

2重井戸型ポテンシャルに捕捉された 冷却原子気体の非平衡初期分布緩和過程 に対する非平衡Thermo Field Dynamics

2013/8/27

早稲田大学
中村 祐介、桑原幸朗、山中由也

2重井戸型ポテンシャルに捕捉された 冷却原子気体の非平衡初期分布緩和過程 に対する非平衡Thermo Field Dynamics

- 冷却原子系における緩和過程
- Thermo Field Dynamics
 - 非摂動ハミルトニアンが取るべき構造
 - 幾つかパラメータが残る
 - それを決定する繰り込み条件 量子輸送方程式が導出される
- 2重井戸型模型に対する数値計算

冷却原子系における緩和過程

冷却原子系

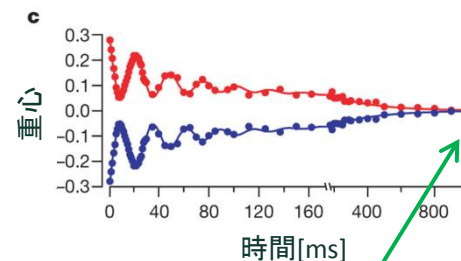
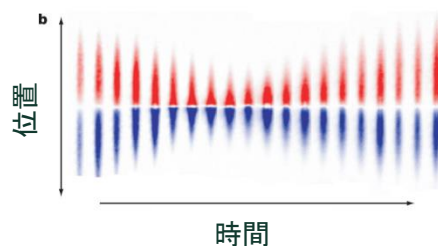
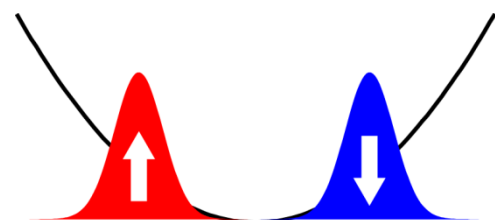
- ・真空中に原子気体を捕捉
- ・実験制御性が高い
- ・遅い非平衡過程



熱場の量子論の
研究に最適な系

実験の例: 2成分フェルミ気体の衝突

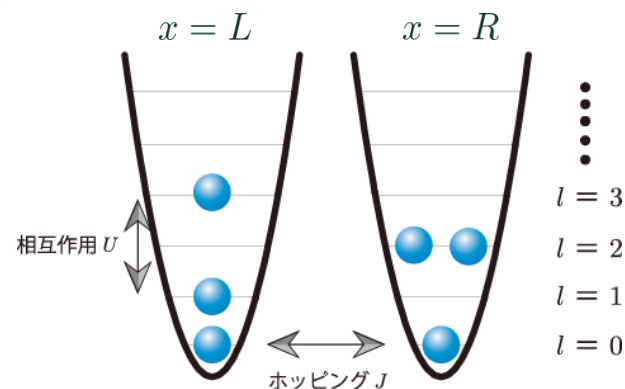
A. Sommer *et al.*, Nature **472**, 201 (2011)



約1秒かけて平衡へ

2重井戸型模型

- ・2つの調和振動子型トラップを接続した模型
- ・「井戸間の移動」 + 「井戸内の熱緩和」



以後簡単の為、BECなしの**1成分ボース気体**のみを扱う。(多成分やフェルミオンでも出来る)

ハミルトニアン

$$H = -J \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\psi_{\ell L}^{\dagger} \psi_{\ell R} + \psi_{\ell R}^{\dagger} \psi_{\ell L} \right) + \sum_{x=L,R} \sum_{\ell=0}^{\infty} \nu_{\ell} \psi_{\ell x}^{\dagger} \psi_{\ell x} + \frac{U}{2} \sum_{x=L,R} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4=0}^{\infty} g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4} \psi_{\ell_1 x}^{\dagger} \psi_{\ell_2 x}^{\dagger} \psi_{\ell_3 x} \psi_{\ell_4 x}$$

井戸のインデックス $x = L, R$

井戸内のモード $\ell = 0, 1, 2, \dots$

$$[\psi_{\ell x}, \psi_{\ell' x'}^{\dagger}] = \delta_{\ell \ell'} \delta_{x x'}$$

$$\nu_{\ell} = \Omega(\ell + 1/2)$$

J : 井戸間のホッピング

U : 井戸内の相互作用

$$g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4} = \int dz u_{\ell_1}(z) u_{\ell_2}(z) u_{\ell_3}(z) u_{\ell_4}(z)$$

