非ガウシアン状態のvon Neumannエントロピーの一般公式

森崇人*, 磯暁*†, 酒井勝太†

*総合研究大学院大学 素粒子原子核専攻, †高エネルギー加速器研究機構KEK理論センター

動機

量子状態の量子相関を測る量であるエンタングルメントエントロピー(EE)$S_A = -\mathrm{Tr}_A \rho_A \log \rho_A$（ここで$\rho_A$は縮約密度行列$\mathrm{Tr}_B \rho_{AB}$）の計算は、様々な分野で必要とされている。

- 2体の純粋状態間のエンタングルメントの良い尺度の一つ（量子情報）
- ホログラフィックな性質を持つための必要条件(?) i.e. 笠-高柳公式 →ホログラフィック原理の実現の一つ （量子重力）
- ブラックホール（＋輻射）のエントロピー[1]
- 量子相転移の秩序変数（物性） etc.

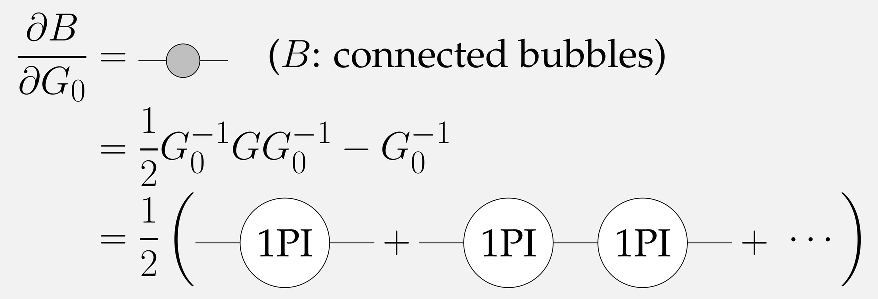
しかし、EEそのものが計算できる例は非常に限られている。ρ_Aが厳密に対角化できれば計算できるが、通常対角化はできないことが多い。自由場の場合、波動関数および縮約密度行列のガウシアンの性質を使うことでvon Neumannエントロピーの和として求めることができる。また、CFTではレプリカ法を用いることにより、1+1次元に限って解析的な表式が得られている。しかし、相互作用がある場合は非ガウシアン状態になり、ホログラフィーを通した重力側での計算によるスケーリングしか分かっていない。そこで、場の理論の範囲で、相互作用があるような非ガウシアン状態のEEを求めることができないか考えた。EEは縮約密度行列に対するvon Neumannエントロピーであり、温度$\beta = 1$のmodularハミルトニアン$K_A \equiv -\log \rho_A$の熱的エントロピー

$$S_A = S(\rho_A) = S_{thermal}(\beta = 1, H = K_A)$$

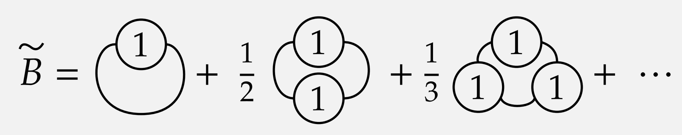
とみなせるため、まず本研究では相互作用がある場合も含む一般的な熱的エントロピーを考える。特にEEへの応用のため、できるだけ状態によらない定式化を考えたい。後述するように、ガウシアンの場合の類推から、エントロピー表式を状態で直接書かずに、多点関数で書くことを考える。

2粒子既約有効作用定式化(review)

