

# 強相関Bose-Fermi混合原子気体 における 量子多体効果と熱力学的安定性

---

慶大理工 真辺 幸喜

共同研究者：慶大理工 大橋洋士

# 目次

**1.導入**

**2.定式化**

**3.結果**

**4.まとめ**

# 目次

**1.導入**

2.定式化

3.結果

4.まとめ

# 冷却原子気体で探る対形成現象



## 高い操作性

- ◆ 温度・密度
- ◆ (引力)相互作用強度

cited from Lithium III Lab. / Laboratoire Kastler Brossel

# 冷却原子気体で探る対形成現象



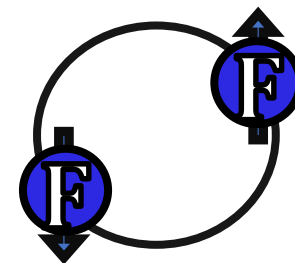
cited from Lithium III Lab. / Laboratoire Kastler Brossel

(左図) Regal, et al., PRL **92**, 040403 (2004).  
(右図) Tajima, et. al., PRA **95**, 043625 (2017)

## 高い操作性

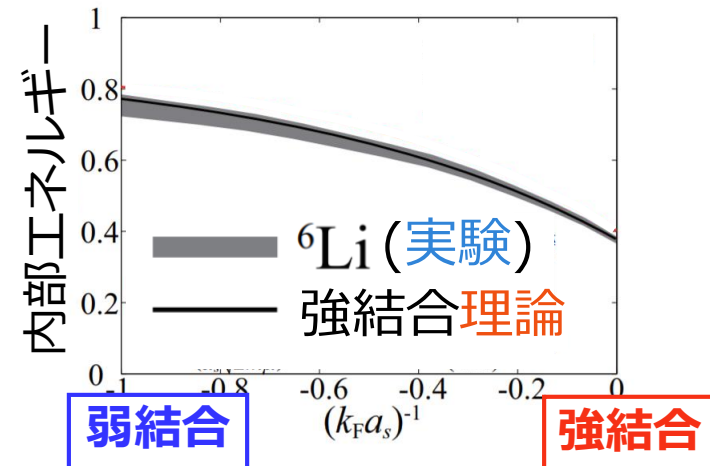
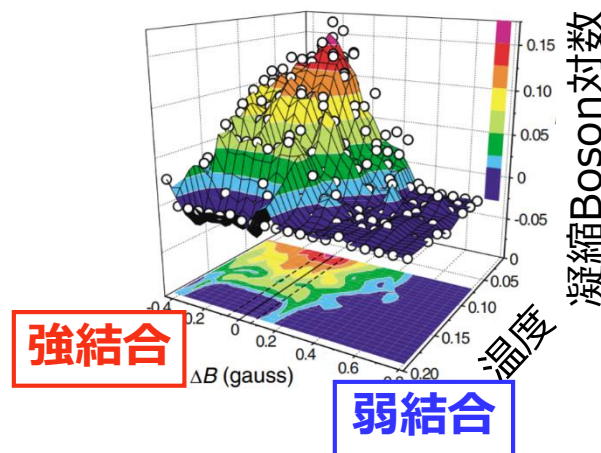
- ◆ 温度・密度
- ◆ (引力)相互作用強度