$u_{\ell}(z)$: 調和振動子の固有関数

Thermo Field Dynamics

TFDでは**演算子の自由度を倍化**することで、熱的状況を**純粋状態**で記述する

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\quad} & a, \tilde{a} \\
 |m\rangle\rangle & & |m_1, m_2\rangle\rangle
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 [a, a^\dagger] = 1 & [a, \tilde{a}] = 0 \\
 [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 & [a, \tilde{a}^\dagger] = 0
 \end{array}$$

熱的な混合状態期待値: $\langle A \rangle \equiv \text{Tr}[\rho A] = \sum_m \langle\langle m | \rho A | m \rangle\rangle = \langle 0 | A | 0 \rangle$

ただし

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | &\equiv \sum_m \langle\langle m, m | & n &\equiv \langle a^\dagger a \rangle \\
 | 0 \rangle &\equiv \frac{1}{1+n} \sum_m \left(\frac{n}{1+n} \right)^m |m, m\rangle\rangle
 \end{aligned}$$

倍加された空間の純粋状態
i.e. 熱的真空

分布関数。
平衡ならBose-Einstein分布。
非平衡なら時間依存する未知関数

TFDのハミルトニアン

全ハミルトニアン

もともとの全ハミルトニアンが H ならば、

TFDのハミルトニアンは $\hat{H} = H - \tilde{H}$

Cf. 密度行列の時間発展演算子は H ではなく、Liouville演算子 $L = [H, \bullet]$

相互作用描像を定義して、摂動計算するのに必要

非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_u$ はどうあるべきか？

非平衡ではナイーヴに $\hat{H}_u = \omega(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a})$ とするのは**良くない**。

$\dot{n} \neq 0$

$$n \equiv \langle 0 | a^\dagger a | 0 \rangle$$



幾つか仮定をおいて、**非摂動ハミルトニアン**が持つべき構造を求める

非摂動ハミルトニアン的一般形

N. Nakamura and Y. Yamanaka, Ann. Phys. (N.Y.) **331**, 51 (2013).

仮定1: 演算子について2次以下

仮定2: 大域的位相変換 ($a \rightarrow ae^{i\theta}$) の下で不変 a^2 等を含まない

仮定3: 密度行列はエルミートで規格化されている $\langle 0 | \hat{H}_u = 0, \quad \hat{H}_u^\sim = -\hat{H}_u$

※BECがない場合を想定

非摂動ハミルトニアン的一般形

$$\hat{H}_u = c_1 a^\dagger a + c_2 \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + c_3 a \tilde{a} + c_4 a^\dagger \tilde{a}^\dagger + c_5$$

$$c_1 = \omega - i\dot{n} - i\gamma(1 + 2n)$$

$$c_3 = i\dot{n} + 2i\gamma(1 + n)$$

$$c_2 = -\omega - i\dot{n} - i\gamma(1 + 2n)$$

$$c_4 = i\dot{n} + 2i\gamma n$$

実数パラメータ3つ分 ($\omega, \dot{n}, \gamma$) の自由度がある。

熱的Bogoliubov変換

熱的Bogoliubov変換

$$a^\mu = B^{-1, \mu\nu} \xi^\nu$$

$$\bar{a}^\mu = \bar{\xi}^\nu B^{\nu\mu}$$

$a, \tilde{a}$ は熱的真空を消去しない

$$a|0\rangle \neq 0$$
$$\tilde{a}|0\rangle \neq 0$$

熱的Bogoliubov変換

熱的真空の生成消滅演算子 $\xi, \tilde{\xi}$ を導入

$$[\xi, \xi^\dagger] = [\tilde{\xi}, \tilde{\xi}^\dagger] = 1 \quad \xi|0\rangle = 0$$

$$[\xi, \tilde{\xi}] = [\xi, \tilde{\xi}^\dagger] = 0 \quad \tilde{\xi}|0\rangle = 0$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 + n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^\mu = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad \xi^\mu = \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\bar{a}^\mu = (a^\dagger \quad -\tilde{a}) \quad \bar{\xi}^\mu = (\xi^\dagger \quad -\tilde{\xi})$$

2種類の演算子がある！

- a 演算子: $\langle 0|a^\dagger a|0\rangle \equiv n$ は分布関数
- ξ 演算子: 熱的真空上の倍加されたFock空間

