

4×4 行列形式非平衡 TFD による時間依存非凝縮粒子分布をもつ Bose-Einstein 凝縮系

大山 京尋¹, 中村 祐介^{2,3}, 山中 由也¹

¹早稲田大学基幹理工学部電子物理システム学科

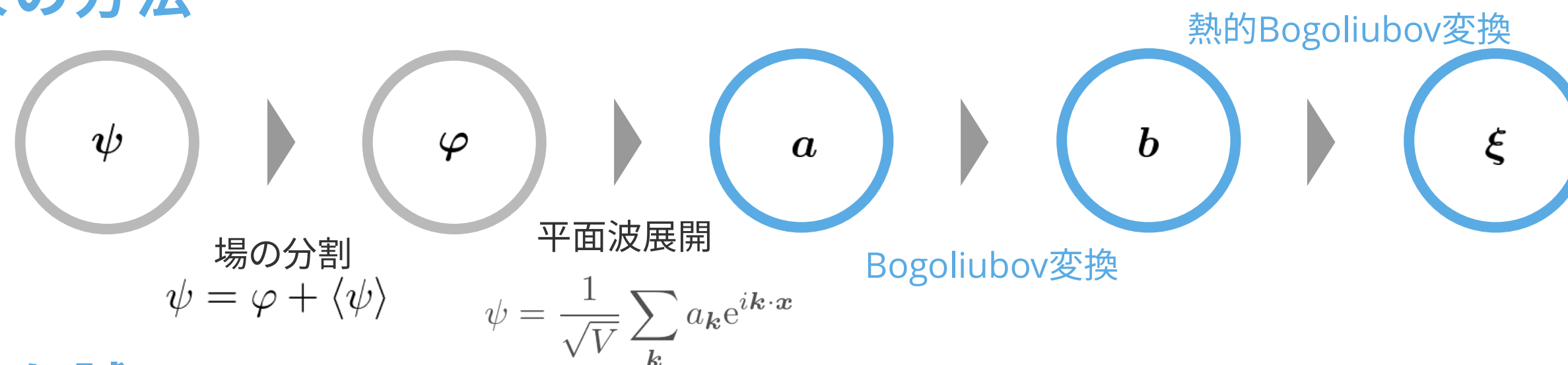
²早稲田大学凝縮系物質科学研究所

³長野県木曽青峰高等学校

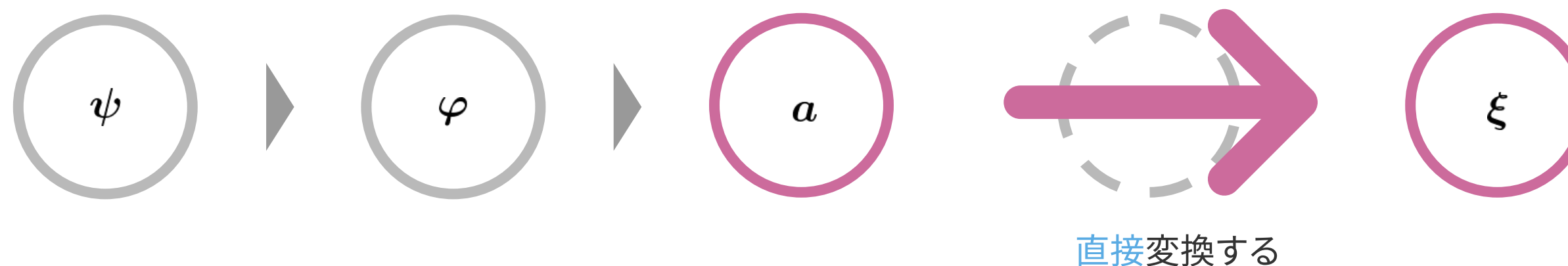
概要

- 大域的位相変換対称性が自発的に破れている非平衡系に対して Thermo Field Dynamics (TFD) を適用。
- 従来の方法と異なるような演算子の変換方法をとることで、理論構成に矛盾がなく、従来の方法では得られない新たな解が得られることが示唆
→ 変換の行列構造が異なり、propagatorやGreen関数が異なるため

従来の方法



新たな試み



熱場の量子論

熱的な物理量

混合状態期待値で与えられる

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A] \quad \rho : \text{規格化された密度演算子}$$



