

熱場の量子論とその応用

2020年8月24日(月)～26日(水)

フロケ系・非エルミート系における 拡張されたNielsen-Ninomiya定理

別所 拓実

Takumi BESSHO

京都大学 基礎物理学研究所(YITP) D2

T. Bessho, M. Sato, arXiv:2006.04204.

“Topological Duality in Floquet and Non-Hermitian Dynamical Anomalies:
Extended Nielsen-Ninomiya Theorem and Chiral Magnetic Effect”

熱場の量子論とその応用

2020年8月24日(月)～26日(水)

$$H(t + T) = H(t)$$

$$H^\dagger \neq H$$

フロケ系・非エルミート系における 拡張されたNielsen-Ninomiya定理

別所 拓実

Takumi BESSHO

京都大学 基礎物理学研究所(YITP) D2

格子模型では、低エネルギー
ギャップレスモードがペアで生じる。

T. Bessho, M. Sato, arXiv:2006.04204.

“Topological Duality in Floquet and Non-Hermitian Dynamical Anomalies:
Extended Nielsen-Ninomiya Theorem and Chiral Magnetic Effect”

Outline(前半)

- 導入: フロケ & 非エルミート 系
- 導入: Nielsen-Ninomiya (NN) の定理
- フロケ系でNN定理を破る & 拡張NN定理
- 非エルミート系でNN定理を破る & 拡張NN定理
- 非エルミート系でカイラル磁気(表皮)効果

12ページ

- 非エルミート系の拡張NN定理の証明
- フロケ系の拡張NN定理の証明
- 具体例: フロケ系: カイラル対称クラス $d=2$ 次元

17ページ

Topological duality

$$H = iU_F$$

Outline (後半)

- 導入: フロケ & 非エルミート 系
- 導入: Nielsen-Ninomiya (NN) の定理
- フロケ系でNN定理を破る & 拡張NN定理
- 非エルミート系でNN定理を破る & 拡張NN定理
- 非エルミート系でカイラル磁気(表皮)効果

12ページ

- 非エルミート系の拡張NN定理の証明
- フロケ系の拡張NN定理の証明
- 具体例: フロケ系: カイラル対称クラス $d=2$ 次元

17ページ

Topological duality

$$H = iU_F$$

導入: フロケ系

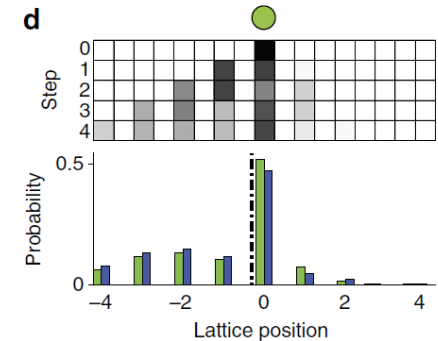
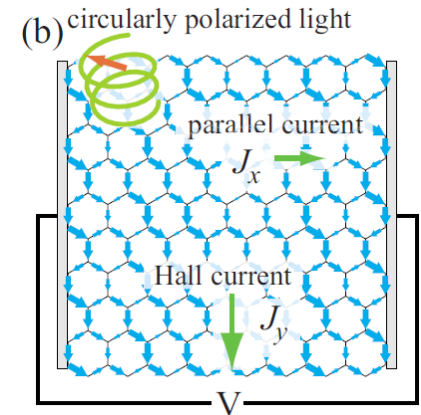
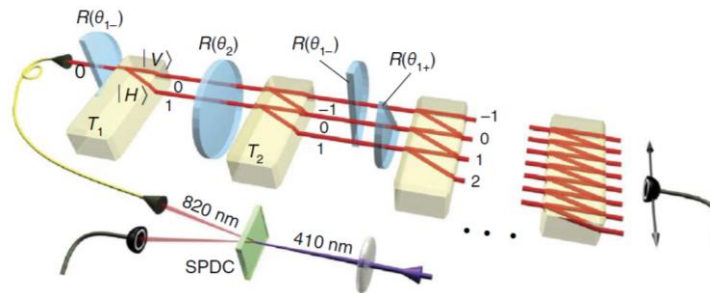
- 時間周期駆動系

$$H(t + T) = H(t)$$

- 実験的実現:

- ・固体にレーザー光を当てる
- ・固体・冷却原子系の実験で周期的に磁場の向きを回転
- ・量子ウォーク

T. Oka and H. Aoki, PRB (09).



T. Kitagawa, *et al.*,
Nat. Comm. (12).

- 理論的手法: 時間周期Tの有効ハミルトニアンを考える

$$U_F := \hat{\mathcal{T}} \exp \left[-i \int_0^T dt H(t) \right]$$

$$U_F = \exp [-i H_F T] \Leftrightarrow H_F := \frac{i}{T} \ln U_F \quad \text{mod } 2\pi/T$$

導入: 非エルミート系

- 非エルミート系は、散逸・流入のある開放量子系で実現される

$$H^\dagger \neq H$$

- 実験的実現:

・量子開放系: Lindblad方程式から非エルミートハミルトニアン

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_m \gamma_m \left(L_m \rho L_m^\dagger - \frac{1}{2} \{L_m^\dagger L_m, \rho\} \right) \quad \text{cf. } L_m \sim a$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left(H_{\text{eff}} \rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger \right) + \sum_m \gamma_m L_m \rho L_m^\dagger \quad H_{\text{eff}} := H - i \frac{\gamma_m}{2} \sum_m L_m^\dagger L_m$$

粒子数が保存している場合だけを考えると無視できる

・相互作用や不純物散乱のある固体電子系

準粒子の寿命 → 非エルミート性

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}^R(\mathbf{x}, t) &:= \theta(t) \left\langle \left\{ \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{0}) \right\} \right\rangle \\ &= \theta(t) \text{tr} \left[e^{\beta(\Omega - \hat{H})} \left\{ \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{0}) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$G^R(\omega, \mathbf{k}) = [\omega - \mathcal{H}_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})]^{-1}$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \Sigma(\omega, \mathbf{k})$$

Nielsen-Ninomiya (NN) の定理

- Fermion doubling, Poincare-Hopf theorem とも

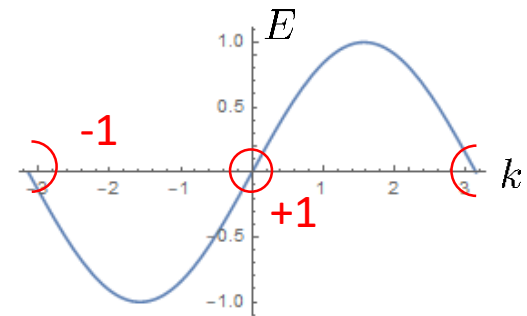
$E = 0$ ギャップレス点はgapless top# $\nu = +1$ と $\nu = -1$ が必ずペアで現れる。
 $\Leftrightarrow$ gapless top# の総和がゼロ: $\sum \nu = 0$.

- 例1) 対称性なし d=1

$$H = \sum_j \left(itc_j^\dagger c_{j+1} - itc_{j+1}^\dagger c_j \right)$$

$$H(k) = E(k) = t \sin k$$

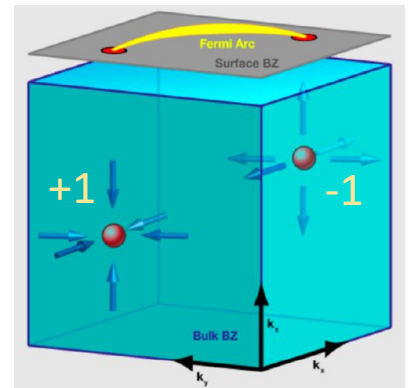
$$\sum \nu = \sum \text{sgn} \left[\frac{\partial E(k)}{\partial k} \right] = 0$$



- 例2) 対称性なし d=3 (Weyl点)

$$H(k) \approx v_F(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3) \quad \sum \nu = \sum Ch = 0$$

$$Ch = \int_{\text{BZ}} \frac{dS}{2\pi} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \equiv \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \equiv -i \langle u(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | u(\mathbf{k}) \rangle.$$



N. P. Armitage, E. J. Mele, and
 A. Vishwanath, RMP (18).

- 一般の次元、AZ対称性クラスでNN定理が成り立つ

フロケ系でNN定理を破る

- フロケ系: 時間周期駆動系

$$H(k, t + T) = H(k, t)$$

- 一周期 T の有効ハミルトニアンを考える。

$$U_F := \hat{\mathcal{T}} \exp \left[-i \int_0^T dt H(t) \right]$$

$$U_F = \exp [-i H_F T] \Leftrightarrow H_F := \frac{i}{T} \ln U_F \quad \text{mod } 2\pi/T$$