ξ で書いた非摂動ハミルトニアン

$$\begin{aligned}\hat{H}_u &= c_1 a^\dagger a + c_2 \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + c_3 a \tilde{a} + c_4 a^\dagger \tilde{a}^\dagger + c_5 \\ &= (\omega - i\gamma) \xi^\dagger \xi - (\omega + i\gamma) \tilde{\xi}^\dagger \tilde{\xi} + i\dot{n} \xi^\dagger \tilde{\xi}^\dagger\end{aligned}$$

Heisenberg方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} a^\mu = [a^\mu, \hat{H}_u]$$

$$\xi^\mu = B^{\mu\nu} a^\nu$$

$n(t)$ を含む

$$i \frac{\partial}{\partial t} \xi^\mu = [\xi^\mu, \hat{H}_u - i\dot{n} \xi^\dagger \tilde{\xi}^\dagger]$$

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \xi e^{\int^t ds [-i\omega(s) - \gamma(s)]} & \xi^\dagger(t) &= \xi^\dagger e^{\int^t ds [i\omega(s) + \gamma(s)]} \\ \tilde{\xi}(t) &= \tilde{\xi} e^{\int^t ds [i\omega(s) - \gamma(s)]} & \tilde{\xi}^\dagger(t) &= \tilde{\xi}^\dagger e^{\int^t ds [-i\omega(s) + \gamma(s)]}\end{aligned}$$

3つパラメータの意味

$$n = \langle 0 | a^\dagger a | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \equiv \sum_m \langle m, m |$$

$$|0\rangle \equiv \frac{1}{1+n} \sum_m \left(\frac{n}{1+n} \right)^m |m, m\rangle$$

ξ 演算子で見ると分かる

$$\hat{H}_u = (\omega - i\gamma)\xi^\dagger \xi - (\omega + i\gamma)\tilde{\xi}^\dagger \tilde{\xi} + i\dot{n}\xi^\dagger \tilde{\xi}^\dagger$$

$$\xi(t) = \xi e^{\int^t ds [-i\omega(s) - \gamma(s)]}$$

$$\xi^\dagger(t) = \xi^\dagger e^{\int^t ds [i\omega(s) + \gamma(s)]}$$

ω : ξ 粒子のエネルギー

γ : ξ 粒子の寿命の逆数

$\dot{n}$: a 粒子数の時間変化

a 演算子でみても良く分からない

$$\hat{H}_u = c_1 a^\dagger a + c_2 \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + c_3 a \tilde{a} + c_4 a^\dagger \tilde{a}^\dagger + c_5$$

$$c_1 = \omega - i\dot{n} - i\gamma(1 + 2n)$$

$\vdots$

$\hat{H}_u$ は非エルミートだが、問題はない

← そもそも熱的ブラ真空と熱的ケット真空が共役ではない為
物理量は全て実、交換関係は保存、etc.

$$\mu, \nu = 1, 2$$

$$\xi^\mu = \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix} \quad \bar{\xi}^\mu = (\xi^\dagger \quad -\tilde{\xi})$$

繰り込み条件

$\hat{H}_u$ に含まれる3つ未知パラメータ $\omega, \dot{n}, \gamma$ は

ξ 演算子のon-shell自己エネルギー $S_\ell^{\mu\nu}(t)$ に関する繰り込み条件で決める。

ξ 演算子の伝搬関数は 2×2 の行列構造 $g^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i \langle 0 | T[\xi_H^\mu(t_1) \bar{\xi}_H^\nu(t_2)] | 0 \rangle$

➡ ξ 演算子のon-shell自己エネルギー $S^{\mu\nu}(t)$ も 2×2 の行列構造

$$\text{繰り込み条件} \quad S^{\mu\nu}(t) = 0 \quad \text{for } \forall t$$

実数8つ分の式に見えるが、 s の対称性により独立なのは3つだけ。

$$\begin{aligned} \text{Re} S^{12} &= 0 \\ S^{21} &= 0 \\ S^{22} &= S^{11,*} \end{aligned}$$

3つ未知パラメータは
一意に決定される！

$$\begin{aligned} \text{Re} S^{11} &= 0 & \omega \\ \text{Im} S^{11} &= 0 & \gamma \\ \text{Im} S^{12} &= 0 & \dot{n} \end{aligned}$$