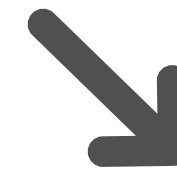
Thermo Field Dynamics (TFD)

空間の倍加

熱的混合状態を**純粋状態**で記述

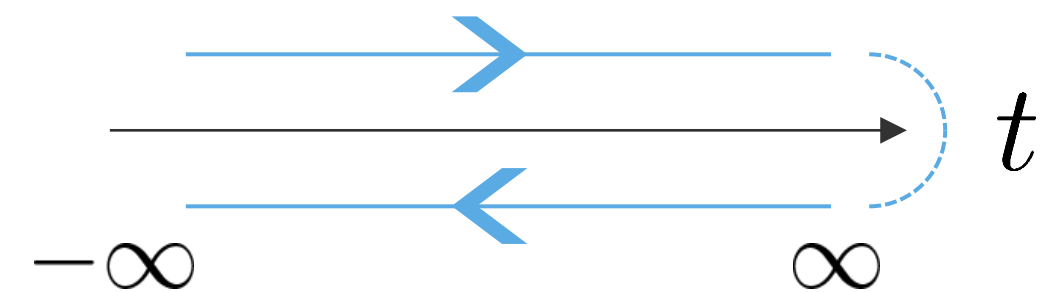
$$a \rightarrow a, \tilde{a}$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A] \rightarrow \langle 0_{\text{th}} | A | 0_{\text{th}} \rangle$$



Closed Time Path(CTP)

Keldysh経路の使用



超演算子形式 Z. Schmutz, Z. Phys. B30, 97 (1978).

非摂動密度演算子

$$\rho_0 = (1 - f) \sum_{m=0}^{\infty} f^m |m\rangle \langle m|$$

$$n = \frac{f}{1 - f} \quad (\text{平衡系では } f = e^{-\beta\omega})$$

空間の倍加

密度演算子 → 超ケット

$$\rho_0 \rightarrow |\rho_0\rangle\rangle$$

左から作用する演算子 → non-tilde 超演算子

$$a\rho_0, a^\dagger\rho_0 \rightarrow a|\rho_0\rangle\rangle, a^\dagger|\rho_0\rangle\rangle$$

右から作用する演算子 → tilde 超演算子

$$\rho_0 a, \rho_0 a^\dagger \rightarrow \tilde{a}^\dagger |\rho_0\rangle\rangle, \tilde{a} |\rho_0\rangle\rangle$$

超ケット

$$\text{密度演算子に対応: } |\rho_0\rangle\rangle = (1 - f) \sum_{m=0}^{\infty} f^m |m\rangle \langle m|$$

$$\begin{aligned} a\rho_0 - f\rho_0 a &= 0 & \rightarrow & (a - f\tilde{a}^\dagger)|\rho_0\rangle\rangle = 0 \\ \rho_0 a^\dagger - f a^\dagger \rho_0 &= 0 & \rightarrow & (\tilde{a} - f a^\dagger)|\rho_0\rangle\rangle = 0 \end{aligned}$$

熱的狀態条件

超ブラ

$$\text{トレース演算に対応: } \langle\langle I| = \sum_m \langle m| \bullet |m\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[a\bullet] &= \text{Tr}[\bullet a] & \rightarrow & \langle\langle I|(a - \tilde{a}^\dagger) = 0 \\ & \text{トレースの循環性} & & \langle\langle I|(a^\dagger - \tilde{a}) = 0 \end{aligned}$$

熱的期待値

$$\text{Tr}[A\rho_0] = \langle\langle I|A|\rho_0\rangle\rangle$$

超演算子形式からTFDへ Y. Nakamura and Y. Yamanaka, Ann Phys. 331, **51** (2013)

交換関係

超演算子に対する代数

$$[a, a^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$$

$$[a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = 0$$

<証明>

$$[a, \tilde{a}]|R\rangle\rangle = (a\tilde{a} - \tilde{a}a)|R\rangle\rangle = a(Ra^\dagger) - (aR)a^\dagger = 0$$

任意の超ケット $|R\rangle\rangle$

倍加されたFock空間

$$|\rho_0\rangle\rangle = (1-f) \sum_{m=0}^{\infty} f^m \overset{a, a^\dagger}{|m\rangle} \overset{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger}{\langle m|}$$

$$\langle\langle 1| = \sum_m \langle m| \bullet |m\rangle$$

$$(1-f) \sum_m f^m |m\rangle \otimes |m\rangle \equiv (1-f) \sum_m f^m |m, m\rangle\rangle \equiv |0_{\text{th}}\rangle$$

$$\sum_m \langle m| \otimes \langle m| \equiv \sum_m \langle\langle m, m| = \langle 0_{\text{th}}|$$