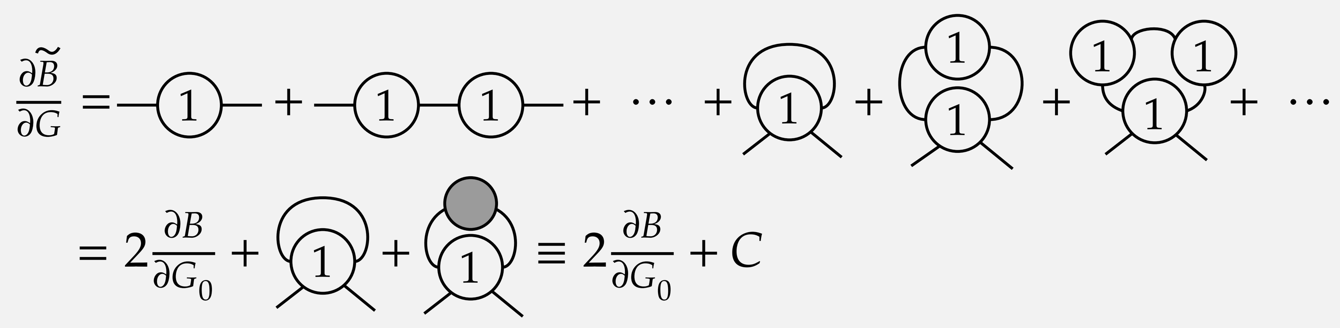
グリーン関数で書かれた熱力学エントロピーを求めるには、熱力学関係式$S = \beta^2 \partial_\beta F$より、自由エネルギー$F = -\frac{1}{\beta}\log Z$、もしくは連結グリーン関数の生成汎関数$iW[J,R] = \log Z[J,R]$のグリーン関数で書かれた表式を求めれば良い。但し、最後にsource free$J = R = 0$とする。Jは場ϕに、Rはϕ^2に結合したソースである。連結バブルを$B = \log Z - \log Z_0$とする。



ここで、



$$\Leftrightarrow \tilde{B} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Tr}[(\mathrm{G}_0 \cdot (1\mathrm{PI}))^n] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Tr}\left[\left(G_0 \cdot 2\frac{\partial B_2}{\partial G}\right)^n\right] = -\mathrm{Tr}\log\left(1 - 2G_0 \frac{\partial B_2}{\partial G}\right)$$



$$C_{ij} = G_{kl}\frac{\partial (1\mathrm{PI})_{kl}}{\partial G_{0ij}} = G_{kl}\frac{\partial}{\partial G_{0ij}}\left(2\frac{\partial B_2}{\partial G_{kl}}\right) = 2\frac{\partial}{\partial G_{0ij}}\left(G_{kl}\frac{\partial B_2}{\partial G_{kl}} - B_2\right) \quad B_2\text{は2PIバブル}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial G_{0ij}} = \frac{\partial}{\partial G_{0ij}}\left(\frac{1}{2}\tilde{B} - G_{kl}\frac{\partial B_2}{\partial G_{kl}} + B_2\right) \quad \Rightarrow B = \frac{1}{2}\tilde{B} - G_{kl}\frac{\partial B_2}{\partial G_{kl}} + B_2$$

さらにDyson方程式より、Gが自己無撞着に決定される：

$$G^{-1} = G_0^{-1} - 2\frac{\partial B_2}{\partial G}$$

以上より、Bが求まる。

$$B = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log\left(G_0 G^{-1}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(G_0^{-1}G - 1\right) + B_2$$

これに自由場の寄与$\log Z_0 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log G_0^{-1}(+\mathrm{counterterm})$を加えて、ソースなしの2PI有効作用が以下のように導かれる。

連結グリーン関数の生成汎関数（自由エネルギー/温度）

$$-\beta F = \log Z = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log G^{-1}(+\mathrm{counterterm}) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(G_0^{-1}G - 1\right) + B_2$$

エントロピーの状態によらない2PI定式化

von Neumannエントロピーは有限温度での熱的エントロピーに一致する。一般に状態の対角化は困難であることが多いが、ガウシアン状態＝自由場に対してはシンプレクティック変換を通じて、調和振動子の形に帰着させて、統計力学でよく知られている二点関数で書かれた表式が得られる。

$$S_{gaussian} = s(\omega) = (\sigma(\omega)+1)\log(\sigma(\omega)+1) - \sigma(\omega)\log\sigma(\omega), \quad \sigma(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega}-1}$$