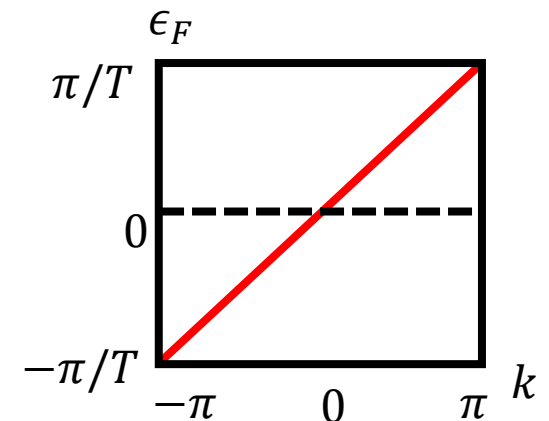
- すると、 $H_F(k)$ としてNN定理を破るものが作れる。

- 例1) 対称性なし $d=1$

$$U_F(k) := e^{-ik}, \quad H_F(k) = k/T$$

$$\sum v = \sum \text{sgn} \left[\frac{\partial \epsilon_F(k)}{\partial k} \right] = 1$$

$$n^F := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{Tr} [U_F(k)^{-1} i \partial_k U_F(k)] = 1$$



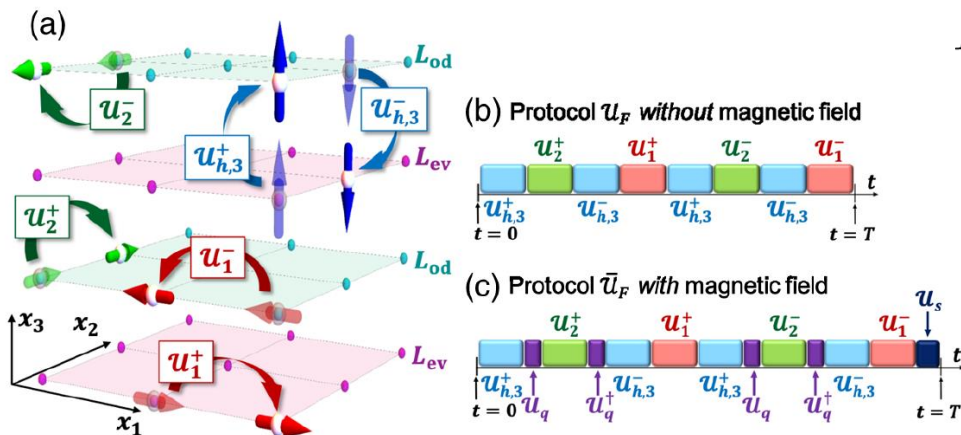
フロケ系でNN定理を破る

- 例2) 対称性なし d=3

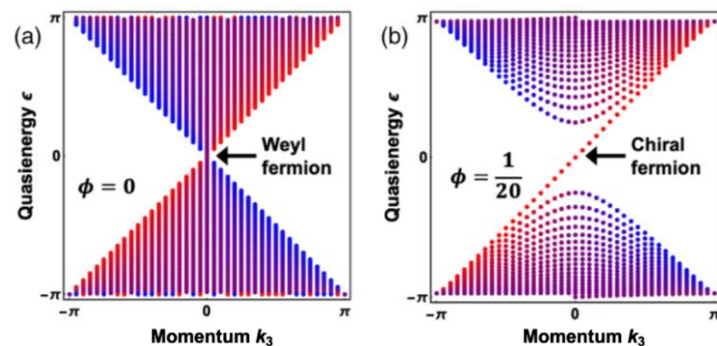
S. Higashikawa, M. Nakagawa, and M. Ueda, PRL(19).

$$\mathcal{U}_F := \mathcal{U}_1^- \mathcal{U}_{h,3}^- \mathcal{U}_2^- \mathcal{U}_{h,3}^+ \mathcal{U}_1^+ \mathcal{U}_{h,3}^- \mathcal{U}_2^+ \mathcal{U}_{h,3}^+$$

$$\mathcal{U}_j^\pm := P_j^\pm e^{\mp i k_j} + P_j^\mp \quad P_j^\pm := (\sigma_0 \pm \sigma_j) / 2$$



$$H_F(\mathbf{k}) = k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3 + O(k^2)$$



$$\Delta Q := \int_0^T dt J_3(t) = \phi/2$$

$$j_z \propto B_z$$

$$\text{ワイル点一個だけ} \rightarrow \sum \nu = \sum Ch = 1$$

$$n^F := -\frac{1}{24\pi^2} \int_{\text{BZ}} \text{Tr} \left[(U^\dagger dU)^3 \right] = 1$$

フロケ系の拡張NN定理

- 一般に、以下の拡張NN定理が成り立つ。

$$n^F = \sum_j \nu_j^0 = \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d : \text{odd}$$

$$n^F = \sum_j \nu_j^0 = - \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d : \text{even}$$

$$\text{TRS: } TU_F(k)^\dagger T^{-1} = U_F(-k)$$

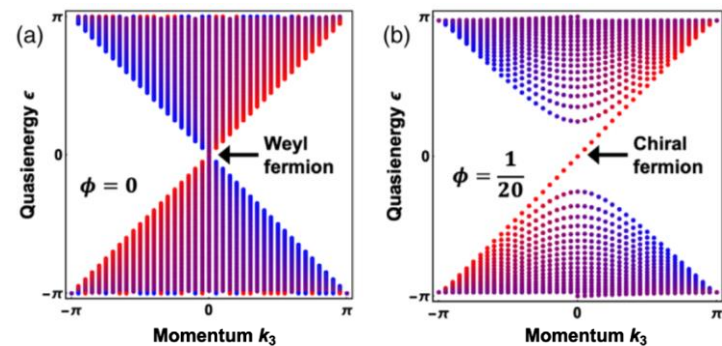
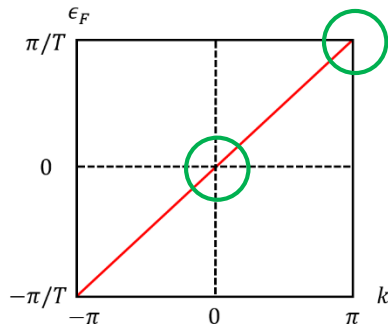
$$\text{PHS: } CU_F(k)C^{-1} = U_F(-k)$$

$$\text{CS: } \Gamma U_F(k)^\dagger \Gamma^{-1} = U_F(k)$$

※AZ対称性クラスに依らない。

- n^F : フロケユニタリ演算子の top#.
- ν_j^0 : ゼロエネルギーギャップレス点 j の top#.
- ν_j^π : π エネルギーギャップレス点 j の top#.

具体例)



$$n^F := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{Tr} [U_F(k)^{-1} i \partial_k U_F(k)] = 1$$

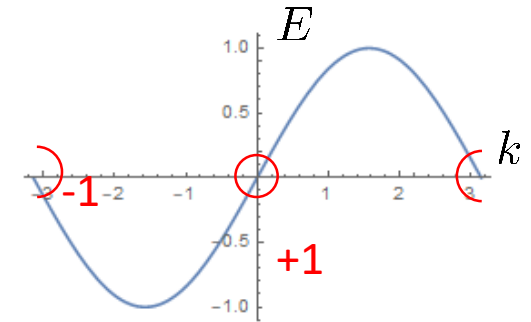
$$n^F := -\frac{1}{24\pi^2} \int_{\text{BZ}} \text{Tr} [(U^\dagger dU)^3] = 1$$

非エルミート系でNN定理を破る

- 例1) 対称性なし $d=1$

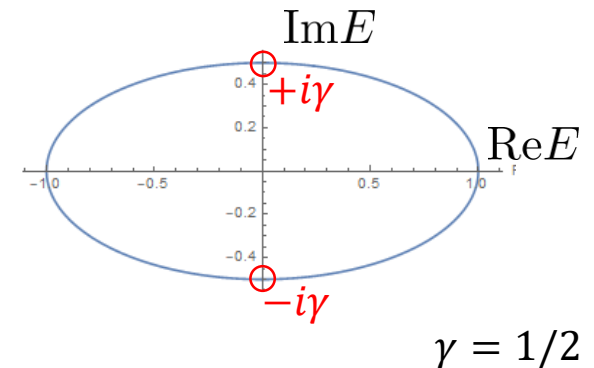
$$H(k) = E(k) = \sin k$$

の right-going mode に $+i\gamma$ を加えて enhance
left-going mode に $-i\gamma$ を加えて reduce



