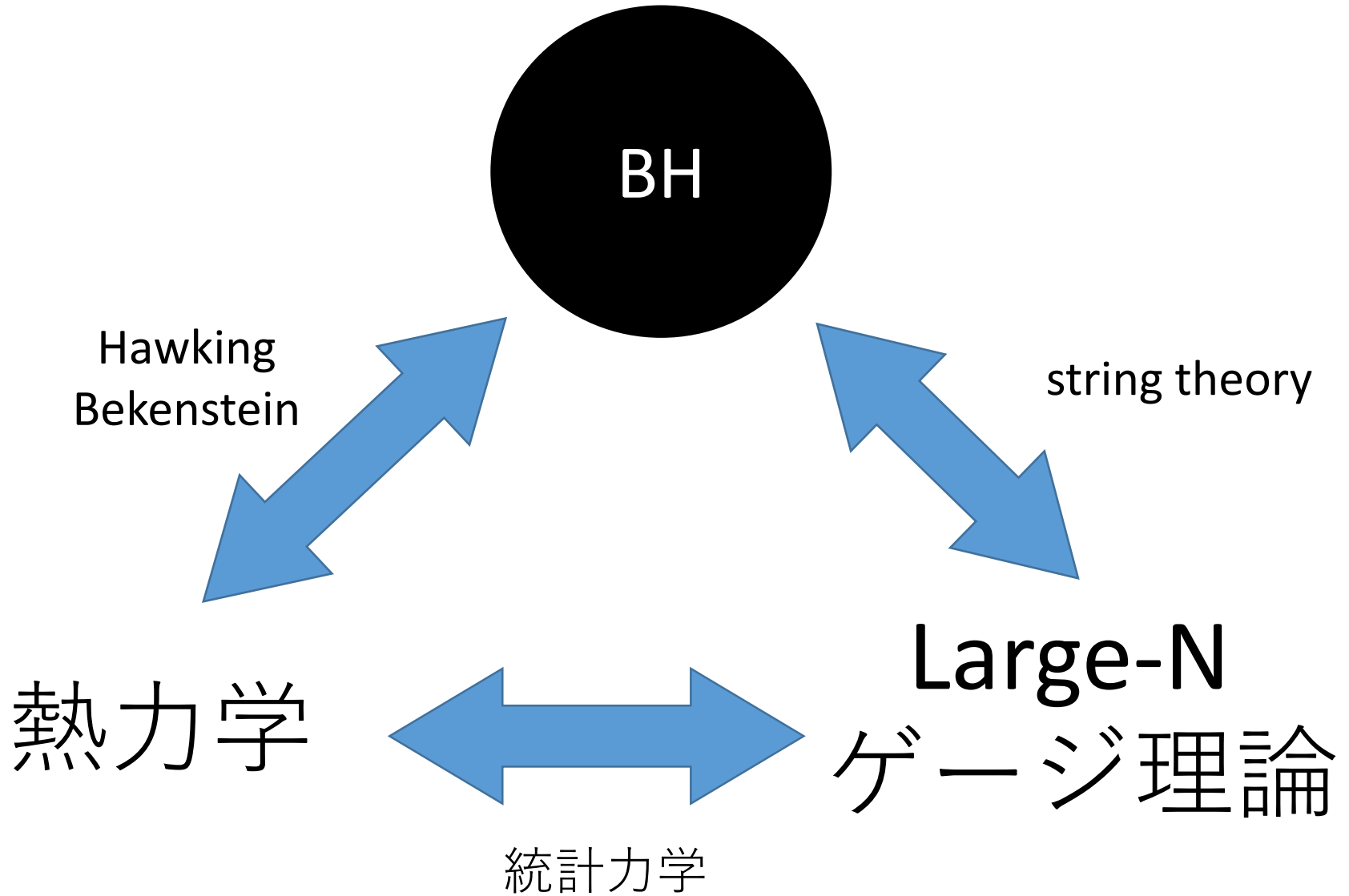


ラージN行列量子力学に おける負の比熱状態

静岡大学 森田 健

参考文献 *Phys.Rev.D* 101 (2020) 10, 106010 with Hiroki Yoshida (静岡大)

Introduction



Introduction

シュワルツシルトBH



$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G_N M}$$

M 大でT小 → 比熱負

• 熱力学(通常の系): 比熱正

• Large-N ゲージ理論: ??

