カイラル線形シグマ模型における磁気効果の非摂動くりこみ群を用いた解析

佐藤 大輔　金沢大

共同研究者:
青木 健一, 山田 雅俊　金沢大

基研研究会「熱場の量子論とその応用」

Introduction

- 強い背景磁場
  - 重イオン衝突実験におけるかすり衝突: $qB \sim 10m_\pi^2$
- 磁場に対して横方向の運動量$p_\perp$の量子化:

$$p_\perp^2 = (2n+1-2s)|qB|, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

s :スピン

  - ゼロモードがあるためにクォークのループ補正の次元が下がる:

1+3⇒1+1

- Magnetic catalysis

Gusynin, Miransky, Shovkovy

  - 磁場に対してカイラル凝縮$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$が増加する.
- Magnetic Inhibition
  - Lattice simulation でカイラル相転移温度 T_cが磁場に対して減少することが報告される. Bali, et al. (2011, 2012).
- Dimensional reductionによる説明
  - Mermin-Wagner-Coleman定理
  - Neutral pionによるdimensional reduction

Fukushima & Hidaka (2012)

背景磁場中でのFermion Propagator

- 背景磁場:一様磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$
- Proper-time表示 $S(x,y) = \int_0^\infty ds\, \mathrm{e}^{isS^{-1}(x,y)}$
- Fermion propagatorが運動量固有状態で表せる:

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$$
$$A^\mu(x) = (0, -\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0)$$

J. Schwinger (1950)

$$\tilde{S}(p) = \int_{1/\Lambda^2}^\infty ds \exp\left[-s\left(p_\parallel^2 + p_\perp^2 \underline{\frac{\tanh(qBs)}{qBs}} + m^2\right)\right] \times (\text{term including gamma matrices})$$

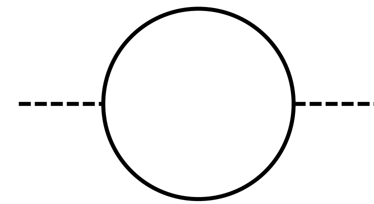
磁場に対して縦方向の運動量:$p_\parallel^2 = p_4^2 + p_z^2$　横方向の動量:$p_\perp^2 = p_x^2 + p_y^2$

Λ :UV cutoff

Magnetic Catalysis vs. Magnetic Inhibition

- Propagator of neutral pion

$$iD_\pi^{-1}(p) \simeq Z_\pi^{-1}\left(p_\parallel^2 - \underline{v_\perp^2} p_\perp^2 - m_\pi^2\right)$$



横速度: $v_\perp^2 \sim \dfrac{\log \frac{e^{-\gamma}\Lambda^2}{m^2}}{\frac{|qB|}{m^2}}$

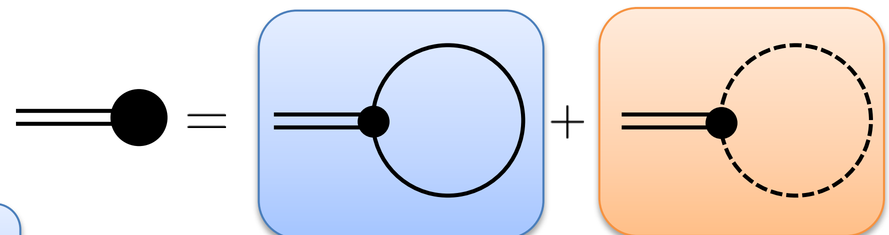
m : constituent quark mass

G : 4-fermi結合定数

V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I.A. Shovkovy (1996)

- 有効ポテンシャル

$$V(m) = \frac{m^2}{2G} + \boxed{V_q(m)} + \boxed{V_\pi(m)}$$



$$V_q(m) \sim -\frac{|qB|m^2}{8\pi^2}\log\frac{e^{1-\gamma}\Lambda^2}{m^2}$$

$$V_\pi(m) \sim +\xi\frac{|qB|m^2}{16\pi^2}\log\frac{\Lambda^2 e^{2-\gamma}}{m^2}$$

Pionの横運動量に紫外切断:

$$p_\perp^2 \le \xi|qB|$$

Fukushima & Hidaka (2012)

非摂動くりこみ群(NPRG)