- 具体的には $H(k) = \sin k + i\gamma \cos k$

- すると $\psi(t) = e^{-iHt}\psi$ で時間がたった時、
right-going mode だけが生き残る。



- 非自明なpoint-gapped top #をもつ。

$$w_1 := -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \operatorname{Tr} [H(k)^{-1} i \partial_k H(k)] = 1$$

※Point gap・・・
 $E=0$ のエネルギーギャップ

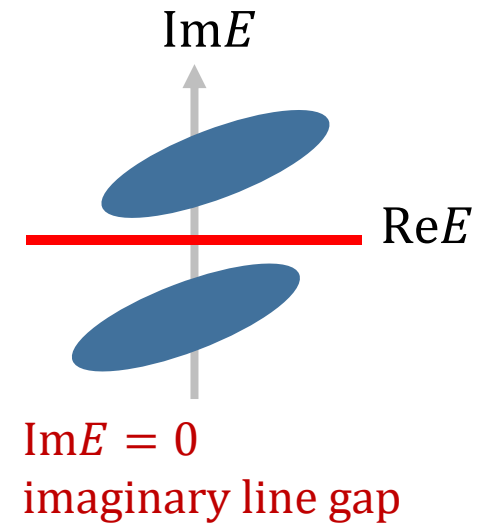
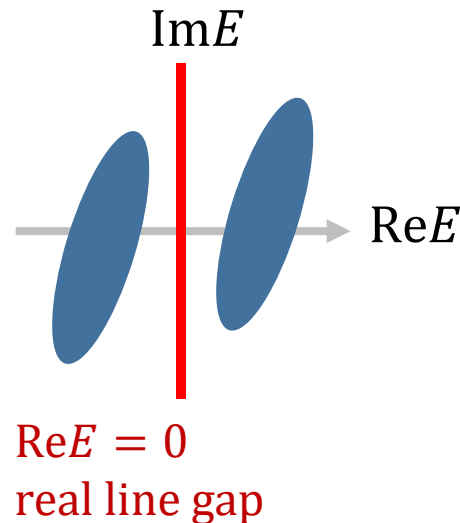
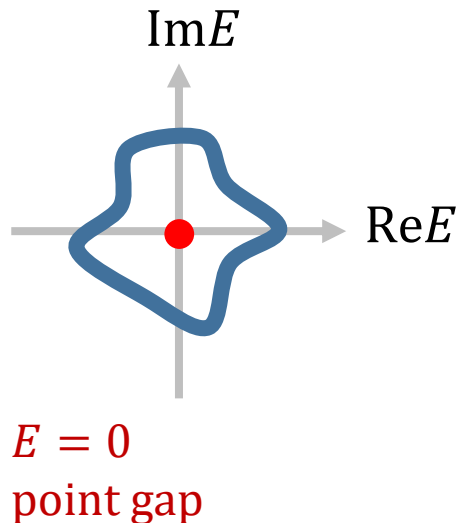
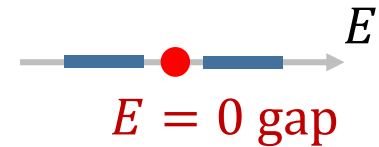
(非エルミート系のギャップの定義)

- エルミート系では $E \in \mathbb{R}$

- 非エルミート系: $H \neq H^\dagger$

- エネルギーが複素数値を取る: $E \in \mathbb{C}$

- エルミート系よりもギャップの取り方が複雑になる。



Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, and M. Ueda, PRX (18).
K. Kawabata, K. Shiozaki, M. Ueda and M. Sato, PRX (19).

非エルミート系でNN定理を破る

- 例) class AIII (カイラル対称クラス) $d=2$

$$\Gamma H(k)^\dagger \Gamma^{-1} = -H(k)$$

- model

$$\Gamma = \sigma_z$$

$$H = \sin k_x \sigma_x + \sin k_y \sigma_y + i(2 \cos k_x + \cos k_y - 2)$$

- gapless top# は

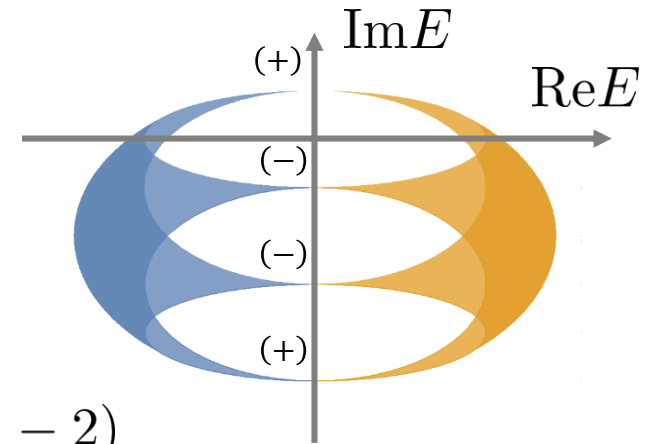
$$H(\delta k_x, \delta k_y) = \delta k_x \sigma_x + \delta k_y \sigma_y + i + O(k^2) \rightarrow \nu = +1$$

$$H(\delta k_x, \pi + \delta k_y) = \delta k_x \sigma_x - \delta k_y \sigma_y - i + O(k^2) \rightarrow \nu = -1$$

$$H(\pi + \delta k_x, \delta k_y) = -\delta k_x \sigma_x + \delta k_y \sigma_y - 3i + O(k^2) \rightarrow \nu = -1$$

$$H(\pi + \delta k_x, \pi + \delta k_y) = -\delta k_x \sigma_x - \delta k_y \sigma_y - 5i + O(k^2) \rightarrow \nu = +1$$

- Point-gapped top# は $n^P := Ch[iH\Gamma] = 1$



非エルミート系の拡張NN定理

- 一般に、 $AZ^\dagger$ 対称クラスのpoint-gapped Hamiltonianに対して以下が成り立つ。

$$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$$

$$\text{TRS}^+: TH(k)^\dagger T^{-1} = H(-k)$$

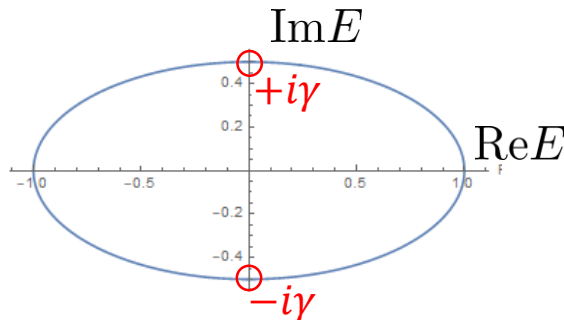
$$\text{PHS}^+: CH(k)C^{-1} = -H(-k)$$

$$\text{CS}: \Gamma H(k)^\dagger \Gamma^{-1} = -H(k)$$

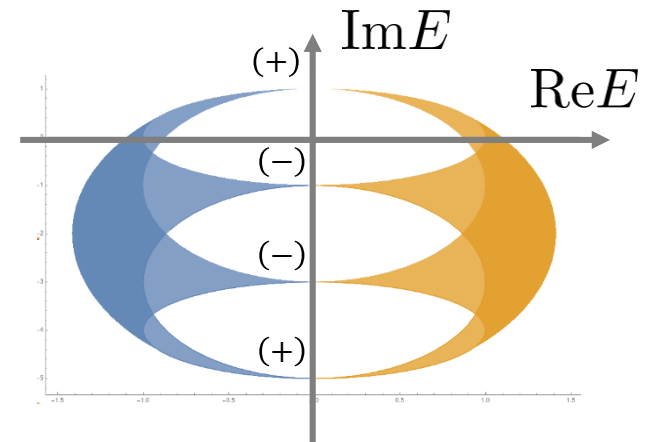
- n^P : Point gapped top#.
- ν_j^R : 実エネルギーギャップレス点 j の top#.
($\text{Re} E = 0$)