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

- 1dim Eguchi-Kawai
- Bosonic BFSS
- 2dim SYM at small circle

Large-N行列量子力学では自然と負の比熱が出ることを紹介する。

(しかもある程度解析的に示せる。)

○ 模型の説明

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

- 1dim Eguchi-Kawai
- Bosonic BFSS
- 2dim SYM at small circle

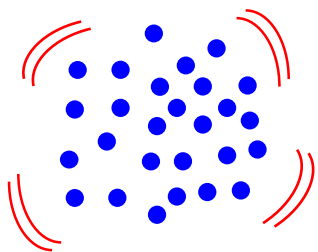
$$U(N) \text{行列} \begin{cases} X_{ij}^I : I = 1, \dots, D, i, j = 1, \dots, N \\ D_t X = \partial_t X - [A_t, X] \end{cases}$$

○ 模型の特徴

- D+1次元 pure YM $\rightarrow$ 1次元への dimensional reduction / large-N reduction

$$S = \frac{N}{4\lambda} \int_0^\beta dt \int d^D x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2. \quad A^I(x) \rightarrow X^I$$

- Effective theory of D-branes:
Bosonic part of N D0-branes, N D1-branes on a small circle,
Non-supersymmetric D-branes, etc.



• : D0-brane

- N個のD-braneがD次元空間にいる。
- X^I の対角成分が、それぞれD-braneの位置。
- たくさん集まるとBHっぽい。

1.なぜ通常、比熱は正?

2.行列量子力学における負の比熱

3.結論と展望

1.なぜ通常、比熱は正?

