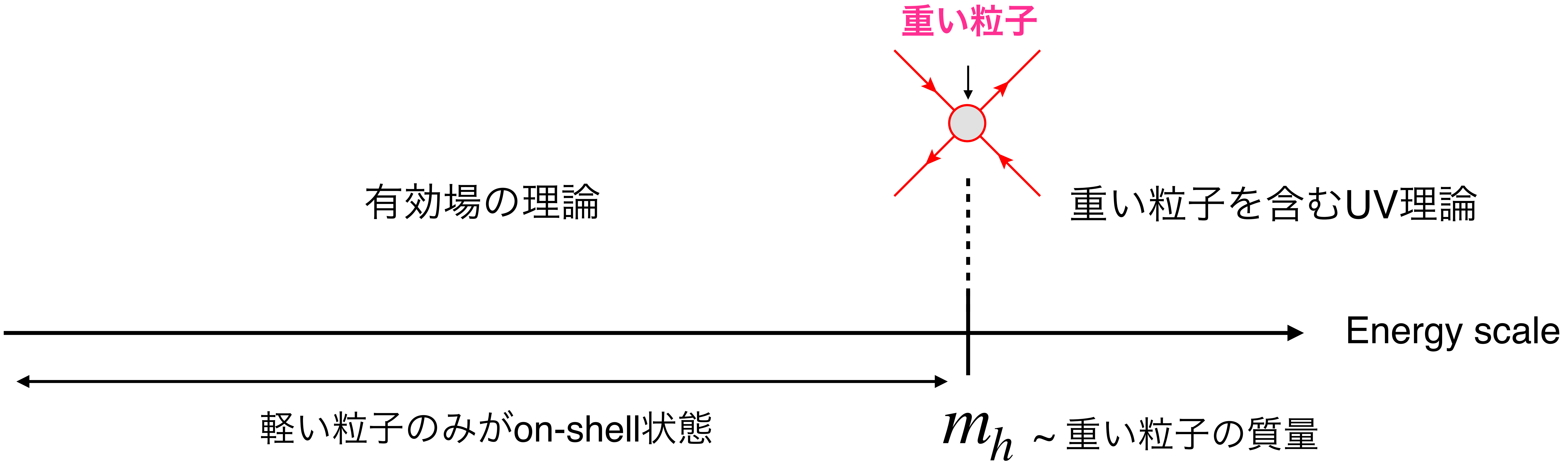
重い粒子の寄与

◆ 低エネルギーにおいて、重い粒子は積分され、有効場の理論で現象が記述できる



重い粒子の寄与

- 低エネルギーにおいて、重い粒子は積分され、有効場の理論に情報が移る



$$\mathscr{L}_{\rm eff} = \mathscr{L}_{d\leq 4} + \sum_i c_i O_i^{d>4}$$

Contents

Entropy

- **熱力学エントロピー：**系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量

Entropy

- **熱力学エントロピー :** 系に含まれる**自由度の数**を特徴付ける量

H_{UV} **(軽い粒子)⊗(重い粒子)**

$$\boxed{\begin{aligned}\rho &= e^{-\beta H_{\mathrm{UV}}}/Z_\beta \\ Z_\beta &= \mathrm{Tr}[e^{-\beta H_{\mathrm{UV}}}]\end{aligned}}$$

⬌

$\tilde{H} = PH_{\mathrm{UV}}P$ **(軽い粒子)⊗(重い粒子なし)**

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\rho} &= Pe^{-\tilde{\beta}\tilde{H}}/\tilde{Z}_{\tilde{\beta}} \\ \tilde{Z}_{\tilde{\beta}} &= \mathrm{Tr}[Pe^{-\tilde{\beta}\tilde{H}}]\end{aligned}}$$

$$E = \mathrm{Tr}[\rho H_{\mathrm{UV}}] = \mathrm{Tr}[\tilde{\rho}\tilde{H}]$$

- **重い粒子のある世界の方がエントロピーが大きい :** $S(\rho) \geq S(\tilde{\rho})$

エントロピーが大きくなることの証明

- **相対エントロピーの非負性:**

$$S(\tilde{\rho}||\rho) \equiv \mathrm{Tr}[\tilde{\rho}\ln\tilde{\rho}] - \mathrm{Tr}[\tilde{\rho}\ln\rho]$$