全ハミルトニアン

$$\hat{H} = H - \tilde{H}$$

Liouville方程式

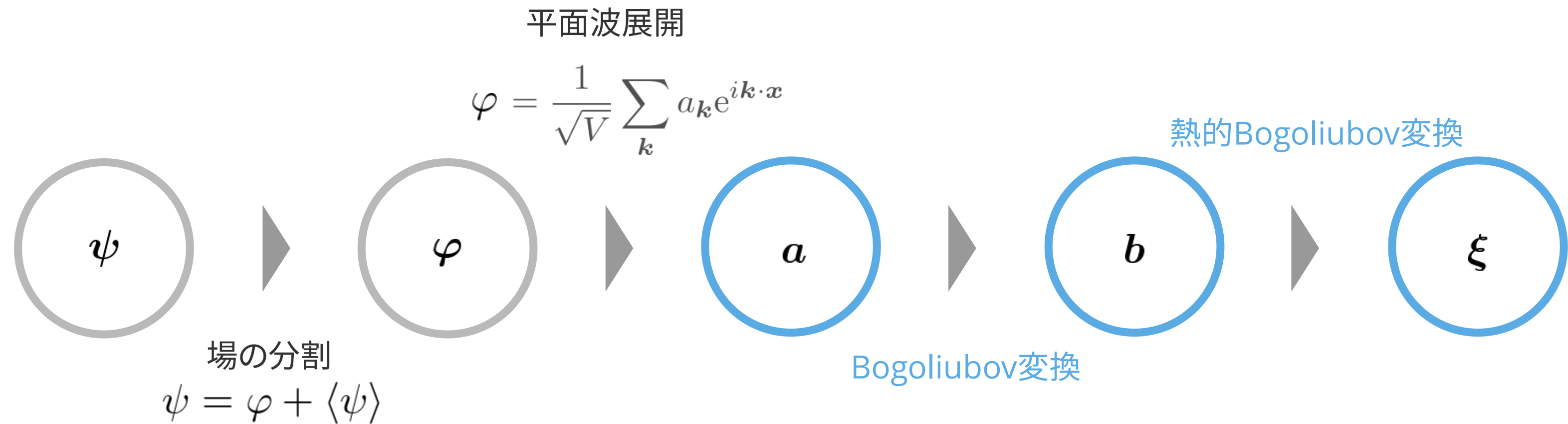
$$i \frac{d}{dt} \rho_s = [H, \rho_s] = H \rho_s - \rho_s H$$

$$i \frac{d}{dt} |\rho_s\rangle\rangle = (H - \tilde{H}) |\rho_s\rangle\rangle$$

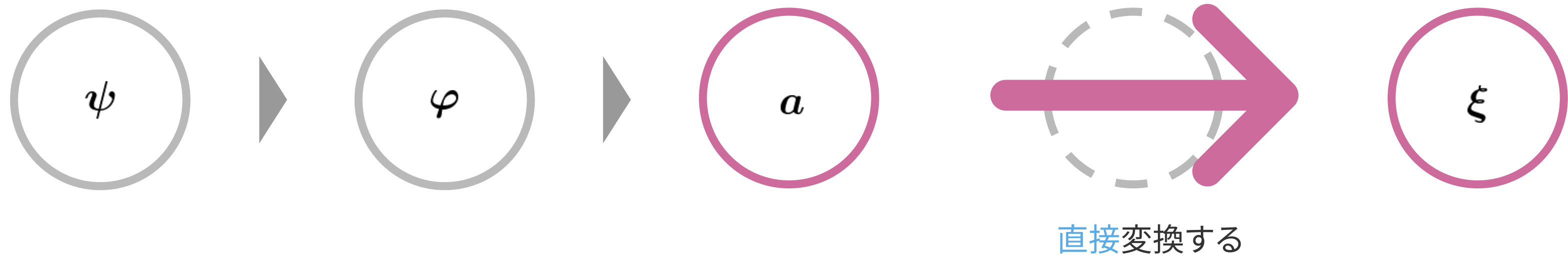
Liouvillian

混合状態 : $\text{Tr}[A\rho_0]$ $\longrightarrow$ 超演算子+超状態 : $\langle\langle I|A|\rho_0\rangle\rangle$ $\longrightarrow$ **TFD** : $\langle 0_{\text{th}}|A|0_{\text{th}}\rangle$