※ $AZ^\dagger$ 対称性クラス
に依らない。

具体例)



$$n^P := -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{Tr} [H(k)^{-1} i \partial_k H(k)] = 1$$



$$n^P := Ch[iH\Gamma] = 1$$

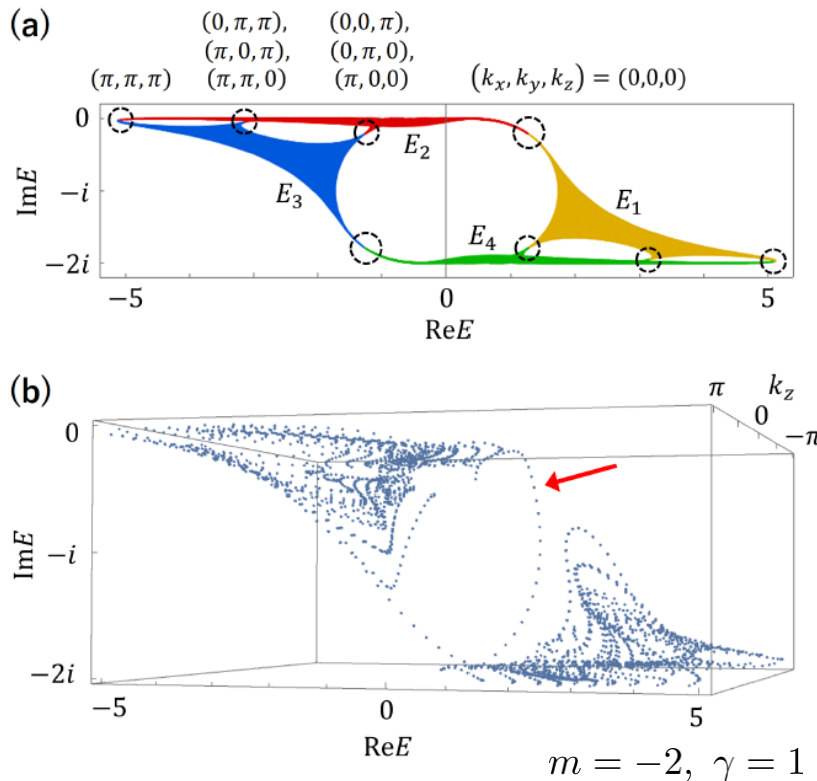
カイラル磁気(表皮)効果

- 3次元 point-gap model エルミート項 Spin selective loss

$$H(\mathbf{k}) = (d_0 + \mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}) \tau_1 + m(\mathbf{k}) \tau_3 - i\gamma_0 (\tau_0 - \tau_3)$$

$$d_i(\mathbf{k}) = \sin k_i, \quad m(\mathbf{k}) = m_0 + \sum_{i=1}^3 \cos k_i$$

- 磁場 B_z を加えるとWeyl点が $+\hat{z}$ -going mode になる。



$$w_1 = \frac{B_z}{2\pi} L_x L_y w_3 \quad \text{cf. } j \propto B$$

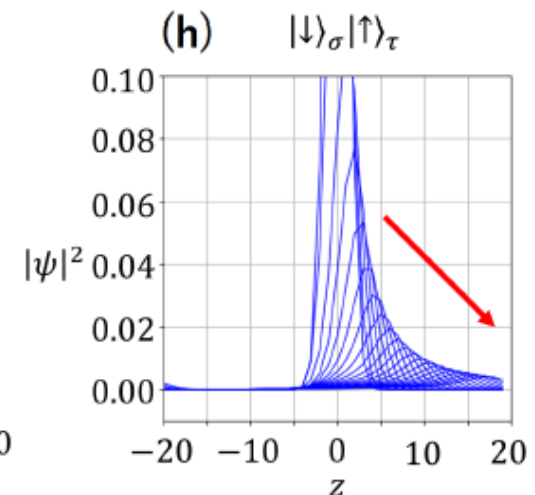
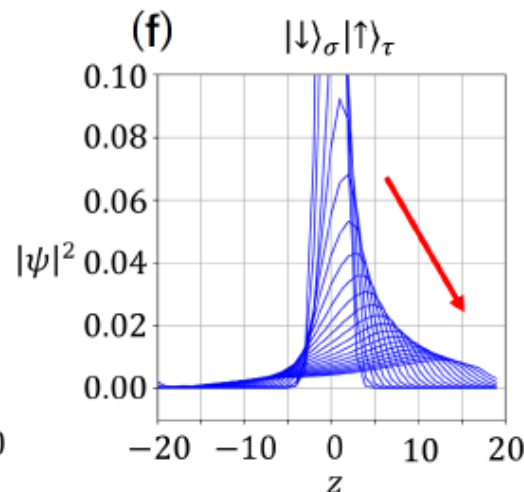
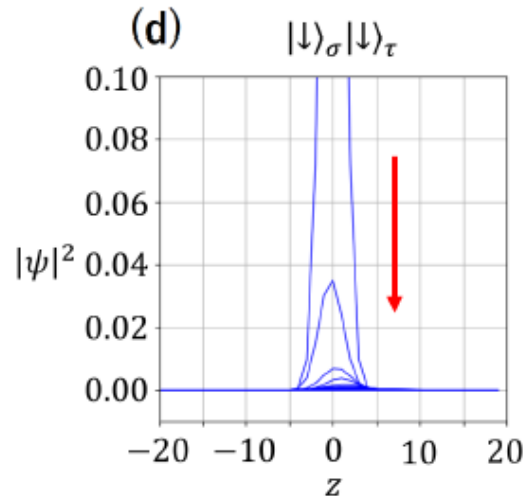
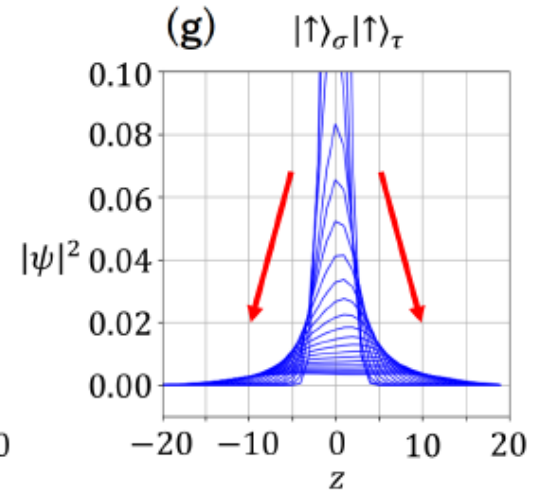
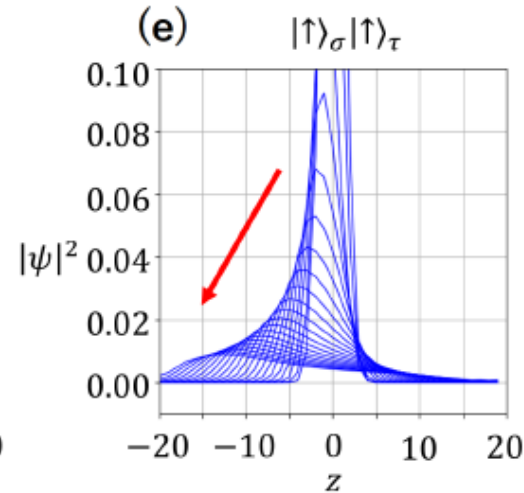
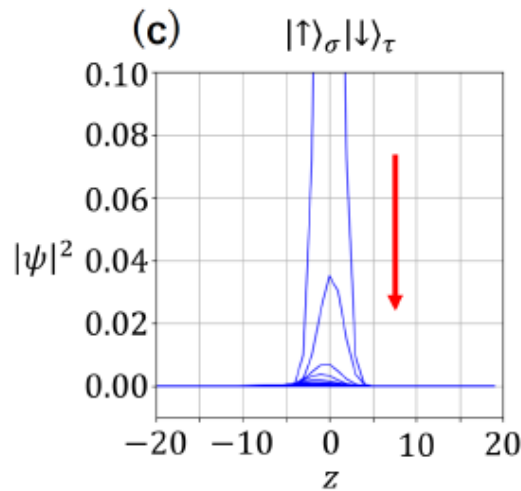
$$w_1 := -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{Tr} [H(k)^{-1} i \partial_k H(k)]$$

$$w_3 = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{\text{BZ}} \text{tr} [(H^{-1} dH)^3]$$