$$= -\tilde{\beta}\mathrm{Tr}[\tilde{\rho}\tilde{H}] + \beta\mathrm{Tr}[\tilde{\rho}H_{\mathrm{UV}}] - \ln\tilde{Z}_{\tilde{\beta}} + \ln Z \quad \longleftarrow \quad \tilde{\rho} = Pe^{-\tilde{\beta}\tilde{H}}/\tilde{Z}_{\tilde{\beta}}, \quad \rho = e^{-\beta H_{\mathrm{UV}}}/Z$$

$$= -\tilde{\beta}\mathrm{Tr}[\tilde{\rho}\tilde{H}] + \beta\mathrm{Tr}[\tilde{\rho}\tilde{H}] - \ln\tilde{Z}_{\tilde{\beta}} + \ln Z \quad \longleftarrow \quad \mathrm{Tr}[\tilde{\rho}H_{\mathrm{UV}}] = \mathrm{Tr}[\tilde{\rho}P_l H_{\mathrm{UV}} P_l] = \mathrm{Tr}[\tilde{\rho}\tilde{H}]$$

$$= E(\beta - \tilde{\beta}) + \ln Z - \ln\tilde{Z}_{\tilde{\beta}} \quad \longleftarrow \quad E = \mathrm{Tr}[\tilde{\rho}\tilde{H}]$$

$$= S(\rho) - S(\tilde{\rho}) \quad \longleftarrow \quad S(\rho) = E\beta + \ln Z, \quad S(\tilde{\rho}) = E\tilde{\beta} + \ln\tilde{Z}_{\tilde{\beta}}$$

$$\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S = S(\rho) - S(\tilde{\rho}) \geq 0$$

分配関数に成り立つ不等式

- **正のエントロピーシフト:**

$$\Delta S = S(\rho) - S(\tilde{\rho})$$

$$= E(\beta - \tilde{\beta}) + \ln Z - \ln \tilde{Z}_{\tilde{\beta}} \quad \longleftarrow \quad S(\rho) = E\beta + \ln Z, \;\; S(\tilde{\rho}) = E\tilde{\beta} + \ln \tilde{Z}_{\tilde{\beta}}$$

$$= E(\beta - \tilde{\beta}) + \ln Z - \ln \tilde{Z}_{\beta} + (\beta - \tilde{\beta})\frac{\partial \ln \tilde{Z}_{\tilde{\beta}}}{\partial \tilde{\beta}} \quad \longleftarrow \quad \ln \tilde{Z}_{\tilde{\beta}} = \ln \tilde{Z}_{\beta} - (\beta - \tilde{\beta})\frac{\partial \ln \tilde{Z}_{\tilde{\beta}}}{\partial \tilde{\beta}}$$

$$= \ln Z - \ln \tilde{Z}_{\beta} \quad \longleftarrow \quad E = -\frac{\partial \ln \tilde{Z}_{\tilde{\beta}}}{\partial \tilde{\beta}}$$: Thermodynamic relation

$$\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln Z - \ln \tilde{Z}_{\beta} \geq 0$$

場の理論における理解の準備

- **系のハミルトニアン：** $H_{\mathrm{UV}} = H_l + H_h + H_{l+h}$

$$H_l = \sum_{N_l, M_l = 0}^{\infty} \int_{|q|<\Lambda_{\mathrm{UV}}} dq'_1 \cdots dq'_{N_l} dq_1 \cdots dq_{M_l} \times a_l^\dagger(q'_1) \cdots a_l^\dagger(q'_{N_l}) a_l(q_{M_l}) \cdots a_l(q_1) C^l_{N_l M_l}(q'_1, \cdots, q'_{N_l}, q_1, \cdots, q_{M_l})$$

$$H_h = \sum_{N_h, M_h = 1}^{\infty} \int_{|p|<\Lambda_{\mathrm{UV}}} dp'_1 \cdots dp'_{N_h} dp_1 \cdots dp_{M_h} \times a_h^\dagger(p'_1) \cdots a_h^\dagger(p'_{N_h}) a_h(p_{M_h}) \cdots a_h(p_1) C^h_{N_h M_h}(p'_1, \cdots, p'_{N_h}, p_1, \cdots, p_{M_h})$$

$$H_{l+h} = \sum_{N_l, N_h, M_l, M_h = 1}^{\infty} \int_{|q|,|p|<\Lambda_{\mathrm{UV}}} dp'_1 \cdots dp'_{N_h} dq'_1 \cdots dq'_{N_l} dp_1 \cdots dp_{M_h} dq_1 \cdots dq_{M_l}$$
$$\times a_h^\dagger(p'_1) \cdots a_h^\dagger(p'_{N_h}) a_l^\dagger(q'_1) \cdots a_l^\dagger(q'_{N_l}) a_h(p_{M_h}) \cdots a_h(p_1) a_l(q_{M_l}) \cdots a_l(q_1) C^h_{N_h M_h}(p'_1, \cdots, p'_{N_h}, p_1, \cdots, p_{M_h})$$