Fermi-Fermi対形成現象を  
弱結合→強結合全域において  
包括的に解明することに成功



例) BCS-BECクロスオーバー

絶対零度での状態方程式



# 冷却原子気体で探る対形成現象



cited from Lithium III Lab. / Laboratoire Kastler Brossel

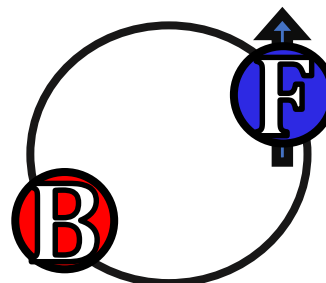
## 高い操作性

- ◆ 温度・密度
- ◆ (引力)相互作用強度
- ◆ 量子統計性

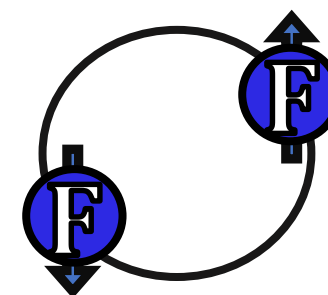


新しいタイプの対形成現象の可能性

Bose-Fermi対形成



Fermi-Fermi対形成

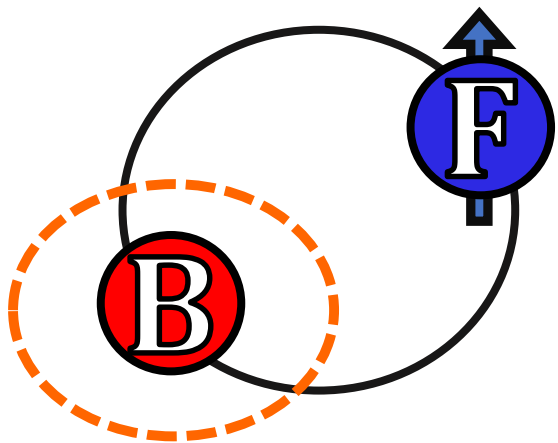