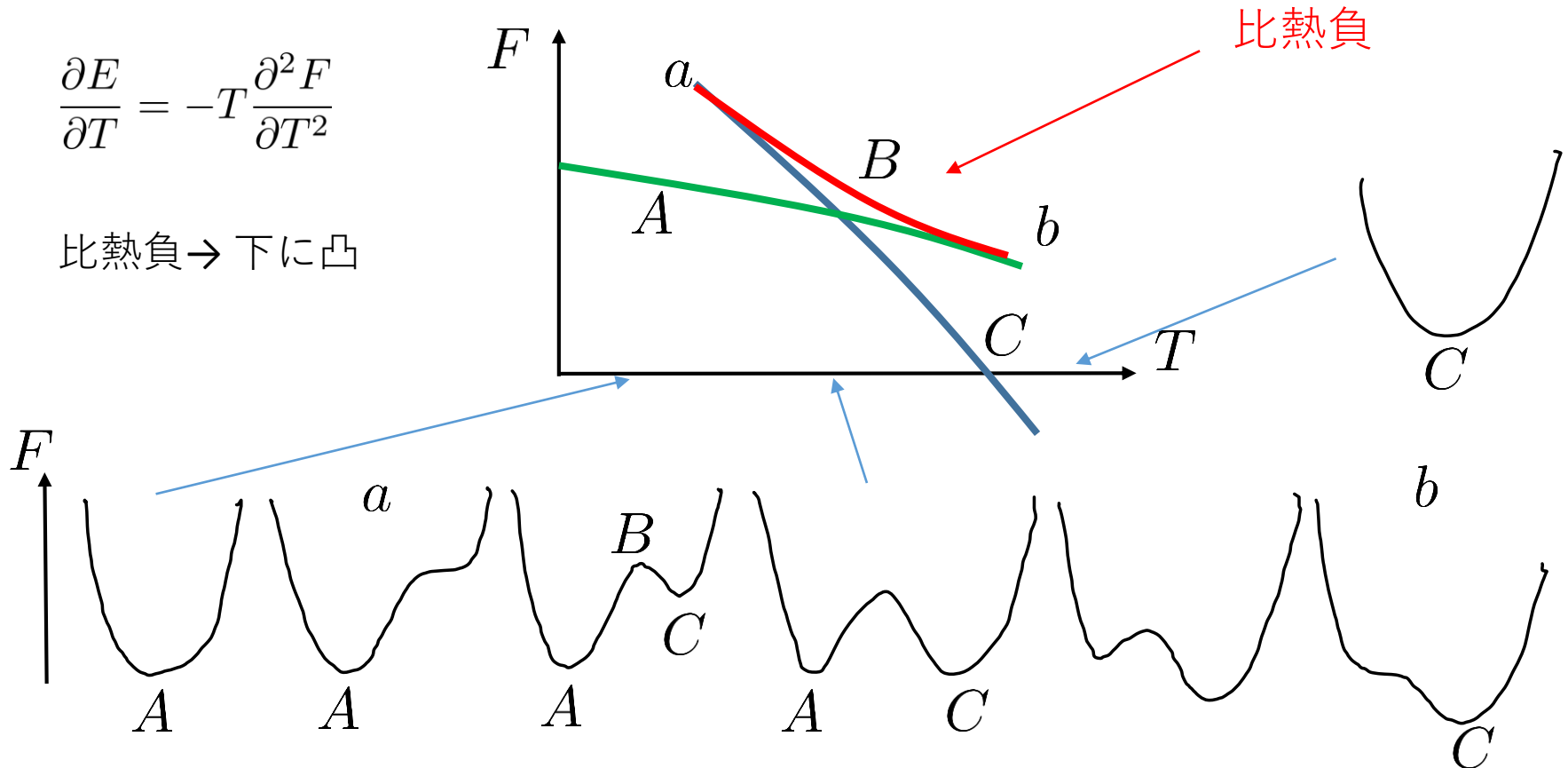
温度 ∼1自由度辺りのエネルギー → **T 大** で系の**E**も大

比熱が負になりそうでならないケース: 一次相転移

○ カノニカルアンサンブル

$$\frac{\partial E}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

比熱負 → 下に凸

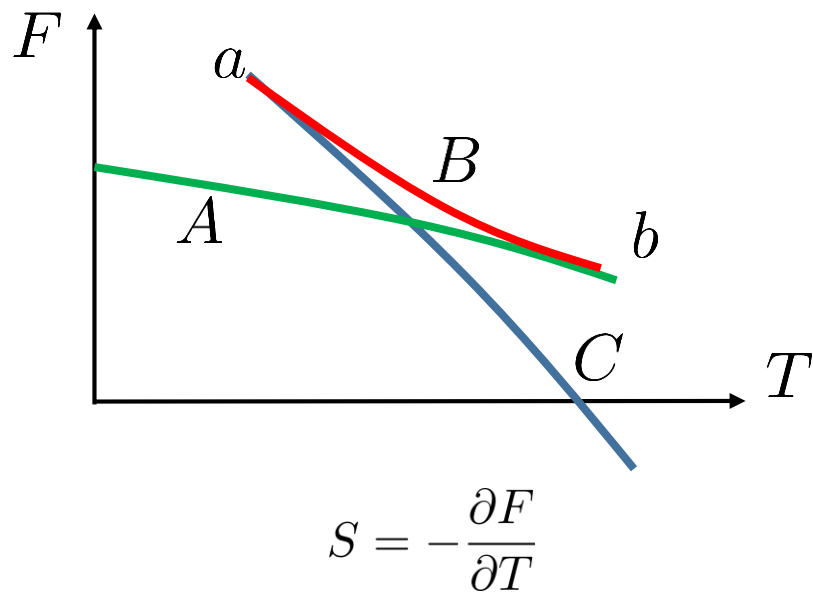


1. なぜ通常、比熱は正?