量子輸送方程式の例



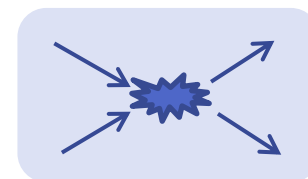
■ $\psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi$ 型相互作用で摂動の2次

■ γ と ω の時間依存性は見やすさの為省略

$$\int_s^t dt' \omega(t') \rightarrow \omega \cdot (t - s)$$

non-Markov型

衝突項

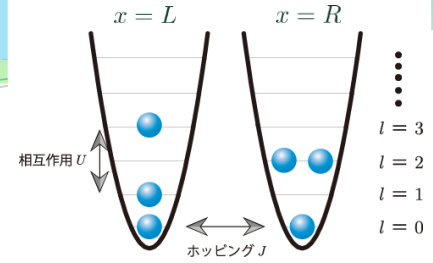


$$\begin{aligned} \dot{n}_\ell(t) = & \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \int_{-\infty}^t ds A_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell}(t, s) [n_{\ell_1} n_{\ell_2} (1 + n_{\ell_3}) (1 + n_\ell) - (1 + n_{\ell_1}) (1 + n_{\ell_2}) n_{\ell_3} n_\ell]_s \\ & \times \cos[(\omega_{\ell_1} + \omega_{\ell_2} - \omega_{\ell_3} - \omega_\ell)(t - s)] \exp[-(\gamma_{\ell_1} + \gamma_{\ell_2} + \gamma_{\ell_3} + \gamma_\ell)(t - s)] \end{aligned}$$

$\sim \delta(\omega_{\ell_1} + \omega_{\ell_2} - \omega_{\ell_3} - \omega_\ell)$
エネルギー保存

過去を忘れる効果

2重井戸型模型の数値計算

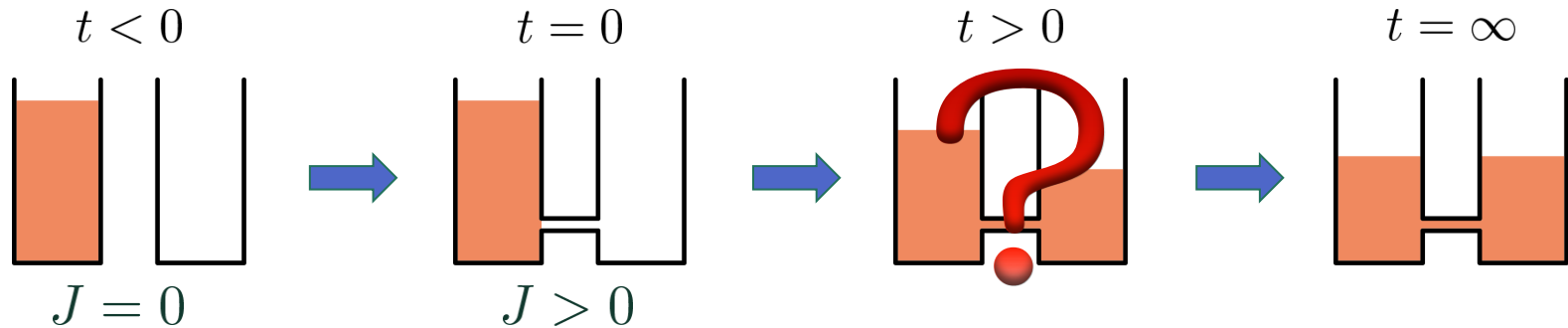


ハミルトニアン

$$H = -J \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\psi_{\ell L}^{\dagger} \psi_{\ell R} + \psi_{\ell R}^{\dagger} \psi_{\ell L} \right) + \sum_{x=L,R} \sum_{\ell=0}^{\infty} \nu_{\ell} \psi_{\ell x}^{\dagger} \psi_{\ell x} + \frac{U}{2} \sum_{x=L,R} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4=0}^{\infty} g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4} \psi_{\ell_1 x}^{\dagger} \psi_{\ell_2 x}^{\dagger} \psi_{\ell_3 x} \psi_{\ell_4 x}$$