しかし、相互作用を含む場合は、非ガウシアン状態になるため、CFTなど対称性が強い場合を除き、よく知られていない。状態のガウシアン近似（摂動論）で間接的にエントロピーを求めることはできる[2]が、上記のような関係式は2-loop以上では明確ではない。我々は2-loop以上で、状態の摂動展開によらず、ガウシアン状態の表式とあらわに接続しているような表式を求めた。前節で求めた自由エネルギーから熱力学関係式$S = \beta^2 \partial_\beta F$より、

2PI定式化での有限温度von Neumannエントロピーの一般表式

$$\frac{S}{V^d} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \oint_{\mathbb{R}_+} \frac{dz}{2\pi i} s(z) \frac{\partial}{\partial z}\left[\log G(z,\mathbf{k})^{-1} + G_0(z,\mathbf{k})^{-1} G(z,\mathbf{k})\right] - \left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - 1\right) B_2$$

但し、$\omega_n \equiv \frac{2\pi n}{\beta}$, $G_o(z,\mathbf{k}) = \left.\frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}\right|_{\omega_n \to -iz}$, $\frac{1}{\beta}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \to \oint_{i\mathbb{R}} \frac{dz}{2\pi i}\sigma(z)$である。上記は任意の空間$d$次元$d = 0, 1, \cdots$で成り立つ。確かに自由場の時、第1項のみ残り、propagatorの極の寄与からガウシアンの表式に帰着する。また、この表式は先のBaymらの結果[3]を1-loopで含む。dressed propagatorに対する自己無撞着方程式であるDyson方程式を解き、上記の式に代入すれば、状態を陽に扱うことなくエントロピーが任意の次数で求めることができる。