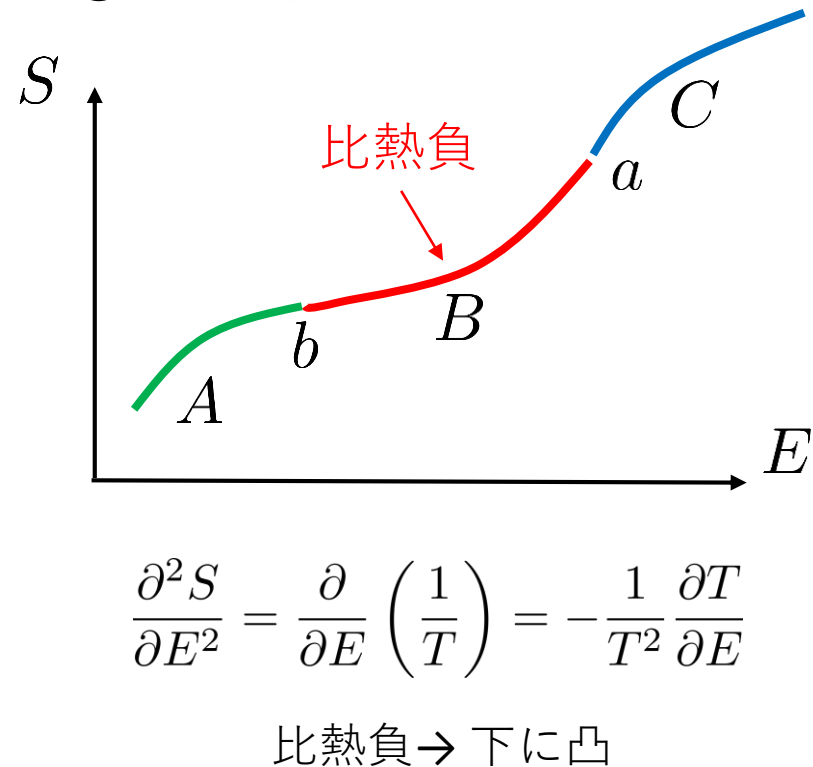
温度 $\sim$ 1自由度辺りのエネルギー $\rightarrow$ **T 大** で系の**Eも大**

比熱が負になりそうでならないケース: 一次相転移

○ カノニカルアンサンブル



○ マイクロカノニカル



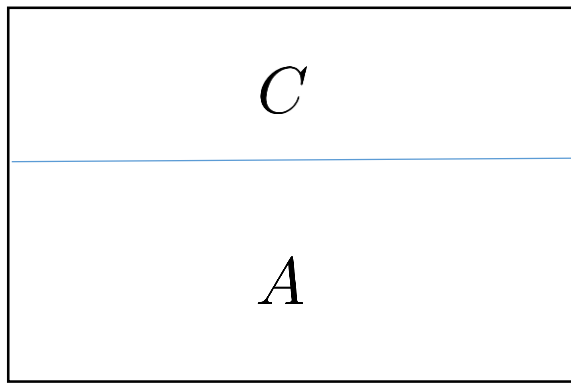
比熱負 $\rightarrow$ 下に凸

比熱負の状態が出現する??

1. なぜ通常、比熱は正?

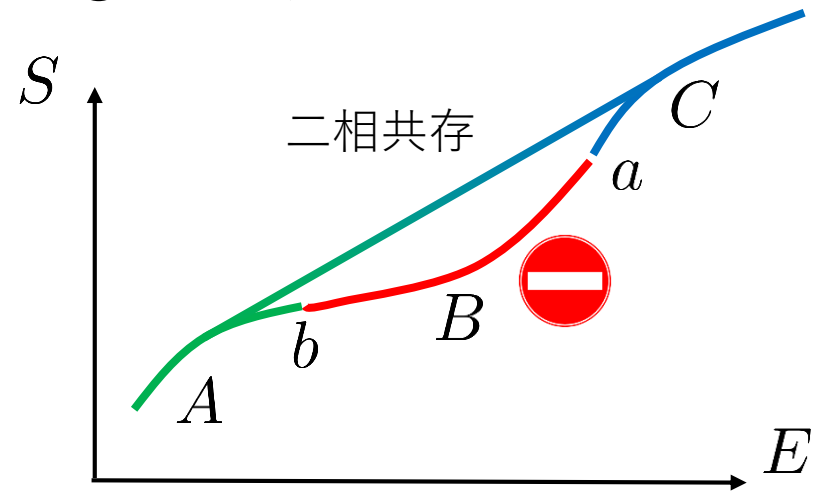
温度 $\sim$ 1自由度辺りのエネルギー $\rightarrow$ **T大で系のE也大**