- **射影演算子：** $P = \hat{1}_{P_l < \Lambda_{\mathrm{UV}}} \otimes |0\rangle\langle 0|_h \quad \Rightarrow \quad \tilde{H} = P H_{\mathrm{UV}} P = H_l$

- **密度演算子：** $\rho = \dfrac{e^{-\beta H_{\mathrm{UV}}}}{Z_{\mathrm{UV}}} \quad \xRightarrow[m_h = \Lambda_{\mathrm{UV}} \to \infty]{} \quad P \dfrac{e^{-\beta H_l}}{\tilde{Z}_\beta} = P \dfrac{e^{-\beta \tilde{H}}}{\tilde{Z}_\beta}$

場の理論における正のエントロピーシフトの理解

・分配関数： $Z_{\rm UV} = {\rm Tr}[e^{-\beta\, H_{\rm UV}}] = \int d[\phi_l]d[\phi_h]e^{-I_{\rm UV}[\phi_l,\phi_h]} = \int d[\eta_l]d[\eta_h]e^{-I_{\rm UV}[\phi_l^0+\eta_l,\phi_h^0+\eta_h]}$ ⟵ 古典解まわりで展開

$$= \int d[\eta_l]e^{-I_{\rm eff}[\eta_l;\phi_l^0,\phi_h^0]} \quad \longleftrightarrow \quad I_{\rm eff}[\eta_l;\phi_l^0,\phi_h^0] = I_{\rm UV}[\phi_l^0+\eta_l,\phi_h^0] + \Delta I[\phi_l^0+\eta_l,\phi_h^0]$$

繰り込み可能項　　高次演算子 $\sim \mathcal{O}(\hbar)$

$$\simeq e^{-\Delta I[\phi_l^0,\phi_h^0]}\int d[\eta_l]e^{-I_{\rm UV}[\phi_l^0+\eta_l,\phi_h^0]} \quad \longleftrightarrow \quad \Delta I[\phi_l^0+\eta_l,\phi_h^0] \simeq \Delta I[\phi_l^0,\phi_h^0]$$

(1-loop level)　$\eta_l \sim \sqrt{\hbar}$

$$\simeq e^{-\Delta I[\phi_l^0,\phi_h^0]}\,\tilde{Z}_\beta \quad \longleftrightarrow \quad \lim_{m_h\to\infty} Z_{\rm UV} = \tilde{Z}_\beta = {\rm Tr}[Pe^{-\beta\tilde{H}}], \quad \lim_{m_h\to\infty} \Delta I = 0$$

$$\ln Z_{\rm UV} - \ln \tilde{Z}_\beta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta I[\phi_l^0,\phi_h^0] \leq 0$$

Contents

Entropy boundの応用例 (1)

e.g. $\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{c}{M^4}(\partial\phi)^4$: Massless scalar with shift symmetry

Euclidean path integral : $I_{\text{eff}}[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{c}{M^4}(\partial\phi)^4\right]$

$$\Rightarrow \quad \Delta I[\phi_{\text{cl}}] = -\frac{c}{M^4}\int d^4x \left[(\partial\phi_{\text{cl}})^4\right] \leq 0$$

$\Rightarrow \quad c \geq 0$: Entropy constraint

analyticity & unitarity of forward amplitudeから得られる制限と一致

[Adams, Arkani-Hamed, Dubovsky, Nicolas, Rattazzi '06]

Entropy boundの応用 (2)

e.g. $$\mathscr{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi + \frac{a_i}{M^2}(\bar{\psi}\Gamma_i \psi)^2$$: Dimension-six four-fermion theory

$$\Gamma_1 = 1;\ \Gamma_2 = \gamma^\mu;\ \Gamma_3 = i\gamma_5;\ \Gamma_4 = \gamma^\mu\gamma_5;\ \Gamma_5 = \sigma^{\mu\nu}$$