カイラル磁気(表皮)効果

$$B_z/2\pi = 0$$

$$B_z/2\pi = 1/10$$



Spin momentum locking: $X_c \propto tS$

+ $\hat{z}$ 方向の pumping
 $\rightarrow$ + $\hat{z}$ 端に skin effect

まとめ

- フロケ系の拡張NN定理を得た。

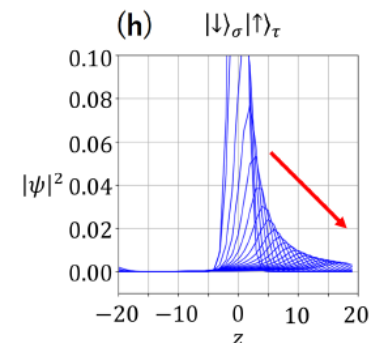
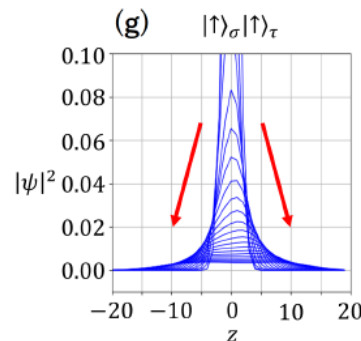
$$\begin{aligned} n^F &= \sum_j \nu_j^0 = \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d : \text{odd} \\ n^F &= \sum_j \nu_j^0 = - \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d : \text{even} \end{aligned}$$

- 非エルミート系の拡張NN定理を得た。

$$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$$

- カイラル磁気(表皮)効果

磁場の方向にpumping



後半

Outline (前半)

- 導入: フロケ & 非エルミート 系
- 導入: Nielsen-Ninomiya (NN) の定理
- フロケ系でNN定理を破る & 拡張NN定理
- 非エルミート系でNN定理を破る & 拡張NN定理
- 非エルミート系でカイラル磁気(表皮)効果

12ページ

- 非エルミート系の拡張NN定理の証明
- フロケ系の拡張NN定理の証明
- 具体例: フロケ系: カイラル対称クラス $d=2$ 次元

17ページ

Topological duality

$$H = iU_F$$

Outline (後半)

- 導入: フロケ & 非エルミート 系
- 導入: Nielsen-Ninomiya (NN) の定理
- フロケ系でNN定理を破る & 拡張NN定理
- 非エルミート系でNN定理を破る & 拡張NN定理
- 非エルミート系でカイラル磁気(表皮)効果

12ページ

- 非エルミート系の拡張NN定理の証明
- フロケ系の拡張NN定理の証明
- 具体例: フロケ系: カイラル対称クラス $d=2$ 次元

17ページ

Topological duality

$$H = iU_F$$

非エルミート系の拡張NN定理の証明

- 一般に、 $AZ^\dagger$ 対称クラスのpoint-gapped Hamiltonianに対して以下が成り立つ。

$$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$$

$$\text{TRS}^+: TH(k)^\dagger T^{-1} = H(-k)$$

$$\text{PHS}^+: CH(k)C^{-1} = -H(-k)$$

$$\text{CS}: \Gamma H(k)^\dagger \Gamma^{-1} = -H(k)$$

- n^P : point-gapped top#.
- ν_j^R : 実エネルギーギャップレス点 j の top#.

※ $AZ^\dagger$ 対称性クラスに依らない。

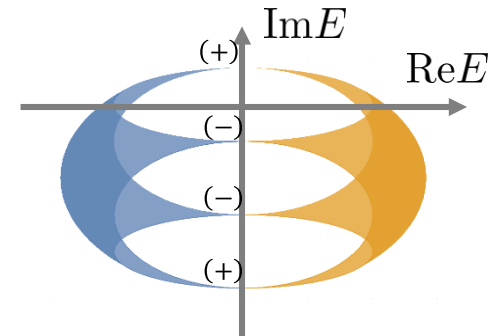
証明) まず、一つ目の等号を示す

- point-gapped top# n^P は point gap を閉じない限り不変。
- $\sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R$ も point gap を閉じない限り不変。

$$n^P = 1 \text{ の任意のモデル} \quad \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = 1$$

point gap を閉じない連続変形 $\rightsquigarrow$

$$n^P = 1 \text{ のあるモデル} \quad \Rightarrow \quad \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = 1$$



非エルミート系の拡張NN定理の証明

- 一般に、 $AZ^\dagger$ 対称クラスのpoint-gapped Hamiltonianに対して以下が成り立つ。

$$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$$

$$\begin{aligned} \text{TRS}^+: TH(k)^\dagger T^{-1} &= H(-k) \\ \text{PHS}^+: CH(k)C^{-1} &= -H(-k) \\ \text{CS}: \Gamma H(k)^\dagger \Gamma^{-1} &= -H(k) \end{aligned}$$

- n^P : point-gapped top#.
- ν_j^R : 実エネルギーギャップレス点 j の top#.

※ $AZ^\dagger$ 対称性クラスに依らない。

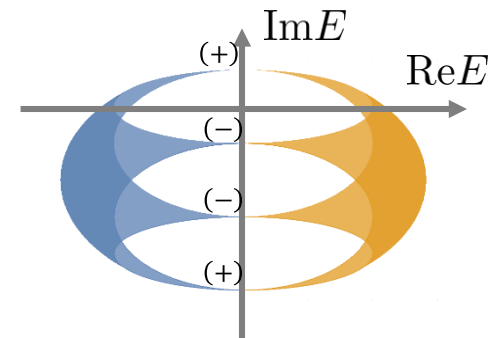
証明) まず、一つ目の等号を示す

- point-gapped top# n^P は point gap を閉じない限り不変。
- $\sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R$ も point gap を閉じない限り不変。

$$n^P = 1 \text{ の任意のモデル} \Rightarrow \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = 1$$

point gap を閉じない連続変形 $\rightsquigarrow$

$$n^P = 1 \text{ のあるモデル} \Rightarrow \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = 1$$



※ $n^P > 1$ のときにはモデルを copy すればよい。

非エルミート系の拡張NN定理の証明

- AZ対称性を満たすエルミート Dirac Hamiltonianを考える

$$H_{\text{Dirac}}(\mathbf{k}) = k_1 \Gamma_1 + \cdots + k_d \Gamma_d$$

- すると、以下のハミルトニアンはAZ⁺対称性を満たす。

$$H(\mathbf{k}) = h(\mathbf{k}) + i\gamma(\mathbf{k})$$

J. Y. Lee, J. Ahn, H. Zhou,
and A. Vishwanath, PRL(19).

$$h(\mathbf{k}) = \sin k_1 \Gamma_1 + \cdots + \sin k_d \Gamma_d$$

$$\gamma(\mathbf{k}) = m + \cos k_1 + \cdots + \cos k_d \quad -d < m < -d + 2$$

- $n^{\text{P}} = 1$

∴) 以下のdoubled Hamiltonian が $\text{top\#} = 1$ だから。

$$\overline{H}(\mathbf{k}) := \begin{pmatrix} & H(\mathbf{k}) \\ H(\mathbf{k})^\dagger & \end{pmatrix} = \tau_x \otimes h(\mathbf{k}) - \tau_y \otimes \gamma(\mathbf{k})$$

- $\sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^{\text{R}} = 1$

∴) $H(\mathbf{k})$ はTRIMでのみ $\text{Re} E = 0$ 。TRIMのうち $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ だけが $\text{Im} E > 0$ 。

$\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 付近では

$$H(\mathbf{k}) = k_1 \Gamma_1 + \cdots + k_d \Gamma_d + i(m + d) + O(k^2)$$

非エルミート系の拡張NN定理の証明

- 一般に、 $AZ^\dagger$ 対称クラスのpoint-gapped Hamiltonianに対して以下のが成り立つ。

$$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$$

$$\text{TRS}^+: TH(k)^\dagger T^{-1} = H(-k)$$

$$\text{PHS}^+: CH(k)C^{-1} = -H(-k)$$

$$\text{CS}: \Gamma H(k)^\dagger \Gamma^{-1} = -H(k)$$

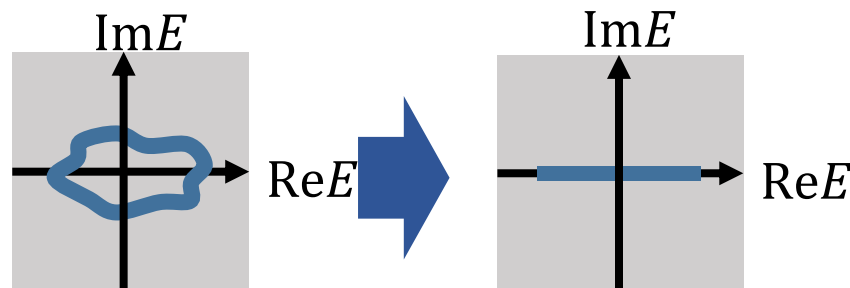
- n^P : point-gapped top#.