比熱が負になりそうでならないケース: 一次相転移



二相共存状態が実現し、
比熱が負の状態は実現しない。

○ マイクロカノニカル



$$\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} = \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial E}$$

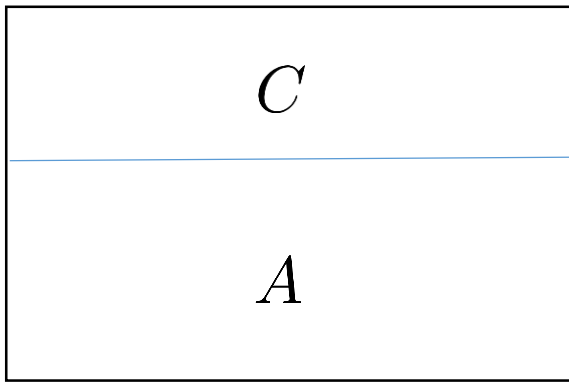
比熱負 $\rightarrow$ 下に凸

比熱負の状態が出現する??

1. なぜ通常、比熱は正?

温度 $\sim$ 1自由度辺りのエネルギー $\rightarrow$ T 大 で系のE也大

比熱が負になりそうでならないケース: 一次相転移



二相共存状態が実現し、
比熱が負の状態は実現しない。

負の比熱状態のヒント

二相共存状態が実現しないような系では
比熱が負になり得る。

例) 長距離力が存在する場合。

$$E_A + E_C \neq E$$

典型例: 重力 (Jeans instability)

2. 行列量子力学における負の比熱

○ 相構造

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{ij}^I : I = 1, \dots, D, \ i, j = 1, \dots, N \quad U(N) \\ D_t X = \partial_t X - [A_t, X] \end{array} \right.$$

X^I を積分できたとする。

$$A_t \text{ の有効理論 } \left\{ \begin{array}{l} \text{ゲージ固定 } (A_t)_{ij} = \alpha_i \delta_{ij} \quad \alpha_i : \text{時間によらない} \\ u_1 = \frac{1}{N} \text{Tr} P \left(\exp \left[i \int_0^\beta A_t dt \right] \right) : \text{Polyakov loop} \end{array} \right.$$

$$S_{eff}/\beta N^2 = f_0 + a(T)|u_1|^2 + b(T)|u_1|^4 + c(T)|u_1|^6 + \dots$$

→ この有効理論を調べれば、模型の相構造がわかる。

Aharony, Marsano, Minwalla, Papadodimas, Raamsdonk (2003)

Alvarez-Gaume, Gomez, Liu, Wadia (2005)

○ 相構造

Aharony, Marsano, Minwalla, Papadodimas, Raamsdonk (2003)

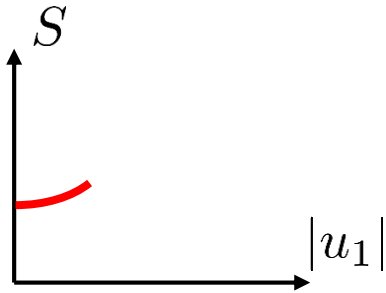
Alvarez-Gaume, Gomez, Liu, Wadia (2005)

$$S_{eff}/\beta N^2 = f_0 + a(T)|u_1|^2 + b(T)|u_1|^4 + c(T)|u_1|^6 + \dots$$

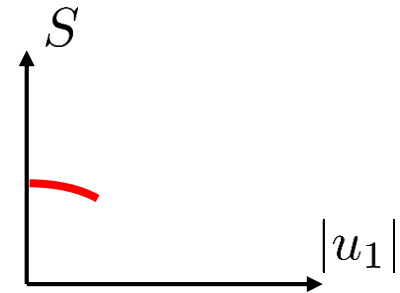
→ Large-N 相転移を起こしそう

$$u_1 = \frac{1}{N} \text{Tr} P \left(\exp \left[i \int_0^\beta A_t dt \right] \right)$$