Euclidean path integral : $$I_{\mathrm{eff}}[\psi] = \int d^4x \left[\bar{\psi}(-i\gamma_\mu \partial + m)\psi - \frac{a_i}{M^2}(\bar{\psi}\Gamma_i \psi)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta I[\psi_{\mathrm{cl}}] = -\frac{a_i}{M^2}\int d^4x \left[\bar{\psi}_{\mathrm{cl}}\Gamma_i \psi_{\mathrm{cl}}\right]^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad a_i \geq 0$$: Entropy constraint

analyticity & unitarity of S matrixから得られる制限と一致

[Adams, Jenkins, O'Connell '08]

Entropy boundの応用 (3)

e.g. $$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \alpha_2\frac{e^2}{5!\pi^2 m_h^2}\partial^\mu F_{\mu\nu}\partial_\rho F^{\rho\nu} + \alpha_4\frac{e^2}{6!\pi^2 m_h^4}\partial^\mu F_{\mu\nu}\Box\partial_\rho F^{\rho\nu}$$
$$+\gamma_{4,1}\frac{e^4}{6!\pi^2 m_h^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \gamma_{4,2}\frac{e^4}{6!\pi^2 m_h^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) + \mathcal{O}(m_h^{-6})$$: Euler-Heisenberg Lagrangian

$$\Rightarrow \quad I_{\rm eff}[A] = \int d^4x \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \alpha_2\frac{e^2}{5!\pi^2 m_h^2}\partial^\mu F_{\mu\nu}\partial_\rho F^{\rho\nu} - \alpha_4\frac{e^2}{6!\pi^2 m_h^4}\partial^\mu F_{\mu\nu}\Box\partial_\rho F^{\rho\nu} - \gamma_{4,1}\frac{e^4}{6!\pi^2 m_h^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 - \gamma_{4,2}\frac{e^4}{6!\pi^2 m_h^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta I_{\rm eff}[A] = -\int d^4x \left[\alpha_2\frac{e^2}{5!\pi^2 m_h^2}\partial^\mu F_{\mu\nu}\partial_\rho F^{\rho\nu} + \alpha_4\frac{e^2}{6!\pi^2 m_h^4}\partial^\mu F_{\mu\nu}\Box\partial_\rho F^{\rho\nu} + \gamma_{4,1}\frac{e^4}{6!\pi^2 m_h^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \gamma_{4,2}\frac{e^4}{6!\pi^2 m_h^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{4,1} \geq 0,\ \gamma_{4,2} \geq 0 \qquad A_{{\rm cl},\mu} = \epsilon_{1,\mu}w_1 + \epsilon_{2,\mu}w_2,\ \partial_\mu w_1 = l_\mu,\ \partial_\mu w_2 = k_\mu$$

analyticity & unitarity of forward amplitudeから得られる制限と一致

[Remmen, Rodd '19]

UV theoryの例

e.g.　Euler-Heisenberg Lagrangian generated by heavy particles

$$I_{\mathrm{UV}}[A,\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathscr{L}\right] \qquad \mathscr{L} = (D_\mu\phi)^2 + m^2\phi^2,\ \ \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi,\ \ \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}U^\mu U_\mu$$

Quantum correction at one-loop level : $\Delta I[A] = -\int d^4x \left[\gamma_{4,1}\frac{e^4}{6!\pi^2 m^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \gamma_{4,2}\frac{e^4}{6!\pi^2 m^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2\right] \leq 0$

$$\gamma_{4,1} = \frac{7}{32}Q^4,\ \frac{1}{2}Q^4,\ \frac{261}{32}Q^4, \quad \gamma_{4,2} = \frac{1}{32}Q^4,\ \frac{7}{8}Q^4,\ \frac{243}{32}Q^4$$

: Scalar, Fermion, Vector

[Heisenberg, Euler '36] [Quevillon, Smith, Touati '19]

Entropy boundと一致

Summary

- 低エネルギー領域において、重い粒子の効果は有効場の理論の高次演算子で記述される.
- 相対エントロピーの非負性から、重い粒子の効果でエントロピーが増加することを示した.
- エントロピー不等式によって、UV理論から生成された有効理論の高次の演算子は任意の数を取れないことをしめした.