- ν_j^R : 実エネルギーギャップレス点 j の top#.

※ $AZ^\dagger$ 対称性クラスに依らない。

証明) 次に、二つ目の等号を示す

- 非エルミートハミルトニアンを連続変形してエルミート化する:



- エルミート系ではNN定理が成り立つので $\sum \nu_j^R = 0$ が成立。
- 元の非エルミートハミルトニアンでも $\sum_j \nu_j^R = 0$ が成立。

非エルミート系の拡張NN定理の証明

- 一般に、 $AZ^\dagger$ 対称クラスのpoint-gapped Hamiltonianに対して以下のが成り立つ。

$$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$$

$$\text{TRS}^+: TH(k)^\dagger T^{-1} = H(-k)$$

$$\text{PHS}^+: CH(k)C^{-1} = -H(-k)$$

$$\text{CS}: \Gamma H(k)^\dagger \Gamma^{-1} = -H(k)$$

- n^P : point-gapped top#.

- ν_j^R : 実エネルギーギャップレス点 j の top#.

※ $AZ^\dagger$ 対称性クラスに依らない。

証明)次に、二つ目の等号を示す

- 非エルミートハミルトニアンを連続変形してエルミート化する:

証明終了

- エルミート系ではNN定理が成り立つので $\sum_j \nu_j^R = 0$ が成立。
- 元の非エルミートハミルトニアンでも $\sum_j \nu_j^R = 0$ が成立。

フロケ系の拡張NN定理の証明

- 一般に、以下の拡張NN定理が成り立つ。

$$\begin{aligned} n^F &= \sum_j \nu_j^0 = \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d : \text{odd} \\ n^F &= \sum_j \nu_j^0 = - \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d : \text{even} \end{aligned}$$

$$\text{TRS: } TU_F(k)^\dagger T^{-1} = U_F(-k)$$

$$\text{PHS: } CU_F(k)C^{-1} = U_F(-k)$$

$$\text{CS: } \Gamma U_F(k)^\dagger \Gamma^{-1} = U_F(k)$$

※AZ対称性クラス
に依らない。

- n^F : フロケユニタリ演算子の top#.
- ν_j^0 : ゼロエネルギーギャップレス点 j の top#.
- ν_j^π : π エネルギーギャップレス点 j の top#.

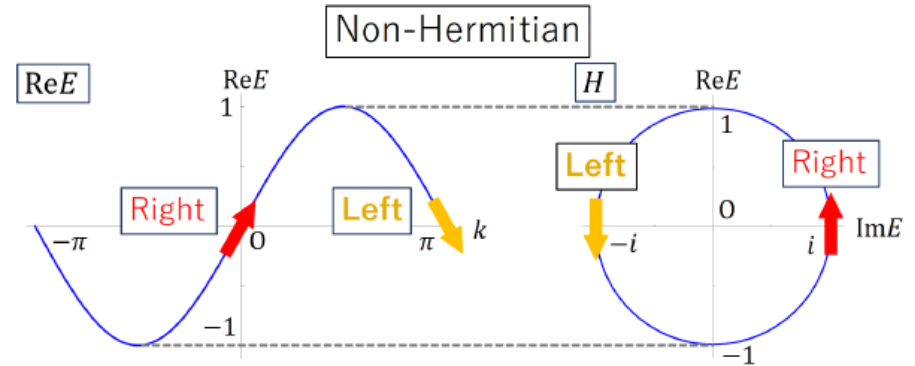
- 証明の方針)

フロケ系と非エルミート系の **topological duality** を利用して
非エルミート系の拡張NN定理を書き換える。

フロケ系と非エルミート系の対応関係

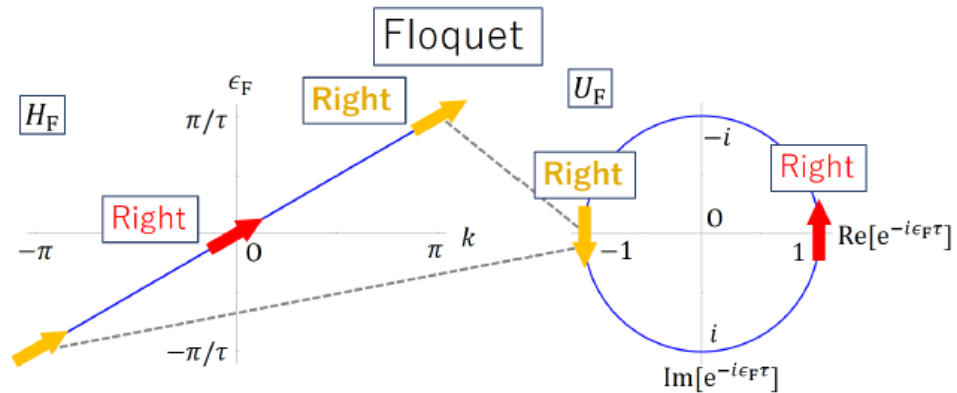
具体例

$$H(k) = ie^{-ik} = \sin k + i \cos k$$



$$H = iU_F$$

$$U_F(k) = e^{-ik}, H_F(k) = k/\tau \mod 2\pi/\tau$$

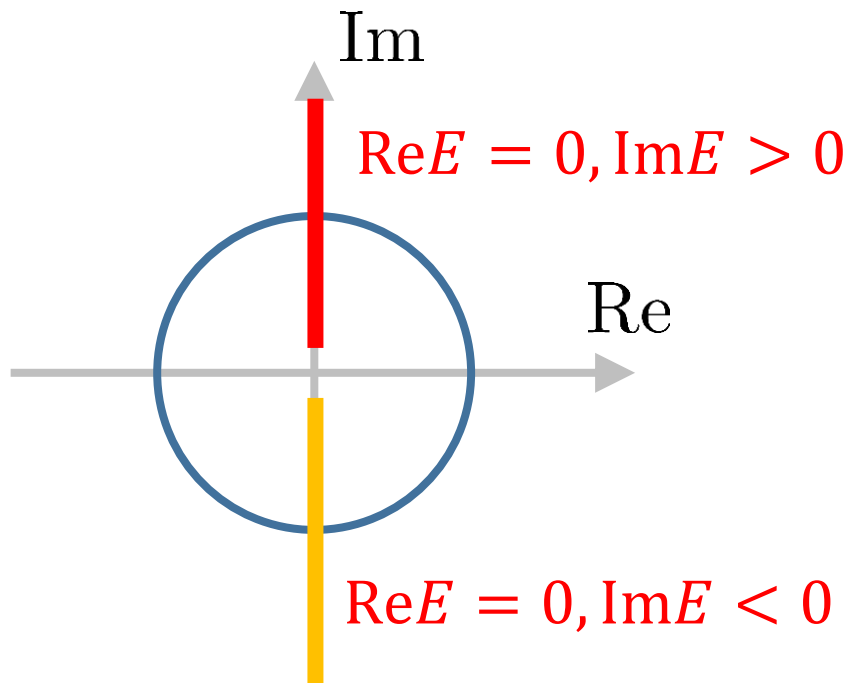


フロケ系と非エルミート系の対応関係

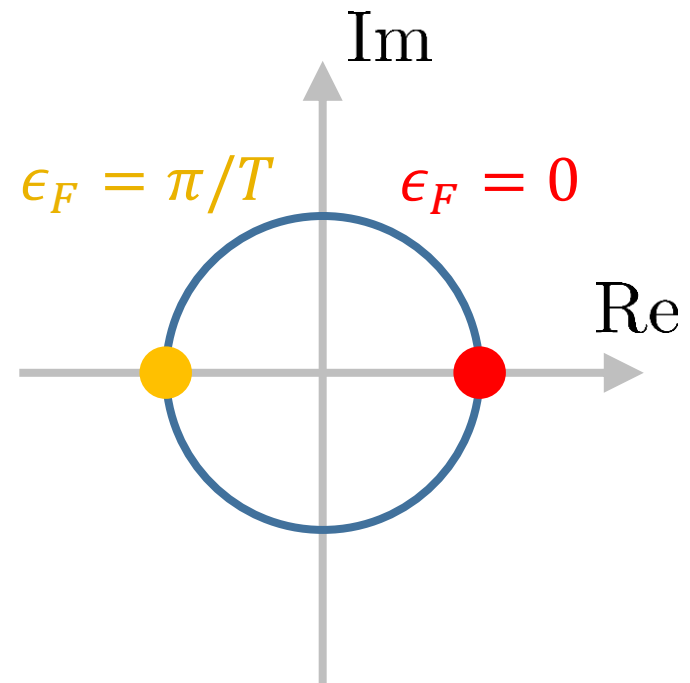
エネルギーギャップの対応関係

$$H = iU_F \quad U_F = \exp[-iH_F T] \Leftrightarrow H_F := \frac{i}{T} \ln U_F$$