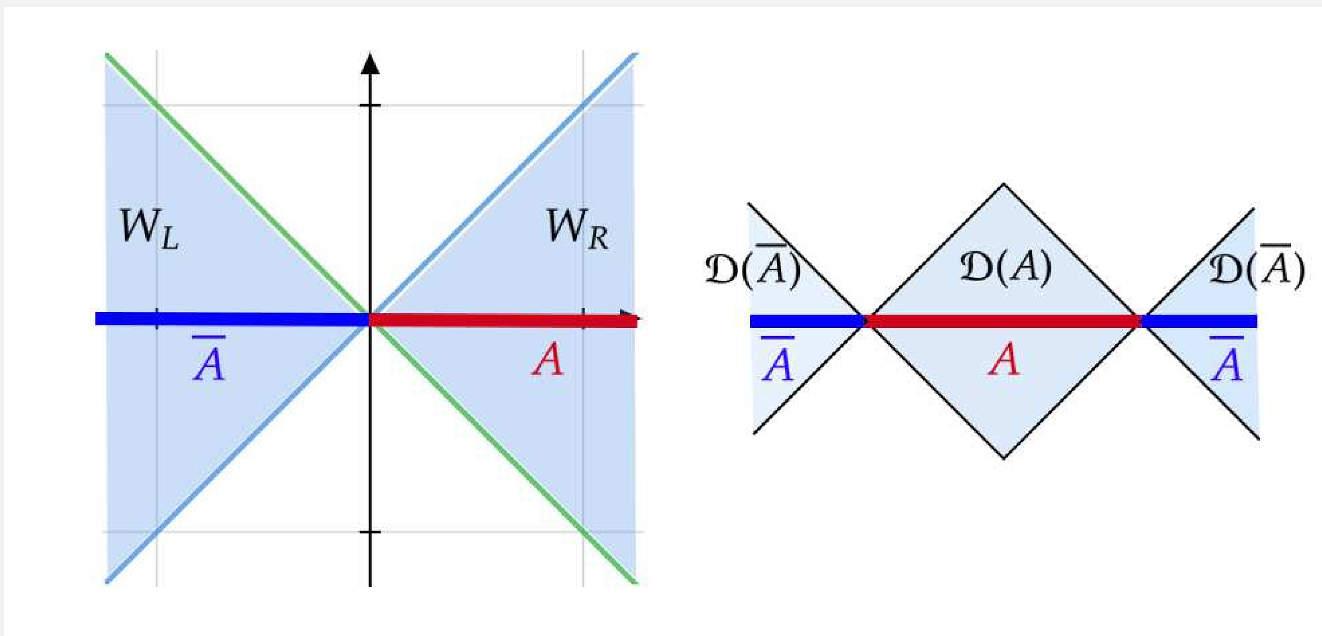
Recent discussions and future outlook

今回の熱的エントロピーの一般論をどのようにEEに適用できるだろうか。EEの導出には様々な方法があるが、相互作用を含む場合や高次元の場合、一般論としてホログラフィー以外の解析は知られていない。例えば、レプリカ法ではレプリカ多様体に境界条件を導入するために、ツイスト演算子を考えるが、高次元では非局所演算子になるため、よく分かっていない。また、ツイスト演算子との相関関数もCFTの性質を利用している。

我々は一般座標変換を通して、EEを部分系の熱的エントロピーに帰着できないか検討している。よく知られた例としては自由場におけるUnruh効果がある。簡単のため、時空が2次元の場合を考える。(T, X)で張られるMinkowski時空は

$$\begin{cases} T &= \rho \sinh \kappa t \\ X &= \rho \cosh \kappa t \end{cases}$$

という変換で、(t, ρ)で張られる右RindlerウェッジW_Rに移される。同様に左RindlerウェッジW_Lへの変換も考えると、それぞれはMinkowski時空の部分系を成している。$T = 0$で原点から右(A)と左$(\bar{A})$に部分系を分けた時のEEは、Minkowski時空での基底状態がRindler時空$A, \bar{A}$における基底状態に対して、thermofield doubleで書けることや、虚時間方向のコニカル特異点がなくなる条件から、上の一般座標変換の元でW_RもしくはW_Lの$\beta = \kappa/(2\pi)$の熱的エントロピーとして与えられることがわかる。



今後、より一般の部分形で相互作用も入れて、今の議論を拡張したい。時空を半分に切った場合は、上記と同じ議論が自由場に対してできるが、相互作用が入ると一般にあらわに波動関数の解析解を求めることは困難である。また、一般の部分形では、このような一般座標変換があるのか不明である。零質量自由場の場合は共形対称性から、共形変換で全系を円筒に写像することで、CFTのEE公式との一致が確認されている。[4] しかし、質量が入ると共形対称性は破れるため、あくまで一般座標変換の元で、熱的エントロピーの議論と同様、波動関数を直接扱わずに、熱的エントロピーとみなす方法が必要となる。一般にmodularハミルトニアンが非局所なので、温度もRindlerウェッジの時のように一様でない可能性もある。

一般の部分系に対しては、どのような座標変換を考えればEEが部分系の熱的エントロピーとみなせるのだろうか。これは因果律より、部分系のdomain of dependenceを考えれば良いことが分かる。[5] 上記の例では、Rindler wedgeW_R, W_Lがそれぞれ$A, \bar{A}$のdomain of dependence $\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(\bar{A})$になっている。しかし、一般には部分系$A$の$\mathcal{D}(A)$への一般座標変換は非自明である。

References

[1] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian, A. Tajdini. The entropy of Hawking radiation. 6 2020.

[2] Y. Chen, R. Kunjwal, H. Moradi, Y. K. Yazdi, M. Zilhão. Towards spacetime entanglement entropy for interacting theories, 2020.

[3] B. Vanderheyden, G. Baym. Self-consistent approximations in relativistic plasmas: Quasiparticle analysis of the thermodynamic properties. *Journal of Statistical Physics*, 93(3/4):843–861, Nov 1998.

[4] C. Holzhey, F. Larsen, F. Wilczek. Geometric and renormalized entropy in conformal field theory. *Nuclear Physics B*, 424(3):443 – 467, 1994.

[5] H. Casini, M. Huerta, R. C. Myers. Towards a derivation of holographic entanglement entropy. *JHEP*, 05:036, 2011.