- Wetterichのflow(NPRG)方程式

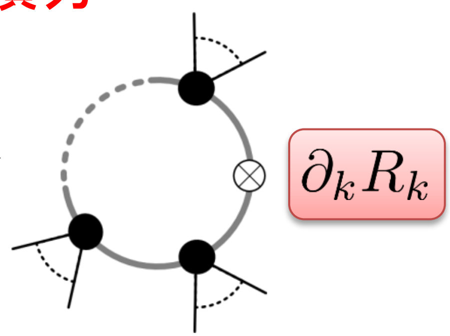
Wetterich (1993)

$$\partial_k \Gamma_k[\Phi] = \frac{1}{2}\mathrm{STr}\frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + R_k}\partial_k R_k \qquad \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{ij}(p,q) = \frac{\delta^2\Gamma_k[\Phi]}{\delta\Phi_i(-p)\delta\Phi_j(q)}$$

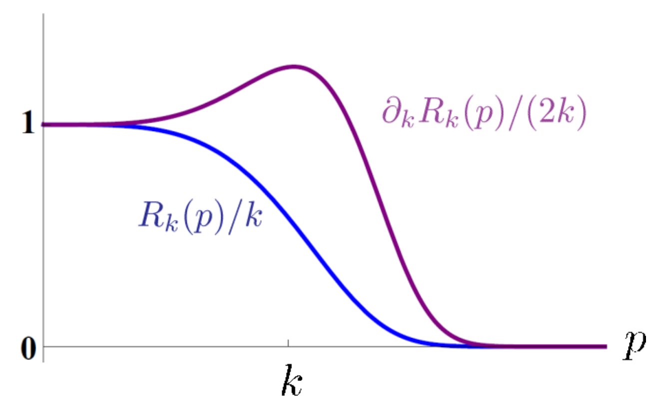
$\Gamma_k[\Phi]$: 運動量スケールkに赤外切断が入った有効作用
$R_k(i\partial)$: 赤外切断を与えるregulator

- Shell mode積分

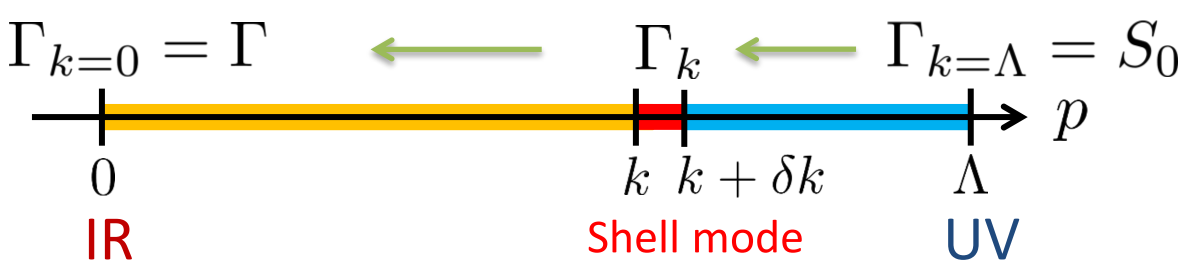
$$\partial_k \Gamma_k[\Phi] =$$



Regulator: $R_k(p)$



- flow方程式を解く:

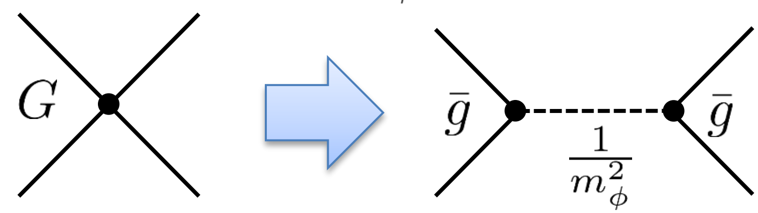


線形シグマ模型(Quark-Meson model)

1-flavor Nambu—Jona-Lasinio模型 ($N_c = 3$)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}} = \bar{\psi} i \not{D} \psi + \boxed{\frac{G}{2}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i\gamma_5 \psi)^2 \right]}$$

$$G = \frac{\bar{g}^2}{m_\phi^2}$$



Bosonization (“補助場の導入”)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{D} \psi + \boxed{i\bar{g}\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi} + \boxed{\frac{Z_\phi}{2}}(\partial_\mu \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{m_\phi^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2)$$

$$\boxed{Z_\phi \ll 1}$$

$$\boldsymbol{\phi} = (\sigma, \pi)$$

Truncateされた有効作用(“Next LPA”)

$$\Gamma_k[\Phi] = \int d^4x \left\{ \frac{Z_\parallel}{2}(\partial_\parallel \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{Z_\perp}{2}(\partial_\perp \boldsymbol{\phi})^2 + U_k(\boldsymbol{\phi}) + \bar{\psi}\left[i\not{D} + i\bar{g}(\sigma + i\gamma_5\pi) \right]\psi \right\}.$$

$U_k(\phi)$, $Z_\parallel$, $Z_\perp$についてのRG方程式を導出する.