H のスペクトル



U_F のスペクトル



フロケ系と非エルミート系の対応関係

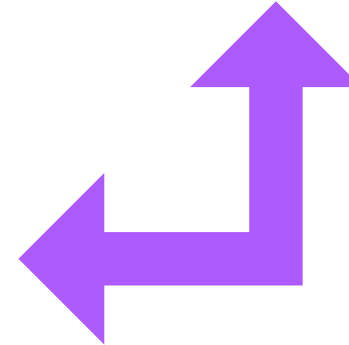
対称性クラスの対応関係

フロケ系のAZ対称クラス

- TRS: $TH(k, t)T^{-1} = H(-k, -t) \quad \rightarrow TU_F(k)^{\dagger}T^{-1} = U_F(-k)$
- PHS: $CH(k, t)C^{-1} = -H(-k, t) \quad \rightarrow CU_F(k)C^{-1} = U_F(-k)$
- CS: $\Gamma H(k, t)\Gamma^{-1} = -H(k, -t) \quad \rightarrow \Gamma U_F(k)^{\dagger}\Gamma^{-1} = U_F(k)$

非エルミート系のAZ[†]対称クラス

- TRS[†]: $TH(k)^{\dagger}T^{-1} = H(-k)$
- PHS[†]: $CH(k)C^{-1} = -H(-k)$
- CS: $\Gamma H(k)^{\dagger}\Gamma^{-1} = -H(k)$



$H(k) = iU_F(k)$ とすると一致

フロケ系の拡張NN定理の証明

- Point-gapped Hamiltonian $H = iU_F$ に対して以下が成立。

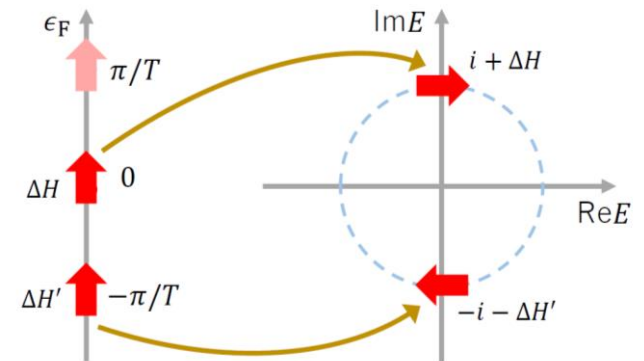
$$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$$

$$n^F = n^P$$

Ex) class A d=1 top#

$$n^F := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{Tr} [U_F(k)^{-1} i \partial_k U_F(k)] = 1$$

$$n^P := -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \text{Tr} [H(k)^{-1} i \partial_k H(k)] = 1$$



Near $\epsilon_F = 0$

$$H(\mathbf{k}) = i + H_{\text{Dirac}}^{+1}(\mathbf{k}), \quad H_{\text{Dirac}}^{+1}(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^d k_j \Gamma_j$$

$$\rightarrow U_F(\mathbf{k}) = 1 - i H_{\text{Dirac}}^{+1}(\mathbf{k})$$

$$\rightarrow H_F(\mathbf{k}) = \frac{i}{T} \ln U_F(\mathbf{k}) = \frac{1}{T} H_{\text{Dirac}}^{+1}(\mathbf{k})$$

$$\rightarrow \nu_j^0 = \nu_j^R$$

フロケ系の拡張NN定理の証明

- Point-gapped Hamiltonianと見なせる $H = iU_F$ に対して以下が成立。

$$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$$

Near $\epsilon_F = \pi/T$

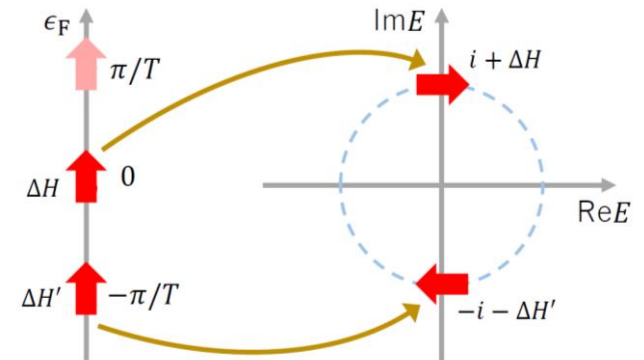
$$H(\mathbf{k}) = -i + H_{\text{Dirac}}^{+1}(\mathbf{k}), \quad H_{\text{Dirac}}^{+1}(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^d k_j \Gamma_j$$

$$\rightarrow U_F(\mathbf{k}) = -1 - iH_{\text{Dirac}}^{+1}(\mathbf{k})$$

$$\rightarrow H_F(\mathbf{k}) = \frac{i}{T} \ln U_F(\mathbf{k}) = \frac{\pi}{T} - \frac{1}{T} H_{\text{Dirac}}^{+1}(\mathbf{k})$$

$$\rightarrow H_F(\mathbf{k}) = \frac{\pi}{T} + \begin{cases} H_{\text{Dirac}}^{+1}(\mathbf{k}) & (d = 2n) \\ H_{\text{Dirac}}^{-1}(\mathbf{k}) & (d = 2n + 1) \end{cases}$$

$$\rightarrow \nu_j^\pi = \begin{cases} \nu_j^R & (d = 2n) \\ -\nu_j^R & (d = 2n + 1) \end{cases}$$



フロケ系の拡張NN定理の証明

Dirac Hamiltonianのgapless top#について

- 例)

$$\begin{aligned} H(k) &= k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 & \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\ -H(k) &= -k_1 \sigma_1 - k_2 \sigma_2 \\ &\approx k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 = H(k) & E &= \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \end{aligned}$$

- 一般に

$$H_{\text{Dirac}}^{+1}(k) = k_1 \Gamma_1 + \cdots + k_d \Gamma_d$$

$$\begin{aligned} -H_{\text{Dirac}}^{+1}(k) &= -[k_1 \Gamma_1 + \cdots + k_d \Gamma_d] = \begin{cases} k_1 \Gamma_1 + \cdots + k_d \Gamma_d & (d = 2n) \\ k_1 \Gamma_1 + \cdots + k_{d-1} \Gamma_{d-1} - k_d \Gamma_d & (d = 2n + 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} H_{\text{Dirac}}^{+1}(k) & (d = 2n) \\ H_{\text{Dirac}}^{-1}(k) & (d = 2n + 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Extended NN Thm for Floquet system

$$n^{\text{P}} = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^{\text{R}} = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^{\text{R}}$$

$$n^{\text{F}} = n^{\text{P}}$$

$$\nu_j^0 = \nu_j^{\text{R}}$$

$$\nu_j^{\pi} = \begin{cases} \nu_j^{\text{R}} & (d = 2n) \\ -\nu_j^{\text{R}} & (d = 2n + 1) \end{cases}$$

- まとめて、

$$n^{\text{F}} = \sum_j \nu_j^0 = \sum_j \nu_j^{\pi} \text{ for } d : \text{odd}$$

$$n^{\text{F}} = \sum_j \nu_j^0 = - \sum_j \nu_j^{\pi} \text{ for } d : \text{even}$$

Extended NN Thm for Floquet system

$$n^{\text{P}} = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^{\text{R}} = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^{\text{R}}$$

証明終了

$$n^{\text{F}} = n^{\text{P}} \quad \nu_j^0 = \nu_j^{\pi} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nu_j^{\text{R}} & (d = 2n) \\ -\nu_j^{\text{R}} & (d = 2n + 1) \end{array} \right.$$

- まとめて、

$$n^{\text{F}} = \sum_j \nu_j^0 = \sum_j \nu_j^{\pi} \text{ for } d : \text{odd}$$

$$n^{\text{F}} = \sum_j \nu_j^0 = - \sum_j \nu_j^{\pi} \text{ for } d : \text{even}$$