想定する状況



左の井戸に
熱平衡の気体

左右の井戸を繋ぐ

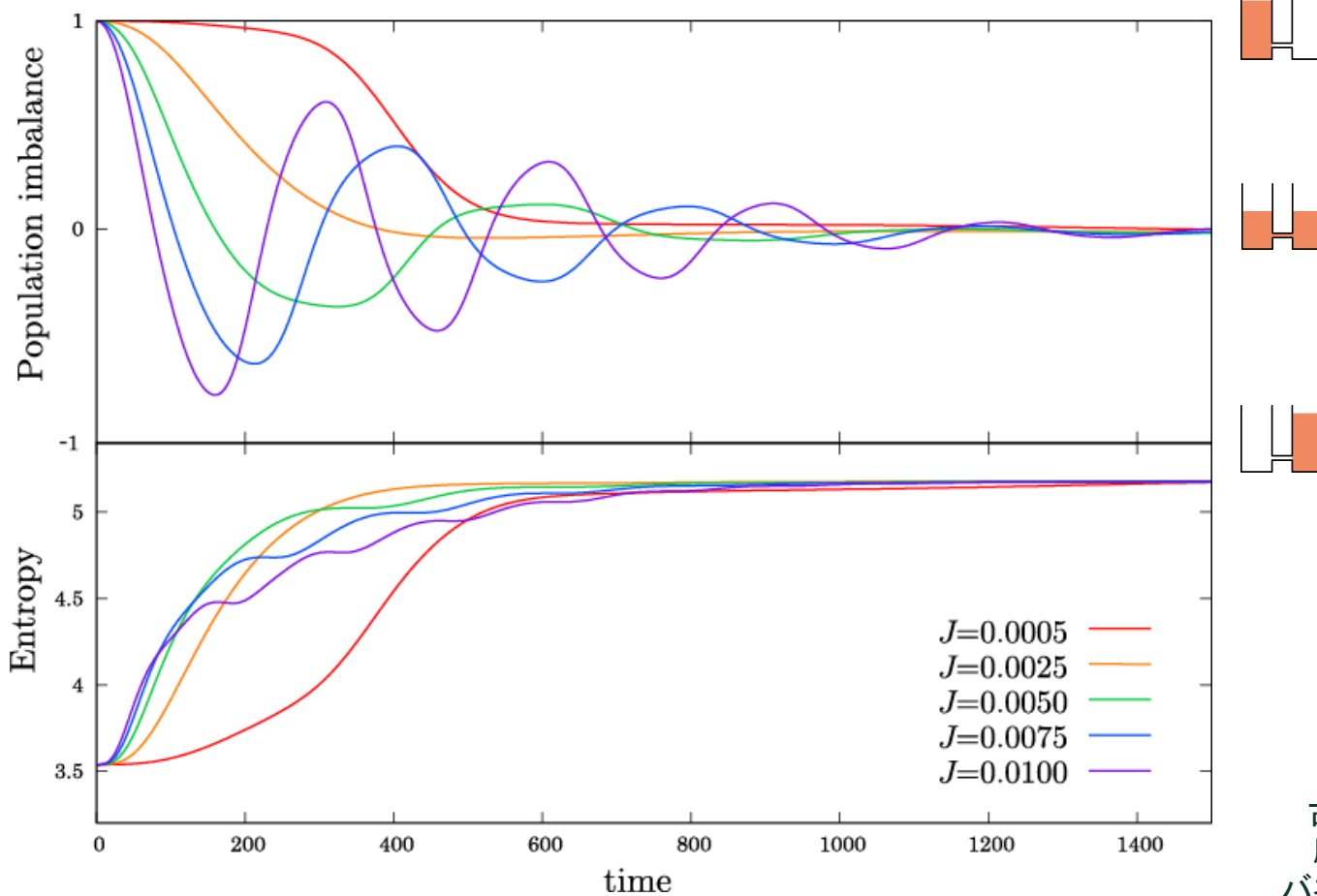
量子輸送方程式

熱平衡

数値計算結果

井戸間のポッピング

粒子数の偏りとエントロピーの J 依存性

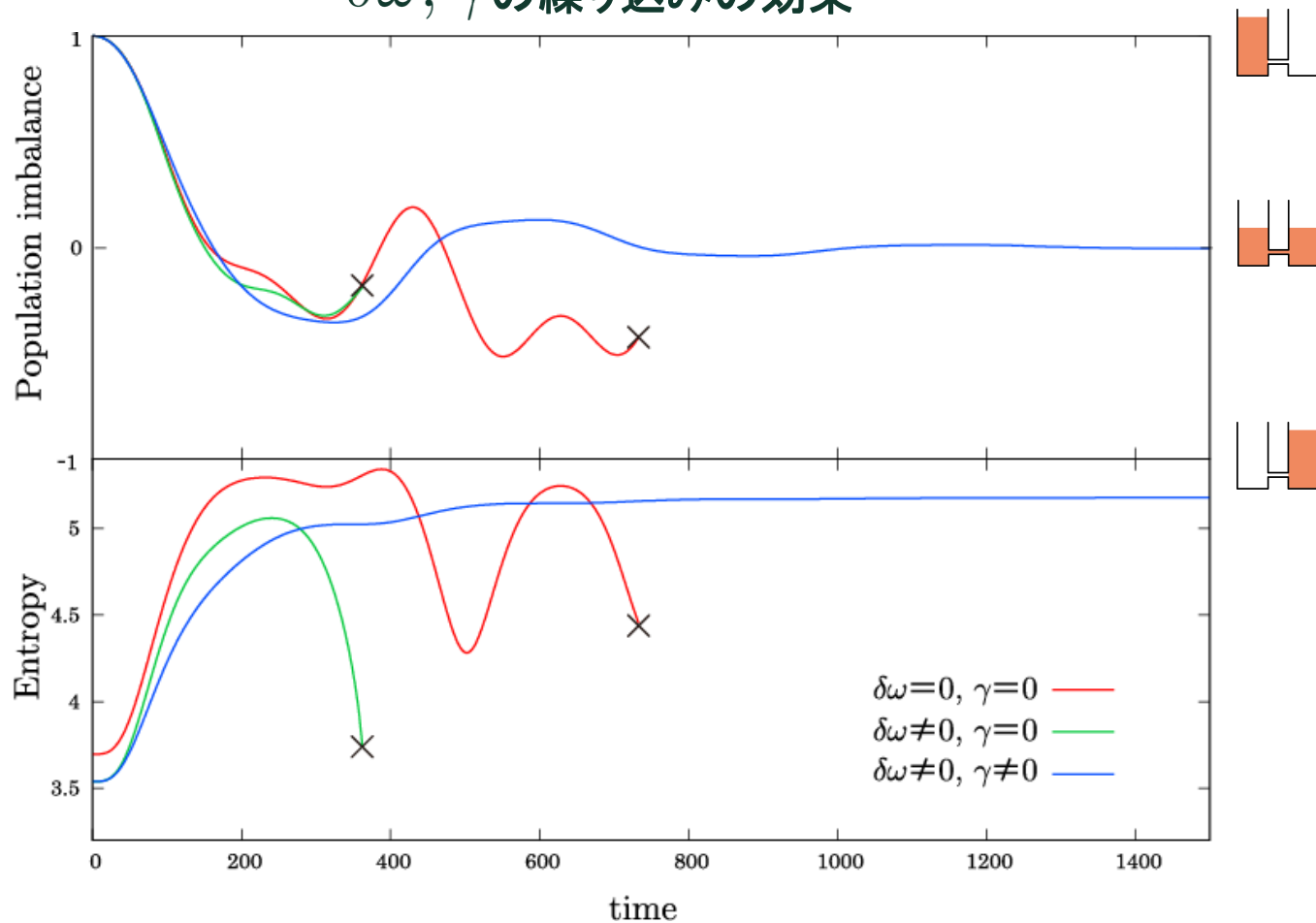


古典力学の
摩擦ありの
バネ振動と同様

- J の増加に伴って、単調減衰から減衰振動へ
- J が大きすぎても、小さすぎても緩和は遅い

数値計算結果

$\delta\omega, \gamma$ の繰り込みの効果



- γ の繰り込みは重要！
- γ を繰り込まないと、途中で粒子分布が負になって、破綻

まとめ

- 非平衡TFDにおいて、非摂動ハミルトニアンが取るべき構造
 - $\omega, \gamma, \dot{n}$ という3つのパラメータ
 - ω は準粒子のエネルギー
 - γ は準粒子の寿命の逆数
 - $\dot{n}$ は分布関数の時間変化
 - これらは自己エネルギーに対するon-shell繰り込み条件によって決定される
- 2重井戸型模型の数値計算
 - 直感的に正しい振る舞い
 - γ の繰り込みが緩和には重要である