Proper-time flow

Litim & Pawlowski (2002)

- 有効作用の2点関数$x = \Gamma^{(2)}$をregulatorの引数にする:

$$R_{k,\psi}(i\partial) \Rightarrow R_{k,\psi}(x_\psi) \qquad x_\psi = i\not{D} + i\bar{g}\left(\bar{\sigma} + i\gamma_5\bar{\pi}\right)$$

$$R_{k,\phi}(i\partial) \Rightarrow R_{k,\phi}(x_\phi) \qquad x_\phi = -Z_\parallel \partial_\parallel^2 - Z_\perp \partial_\perp^2 + U_k^{(2)}(\bar{\sigma}, \bar{\pi})$$

- Flow方程式の右辺がProper-timeで表せる:

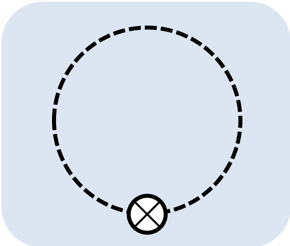
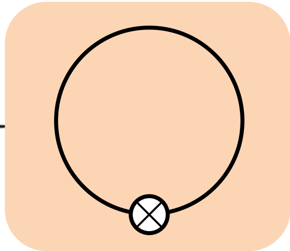
$$\mathrm{Tr}\frac{1}{x + R_k(x)}\partial_k R_k(x) \to \mathrm{Tr}\int_0^\infty ds\, \partial_k f_k(s) e^{-sx}$$

$f_k(s)$: proper-timeのregulator

※Note
- 背景場と通常の場を同一視する.
- 背景場を導入することで現れるRegulatorのcutoff dependenceは無視.

Proper-time flow方程式 ($T=0$)

- 有効ポテンシャルのflow方程式

$\partial_k U_k =$  $+$ 

横速度 : $v_\perp^2 = \dfrac{Z_\perp}{Z_\parallel}$

$$\partial_k U_k(\rho) = \int_0^\infty ds \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \partial_k f_k(s) \Big[-\mathrm{e}^{-s\left(p_\parallel^2 + v_\perp^2 p_\perp^2 + M_\sigma^2\right)} - \mathrm{e}^{-s\left(p_\parallel^2 + v_\perp^2 p_\perp^2 + M_\pi^2\right)}$$
$$+ 4N_\mathrm{c}\mathrm{e}^{-s\left(p_\parallel^2 + \frac{\tanh qBs}{qBs} p_\perp^2 + M_\psi^2\right)} \Big]$$

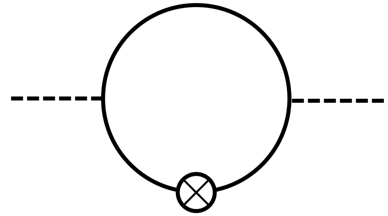
質量 :

$$M_\sigma^2 = \frac{\partial_\rho U + 2\rho\partial_\rho^2 U}{Z_{\phi,\parallel}},\ M_\pi^2 = \frac{\partial_\rho U}{Z_{\phi,\parallel}},\ M_\psi^2 = 2\bar{g}^2\rho.$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 + \pi^2\right)$$

Note:
- Large-N_C leadingは平均場近似と同様の振る舞いを与える.

- $Z_{\parallel/\perp}$のflow方程式



$$\partial_k Z_\parallel = 4N_c\bar{g}^2 \int_0^\infty ds \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\partial_k f_k(s) s^2\, \mathrm{e}^{-s\left(p_\parallel^2+\frac{\tanh qBs}{qBs}p_\perp^2+M_\psi^2\right)}$$

$$\partial_k Z_\perp = 4N_c\bar{g}^2 \int_0^\infty ds \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\partial_k f_k(s) s^2 \frac{\tanh(qBs)}{qBs}\mathrm{e}^{-s\left(p_\parallel^2+\frac{\tanh qBs}{qBs}p_\perp^2+M_\psi^2\right)}$$

- 採用するregulator: $\partial_k f_k(s) = -\frac{2k^4}{3\sqrt{\pi}} s^{3/2}\mathrm{e}^{-s/k^2}$ Schaefer & Wambach (2005)

$\partial_k M_\psi = 0,\ M_\psi/\Lambda \ll 1$ として$Z_{\parallel/\perp}$を積分する:

$$v_\perp^2 = \frac{Z_\perp}{Z_\parallel} \sim \frac{\log\frac{\Lambda^2}{M_\psi^2}}{\frac{|qB|}{M_\psi^2}}$$

Large-N_cで $v_\perp^2$の振る舞いも平均場近似と一致する.