具体例: フロケ系 カイラル対称クラス d=2

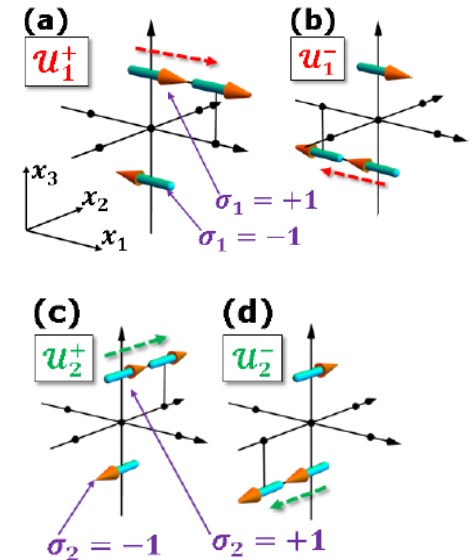
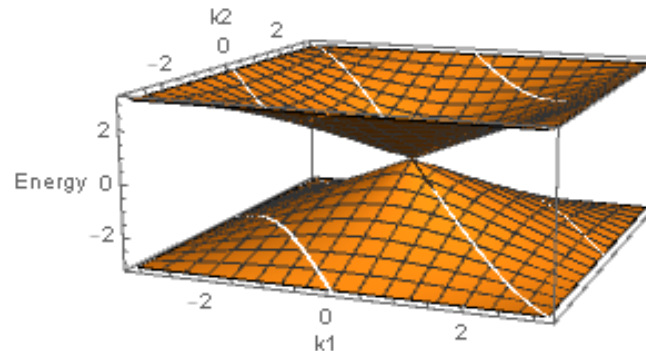
- モデル

$$\mathcal{U}_j^\pm := P_j^\pm e^{\mp i k_j} + P_j^\mp \quad P_j^\pm := (\sigma_0 \pm \sigma_j) / 2$$

$$\mathcal{U}_F := \mathcal{U}_{h,2}^- \mathcal{U}_1^- \mathcal{U}_{h,2}^+ \mathcal{U}_{h,2}^- \mathcal{U}_1^+ \mathcal{U}_{h,2}^+$$

- カイラル対称性 $\sigma_3 \mathcal{U}_F^\dagger \sigma_3 = \mathcal{U}_F$

- エネルギースペクトル



S. Higashikawa, M. Nakagawa, and M. Ueda, PRL(19).

- $n^F = \sum_j \nu_j^0 = - \sum_j \nu_j^\pi$ が成り立つことをチェックする。

具体例: フロケ系 カイラル対称クラス d=2

$$n^F = 1$$

- $\sigma_3 \mathcal{U}_F^\dagger \sigma_3 = \mathcal{U}_F$ より $\sigma_3 \mathcal{U}_F(k)$ は Hermitian かつ gapped.

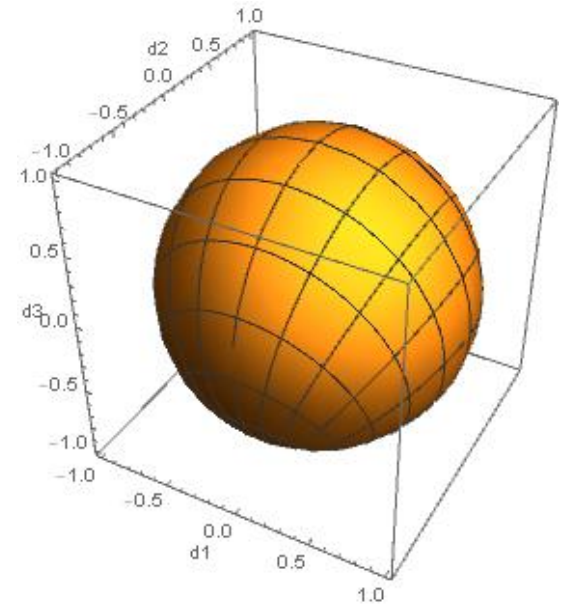
- したがって、 $n^F := Ch[\sigma_3 \mathcal{U}_F(k)]$ となる。

$$\sigma_3 \mathcal{U}_F(k) = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$d_1 = -\cos^2\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin k_2$$

$$d_2 = -\sin k_1 \cos\left(\frac{k_2}{2}\right)$$

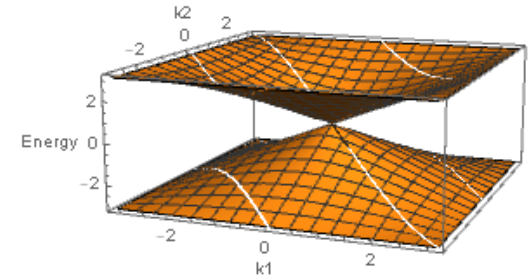
$$d_3 = \cos k_1 \cos^2\left(\frac{k_2}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{k_2}{2}\right)$$



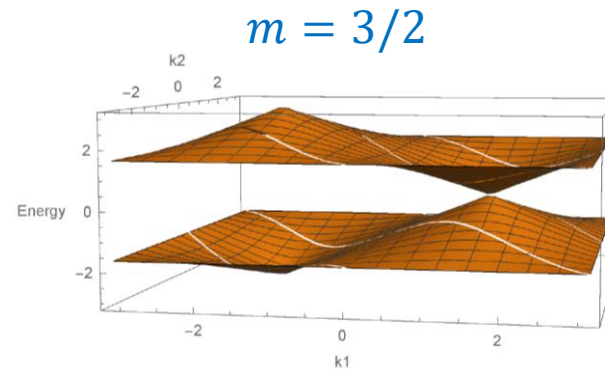
- $Ch[\sigma_3 \mathcal{U}_F(k)] = (\text{covering number of } \mathbf{d} \text{ vector}) = 1$

具体例: フロケ系 カイラル対称クラス d=2

$$n^F = \sum_j \nu_j^0 = - \sum_j \nu_j^\pi$$



- 摂動を加える: $\mathcal{U}'_F := e^{i\frac{m}{2}\sigma_1} \mathcal{U}_F e^{i\frac{m}{2}\sigma_1}$



$$w := \frac{1}{4\pi i} \int \text{tr} [\Gamma H_F^{-1}(\mathbf{k}) dH_F(\mathbf{k})]$$

$$H_F(m + \delta k_1, \delta k_2) = \delta k_1 \sigma_1 + \left(\cos^2 \frac{m}{2} \right) \delta k_2 \sigma_2 + O(\delta k^2) \rightarrow w = 1$$

$$H_F(m + \pi + \delta k_1, \delta k_2) = \pi + \delta k_1 \sigma_1 - \left(\sin^2 \frac{m}{2} \right) \delta k_2 \sigma_2 + O(\delta k^2) \rightarrow w = -1$$

まとめ

- フロケ系・非エルミート系の拡張NN定理を得た。

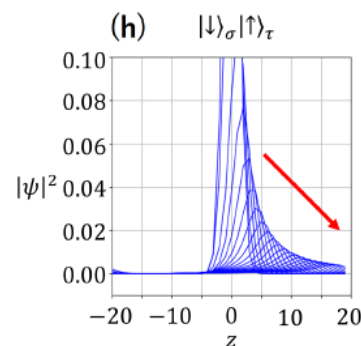
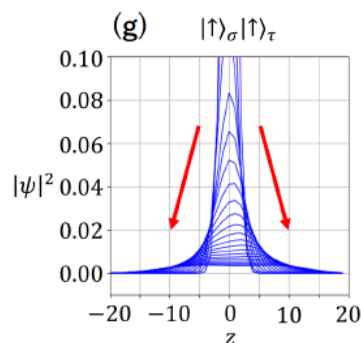
$$n^F = \sum_j \nu_j^0 = \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d : \text{odd}$$

$$n^F = \sum_j \nu_j^0 = - \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d : \text{even}$$

$$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$$

- カイラル磁気(表皮)効果

磁場の方向にpumping



- フロケ系・非エルミート系のtopological duality

Floquet systems	tab	non-Hermitian systems
AZ	Symmetry	AZ [†]
$\epsilon_F = 0$	Gap	$\text{Im} E > 0$ real line-gap
$\epsilon_F = \pi$	Gap	$\text{Im} E < 0$ real line-gap
Around $\epsilon_F = 0$	Dynamical Anomaly	$\text{Im} E > 0$, Long time dynamics
$n^F = \sum_j \nu_j^0 = \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d = 2n$ $n^F = \sum_j \nu_j^0 = - \sum_j \nu_j^\pi \text{ for } d = 2n + 1$	Extended NN theorem	$n^P = \sum_{\text{Im} E_j > 0} \nu_j^R = - \sum_{\text{Im} E_j < 0} \nu_j^R$