$a(T) > 0 : \rightarrow u_1 = 0$ 閉じ込め



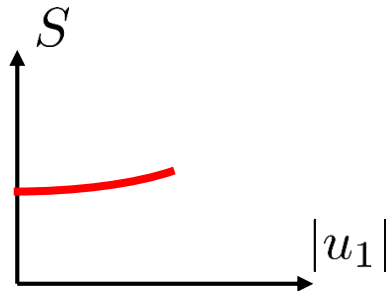
$a(T) < 0 : \rightarrow u_1 \neq 0$ 非閉じ込め



臨界温度: T_c

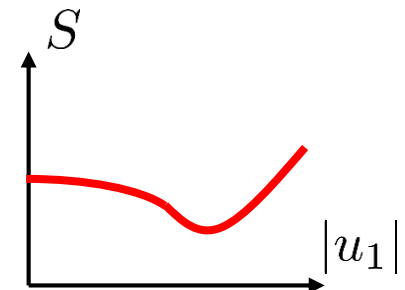
$$a(T_c) = 0, b(T_c) > 0$$

2次相転移



$$a(T_c) = 0, b(T_c) < 0$$

1次相転移



○ 相構造

Aharony, Marsano, Minwalla, Papadodimas, Raamsdonk (2003)

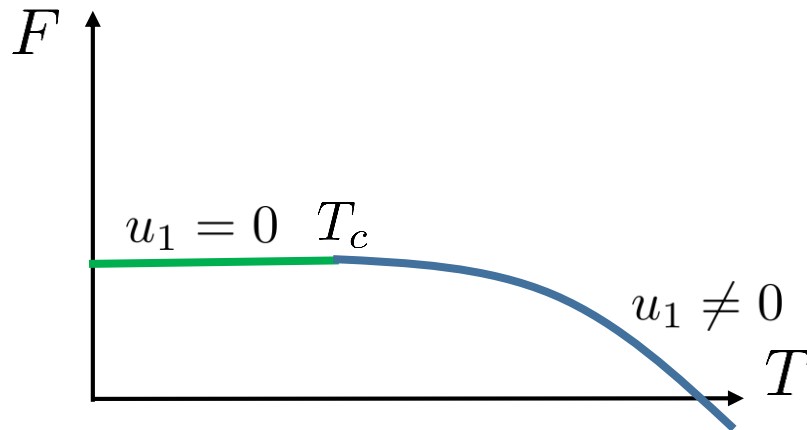
Alvarez-Gaume, Gomez, Liu, Wadia (2005)

$$S_{eff}/\beta N^2 = f_0 + a(T)|u_1|^2 + b(T)|u_1|^4 + c(T)|u_1|^6 + \dots$$

$$u_1 = \frac{1}{N} \text{Tr} P \left(\exp \left[i \int_0^\beta A_t dt \right] \right)$$

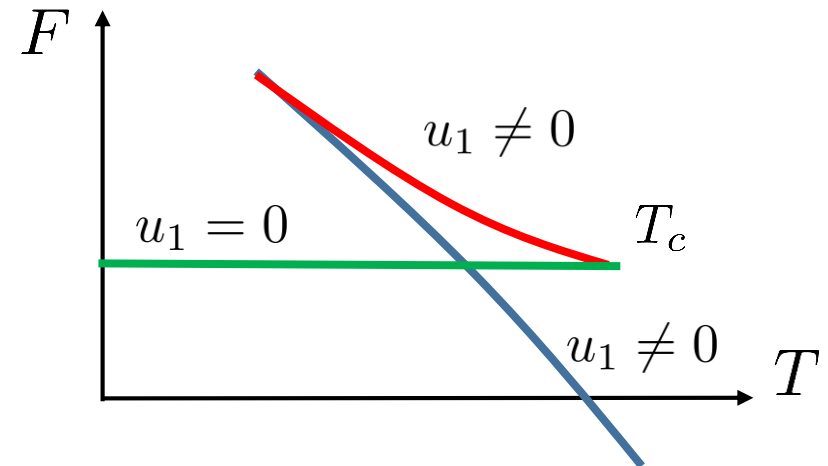
$$a(T_c) = 0, \quad b(T_c) > 0$$

2次相転移



$$a(T_c) = 0, \quad b(T_c) < 0$$

1次相転移



→ マイクロカノニカルで
負の比熱実現する可能性

○ 相構造

Aharony, Marsano, Minwalla, Papadodimas, Raamsdonk (2003)