有効ポテンシャル

- ポテンシャルの極小値の周りで展開:

$$U_k(\phi) = \sum_{n=0}^{3} \frac{\bar{\lambda}_n}{n!}(\rho - \rho_0)^n - \underline{\bar{c}\,\sigma} \qquad \rho = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 + \pi^2\right),\ \rho_0 = \frac{1}{2}\sigma_0^2$$

Breaking term

$$\left.\frac{\partial}{\partial\sigma}U_k(\phi)\right|_{\phi=(\sigma_0,0)} = 0 \Rightarrow \bar{\lambda}_1\sigma_0 = \bar{c}$$

Pion崩壊定数: $f_\pi = \sigma_0|_{k\to 0}$

- 初期条件:

$$k = \Lambda = 2.0\ [\mathrm{GeV}]$$

$$\bar{g} = 3.2 \qquad \boxed{\bar{\lambda}_1(\Lambda) = m_\phi^2,\ \bar{c}} \Leftarrow$$

At $T = 0$ & $qB = 0$,

$$f_\pi = 0.030\ [\mathrm{GeV}]$$

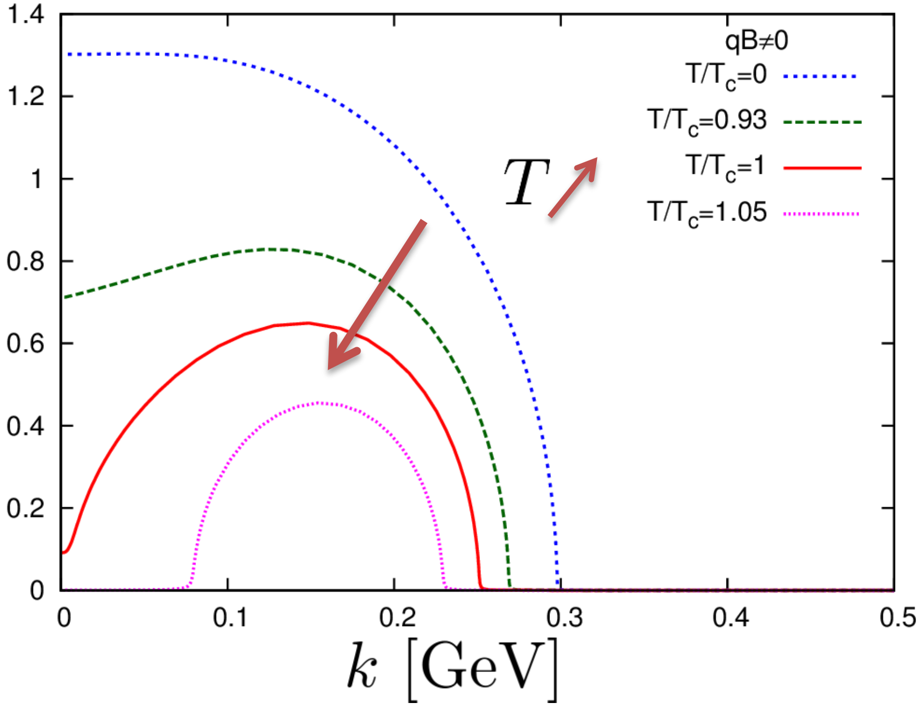
$$m_\pi/m_\psi \sim 0.01$$

IR での観測量から決定

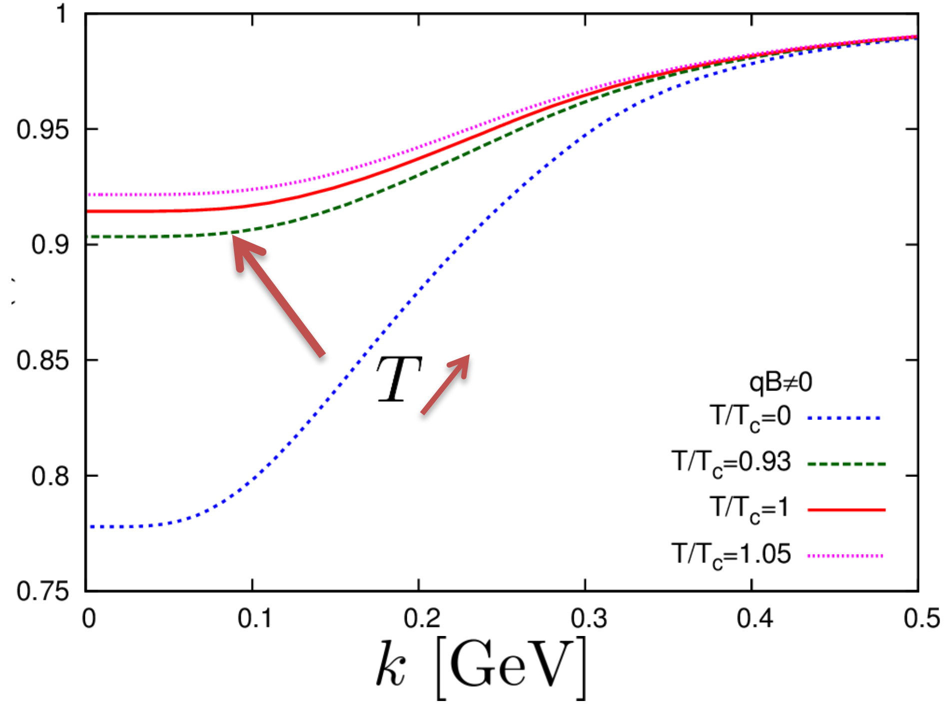
くりこみ群flowの温度依存性

$$qB/f_\pi^2 = 40$$