従来の変換方法



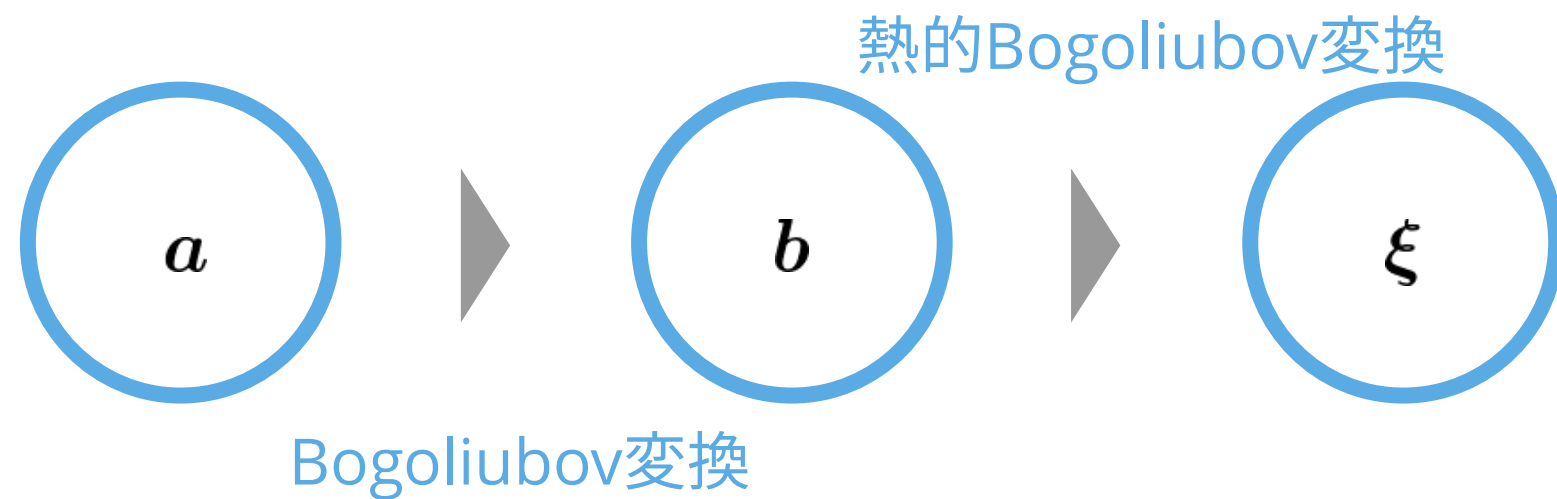
新しい試み



- 矛盾することなく理論の構成可能
- 従来の方法と変換の行列構造が異なるため、propagatorやGreen関数が異なる

➡ 実際に計算がうまくいくかどうかは現状未だ不明

従来の方法：詳細



$$a \rightarrow b$$

Bogoliubov変換

$$\begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} ce^{i\theta(t)} & se^{-i\theta(t)} \\ se^{i\theta(t)} & ce^{-i\theta(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}_t$$

$$c^2 - s^2 = 1$$

$$b \rightarrow \xi$$

$b|0_{\text{th}}\rangle \neq 0, \tilde{b}|0_{\text{th}}\rangle \neq 0 \dots$ 熱的真空を消去しない