Alvarez-Gaume, Gomez, Liu, Wadia (2005)

$$S_{eff}/\beta N^2 = f_0 + a(T)|u_1|^2 + b(T)|u_1|^4 + c(T)|u_1|^6 + \dots$$

$$u_1 = \frac{1}{N} \text{Tr} P \left(\exp \left[i \int_0^\beta A_t dt \right] \right)$$

$$a(T_c) = 0, \quad b(T_c) < 0$$

1次相転移

行列の相互作用は“長距離”

$$X^I = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

プラズマのように
スクリーニングも起こらない。

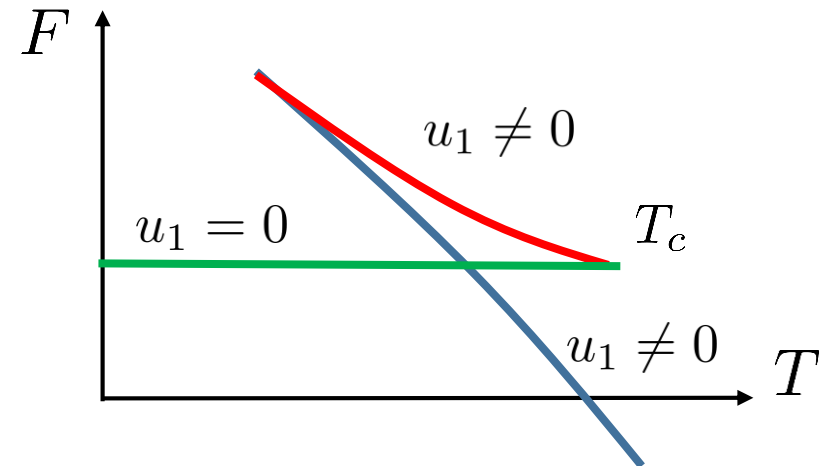


二相共存が起こらない。



マイクロカノニカルで
負の比熱が可能。

Aharony, Gubser, Maldacena, Ooguri, Oz (1999)



→ マイクロカノニカルで
負の比熱実現する可能性

○ 解析

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}. \quad X_{ij}^I : I = 1, \dots, D$$

Aharony, Marsano, Minwalla, Wiseman (2004)

Kawahara, Nishimura, Takeuchi (2007)

Azuma, TM, Takeuchi (2014)

Bergner, Bodendorfer, Hanada, Rinaldi, Schäfer, Vranas(2020)

• 数値解析(MC)

• $D=2, \dots, 25 \rightarrow$ 1次相転移

• マイクロカノニカルをMCで実現するのは難しい $\rightarrow$ 負の比熱は調べられない。

• Large-D 展開

Mandal, Mahato, TM (2010)

• D が十分大きいと2次相転移

• 解析的に調べられるが、2次転移 $\rightarrow$ 比熱は常に正。(負の比熱を調べられない。)

• Minimal Sensitivity (Gaussian expansion)

Kabat, Lifschytz (2000)

TM, Yoshida (2020)