$\sigma_0(T, qB; k)/\ f_\pi|_{T=0,qB=0}$

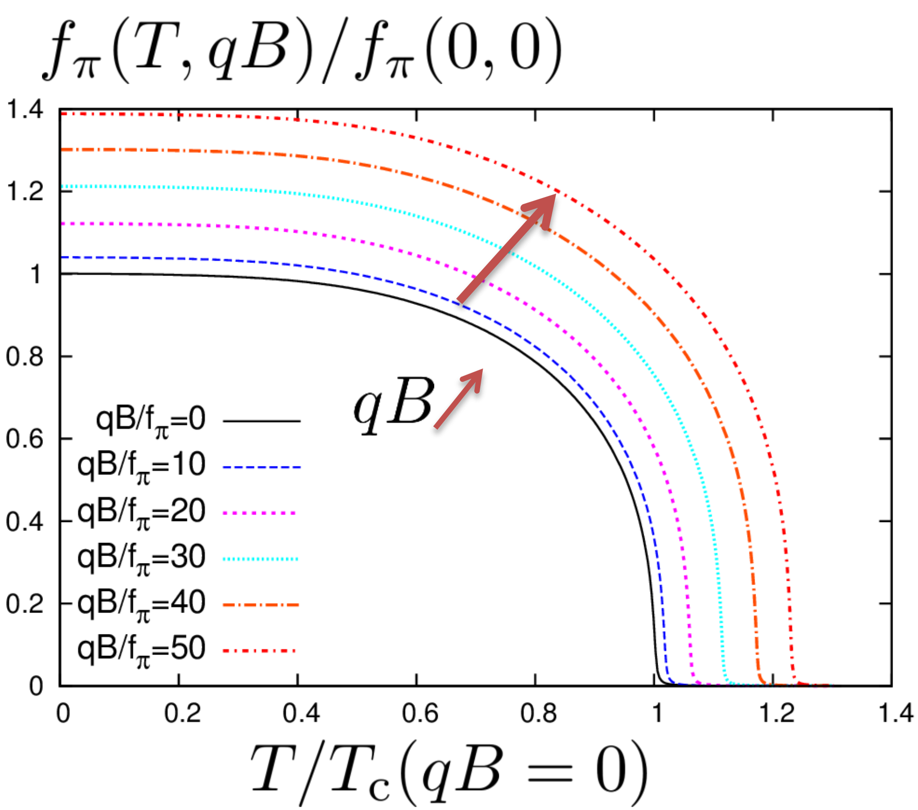


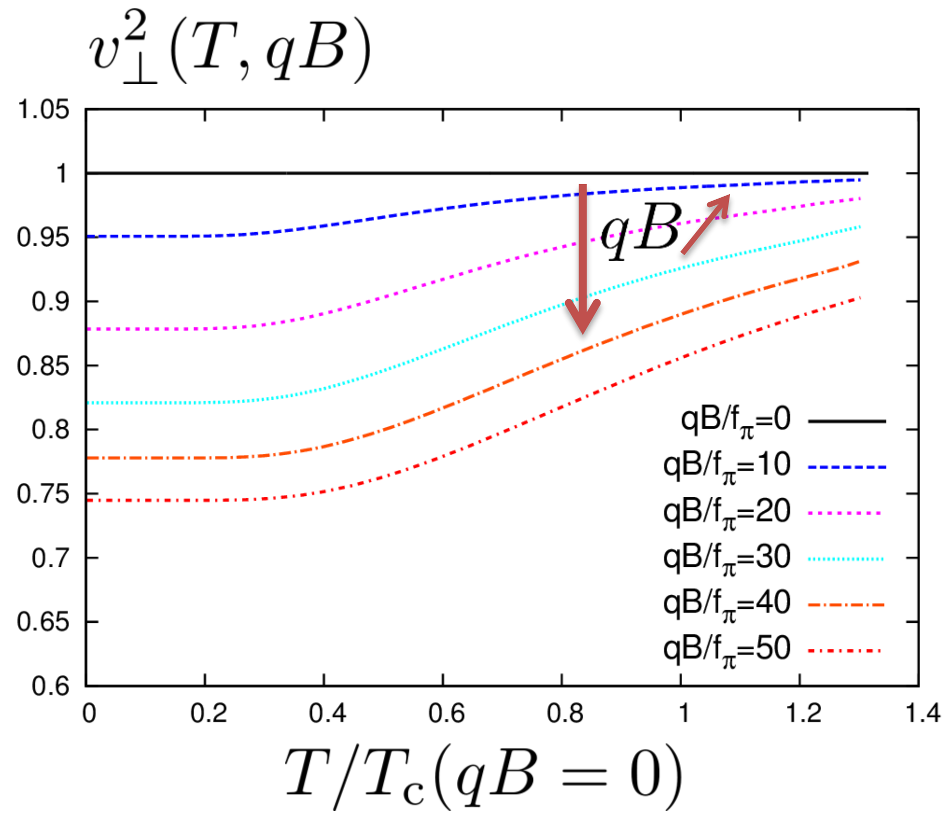
$v_\perp^2(T, qB; k)$



結果

$$0 \leq qB/f_\pi^2 \leq 50$$





$$T_c(qB=0) \simeq 2.0 \times f_\pi$$

Only Magnetic Catalysis,

No Mangnetic Inhibition.

Magnetic Inhibitionが見えない理由

ポテンシャルのflow方程式

$$\partial_k U_k = \int_0^\infty ds \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \partial_t f_k(s) \Big[- \mathrm{e}^{-s\left(p_\parallel^2 + v_\perp^2 p_\perp^2 + M_\sigma^2\right)} - \mathrm{e}^{-s\left(p_\parallel^2 + \underline{v_\perp^2} p_\perp^2 + M_\pi^2\right)} + 4N_\mathrm{c}\mathrm{e}^{-s\left(p_\parallel^2 + \underline{\frac{\tanh qBs}{qBs}} p_\perp^2 + M_\psi^2\right)} \Big]$$

$$s \sim \frac{1}{k^2}$$

- Pionのdimensional reductionが起きるには，$\underline{v_\perp^{-2}(k)}$と$\underline{qB/k^2}$のsingularityが同等であることが必要：