熱的Bogoliubov変換

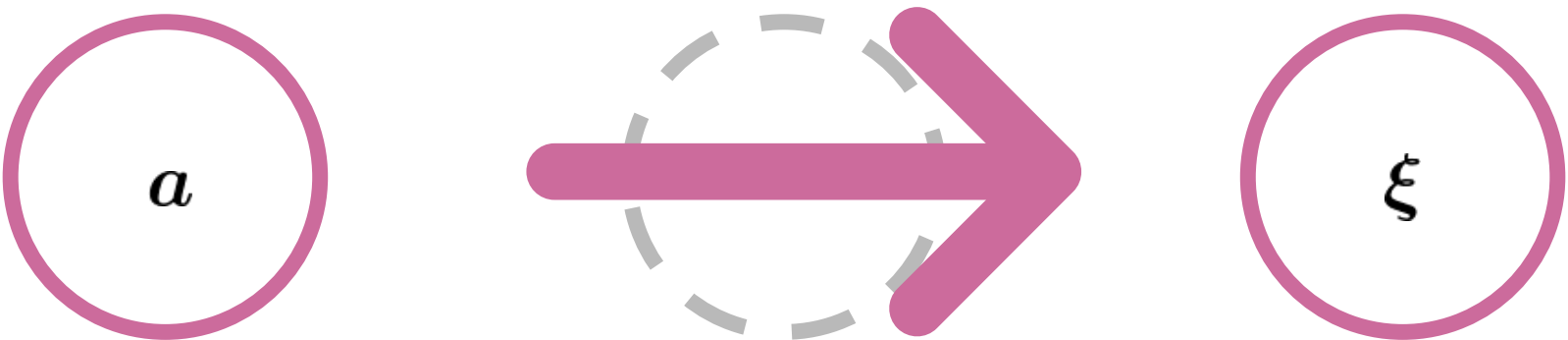
熱的真空を消去する演算子 $\xi, \tilde{\xi}$ の導入

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 1 + n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \tilde{b}^\dagger \end{pmatrix}_t$$

$$\begin{pmatrix} \xi^\dagger \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -n(t) & 1 + n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^\dagger \\ \tilde{b} \end{pmatrix}_t$$

$$n(t) = \langle 0_{\text{th}} | a^\dagger a | 0_{\text{th}} \rangle$$

新しい試み：詳細



直接変換する

仮定

- tilde 則 } ...超演算子形式から自然
- 交換関係 }
- 熱的状态条件(TSC) ...Feynman diagramで
 $\langle 0_{\text{th}} | a = \langle 0_{\text{th}} | \tilde{a}^\dagger$ 記述するのに必要

$$\begin{pmatrix} a \\ \tilde{a} \\ \tilde{a}^\dagger \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s^* & cn - sm & c^*m - s^*n \\ s & c^* & cm^* - sn & c^*n - s^*m^* \\ c & s^* & c(1+n) - sm & c^*m - s^*(1+n) \\ s & c^* & cm^* - s(1+n) & c^*(1+n) - s^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi}^\dagger \\ \xi^\dagger \end{pmatrix}$$

$$|c|^2 - |s|^2 = 1$$

$$n = \langle 0_{\text{th}} | a^\dagger a | 0_{\text{th}} \rangle$$

$$m = \langle 0_{\text{th}} | a^2 | 0_{\text{th}} \rangle$$

ここで、以下の非摂動のHeisenberg 方程式を要請

$$i\dot{n} = \langle 0_{\text{th}} | [a^\dagger a, \hat{H}_a] | 0_{\text{th}} \rangle$$

$$i\dot{m} = \langle 0_{\text{th}} | [a^2, \hat{H}_a] | 0_{\text{th}} \rangle$$



$$\hat{H}_\xi = E\xi^\dagger\xi - E^*\tilde{\xi}^\dagger\tilde{\xi} \text{ と対角化されるのが保証}$$

ξ に対する
非摂動ハミルトニアン

$$(\hat{H} = \hat{H}_\xi + \hat{H}_{\xi,int})$$

新しい試み：従来の方法との関係

新しい変換方法

$$\begin{pmatrix} a \\ \tilde{a} \\ \tilde{a}^\dagger \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s^* & cn - sm & c^*m - s^*n \\ s & c^* & cm^* - sn & c^*n - s^*m^* \\ c & s^* & c(1+n) - sm & c^*m - s^*(1+n) \\ s & c^* & cm^* - s(1+n) & c^*(1+n) - s^*m^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi}^\dagger \\ \xi^\dagger \end{pmatrix}$$

従来の変換方法

$$\begin{pmatrix} a \\ \tilde{a} \\ \tilde{a}^\dagger \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s^* & cn & -s^*n \\ s & c^* & -sn & c^*n \\ c & s^* & c(1+n) & -s^*(1+n) \\ s & c^* & -s(1+n) & c^*(1+n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi}^\dagger \\ \xi^\dagger \end{pmatrix}$$

新しい変換方法において、 $m = 0$ としたものが従来の変換方法



両者でPropagatorが異なり、Green関数の計算結果も異なることになる (現在計算中)