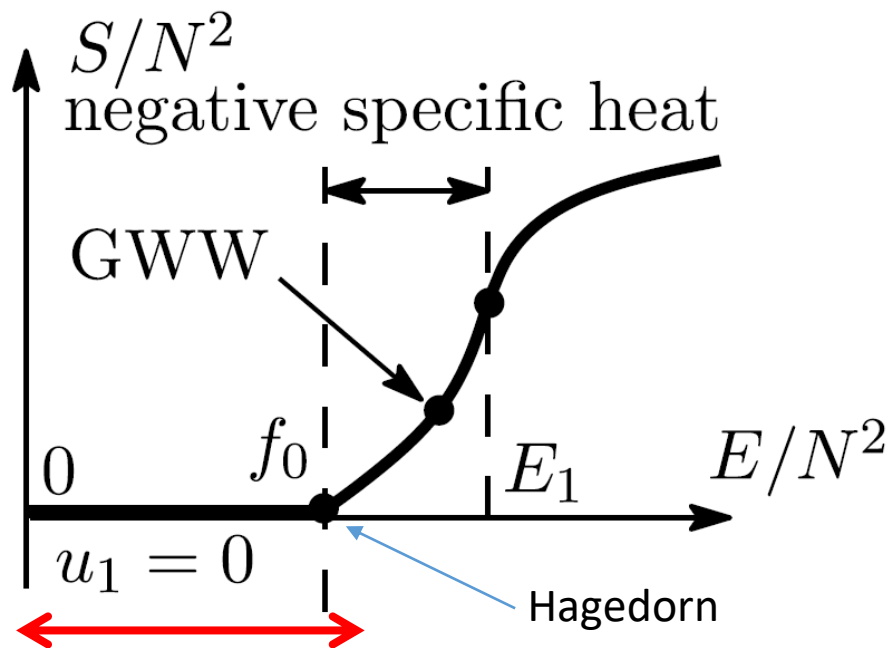
(3loop) $D \leq 35$ 1次相転移
 $D \geq 36$ 2次相転移

• MCとlarge-D展開を結ぶ結果。
• マイクロカノニカルもOK (ルジャンドル変換)
 $\rightarrow$ 負の比熱状態を調べられる。

○ 解析

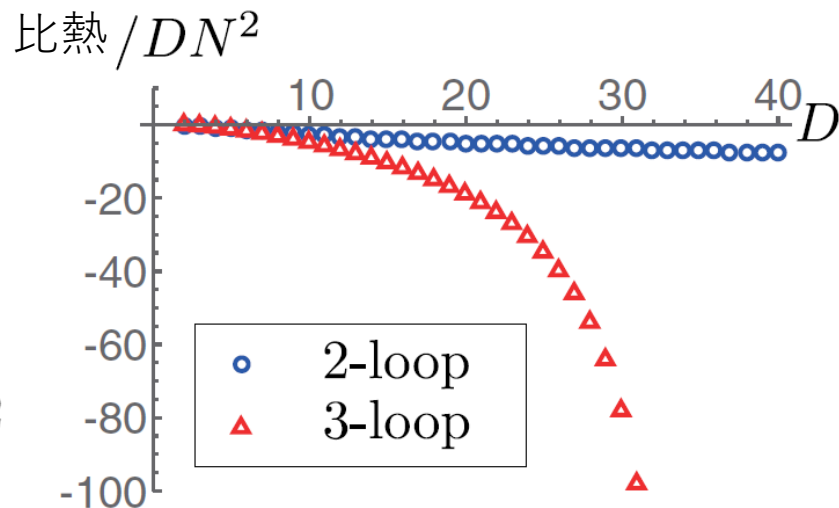
$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}. \quad X_{ij}^I : I = 1, \dots, D$$

- Minimal Sensitivity (Gaussian expansion) [TM, Yoshida \(2020\)](#)



現在、この領域まで解析できる。

($|u_1|$ が小さいという近似を使用)



臨界温度での比熱

D=35近傍(臨界次元)で発散

3.結論と展望

結論

- 行列量子力学で負の比熱はマイクロカノニカルで比較的的自然に実現
(重力系ではマイクロカノニカルが自然)
- 負の比熱状態をほぼ解析的に調べることも可能。
- (D が大で2次相転移 $\rightarrow$ 重力の予言と定性的に一致)

展望

- 行列模型における負の比熱の定性的な理解。 (cf. 渡辺さんの講演)
- マイクロカノニカルの直接的な解析。
- ブラックホールの負の比熱との関係。