$$v_\perp^{-2}(k) \sim \frac{qB}{k^2}$$

- 実際には，$v_\perp^{-2}(k)$はqB/k^2と比較してsingularityが小さくなってしまう.

$$M_\psi = 0$$

$$Z_\perp(k) \sim \frac{N_\mathrm{c}\bar{g}^2}{16\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{k^2}$$

$$Z_\parallel(k) \sim \frac{N_\mathrm{c}\bar{g}^2}{32\pi^2} \frac{qB}{k^2}$$

$$\Rightarrow \quad v_\perp^{-2} = \frac{Z_\parallel}{Z_\perp} \sim \frac{\frac{qB}{k^2}}{\log \frac{\Lambda^2}{k^2}}$$

ただし，Pionの横運動量を紫外切断すればMIは見えるが．．．

$$p_\perp^2 \leq \xi |qB|$$

まとめ

- 背景場の方法を使って，定磁場の下でのNPRG方程式を導出し，微分展開について運動項の係数の補正までを評価した（Next LPA).
- Large-N leadingでは非摂動くりこみ群と自己無撞着方程式の結果は一致する．ただし，non-leadingからその効果の取り込まれ方が異なる.
- ここで用いたTruncationではMagnetic Inhibitionの傾向は確認できなかった.
- 今後の課題
  - Truncateしたdiagramや相互作用を取り入れる.
  - “QCD”でどうなるか.

Backup Slides

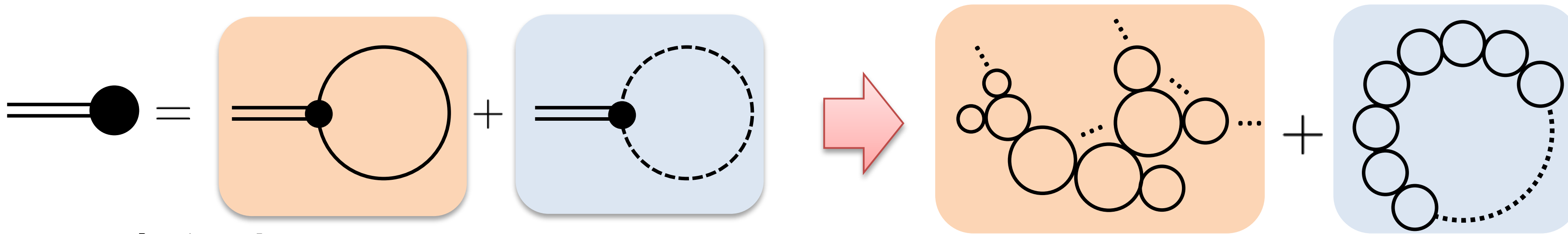
非摂動くりこみ群を使った先行研究

- Scherer & Gies (2012), Fukushima & Pawlowski (2012)
- Skokov (2012)
  - Polyakov loop, 2-flavor quark-meson model
  - 相転移温度T_cの評価
- Andersen & Tranberg (2012)
  - 有限密度系への拡張

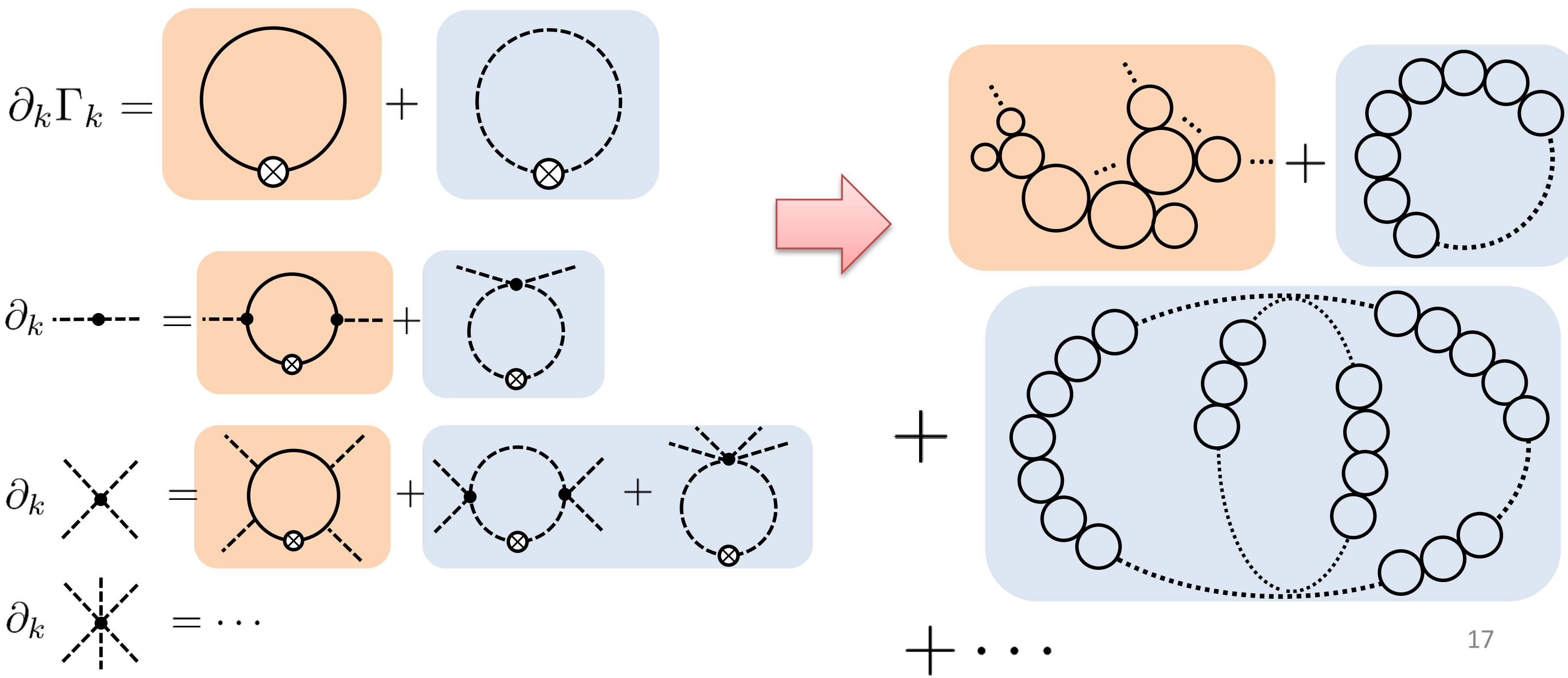
- Magnetic inhibitionは確認できず.
- 微分展開のlowest order:
  LPA（運動項の係数への補正を無視）

ダイアグラムの足し上げの違い

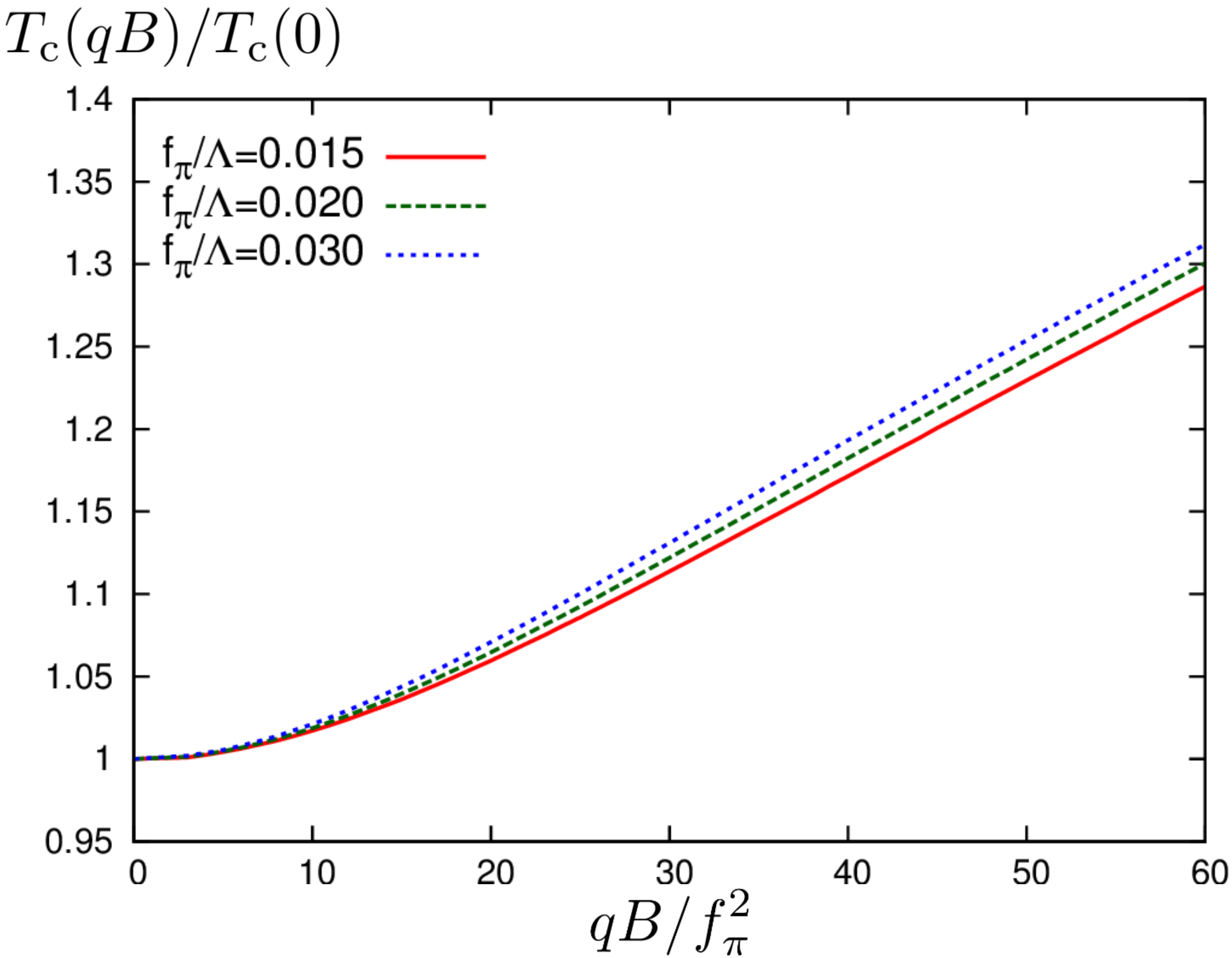
自己無撞着方程式



NPRG方程式



相図



$T_c(qB)/T_c(0)$
1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0.95
f_π/Λ=0.015
f_π/Λ=0.020
f_π/Λ=0.030
0
10
20
30
40
50
60
qB/f_π^2