本研究で注目

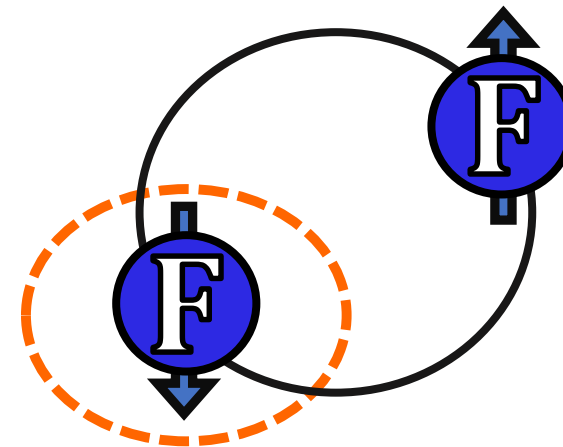


# Bose-Fermi対形成現象

## Bose-Fermi 混合原子気体

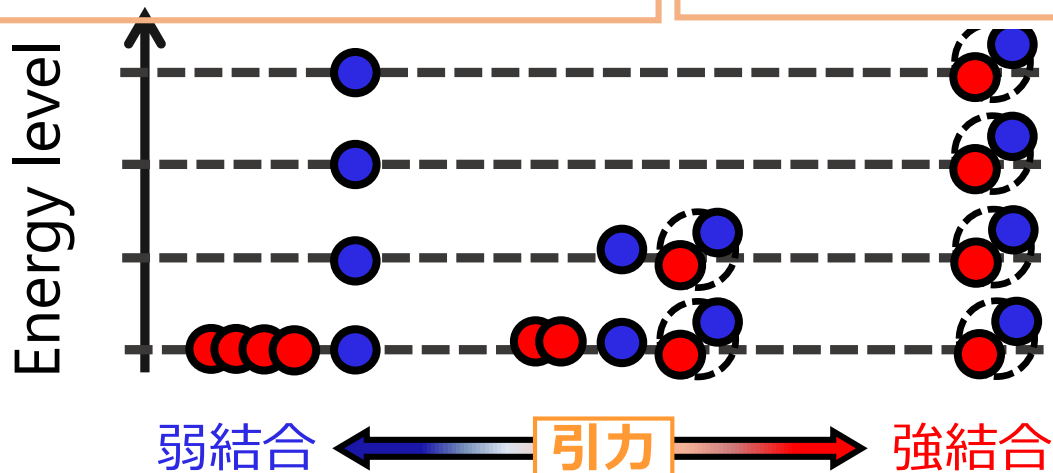


原子が凝縮  
: 凝縮抑制



Bose原子 + Fermi原子

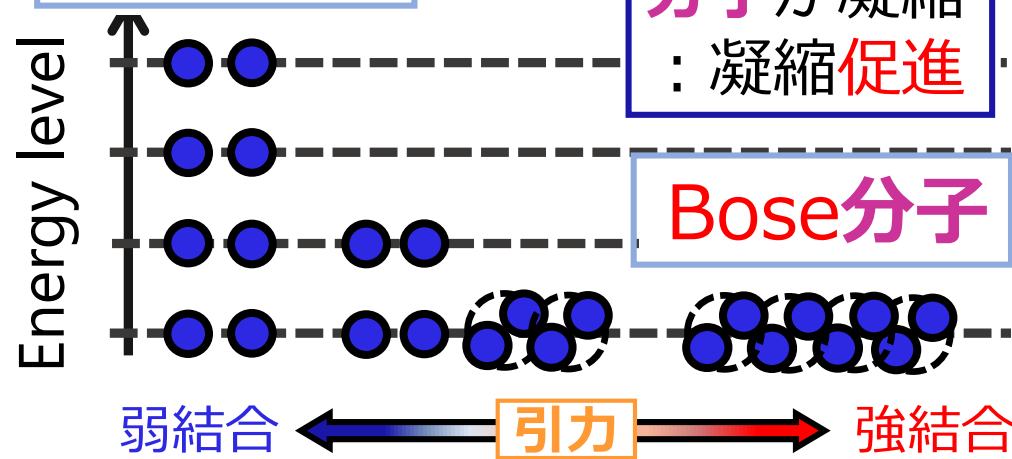
Fermi分子



Fermi原子

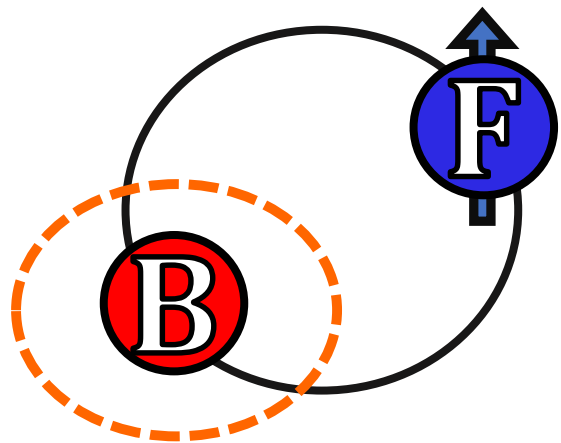
分子が凝縮  
: 凝縮促進

Bose分子



# Bose-Fermi対形成現象

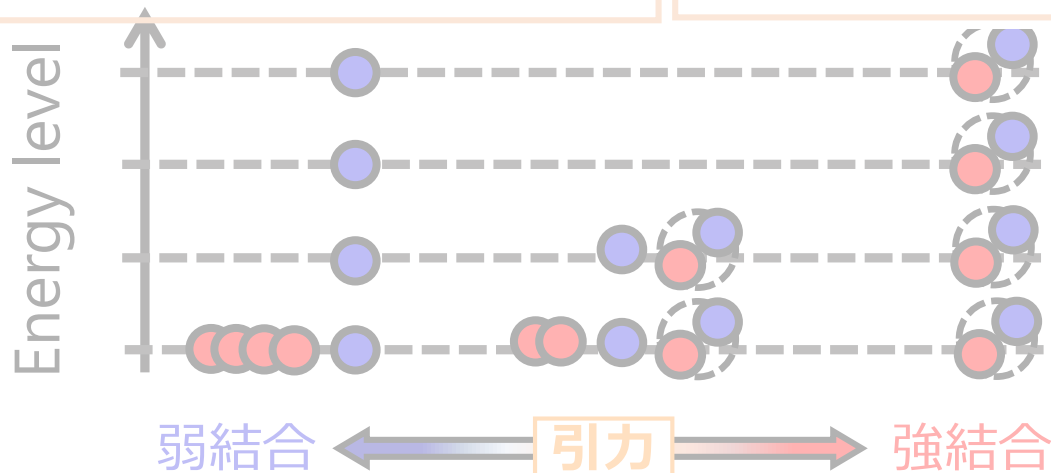
## Bose-Fermi 混合原子気体



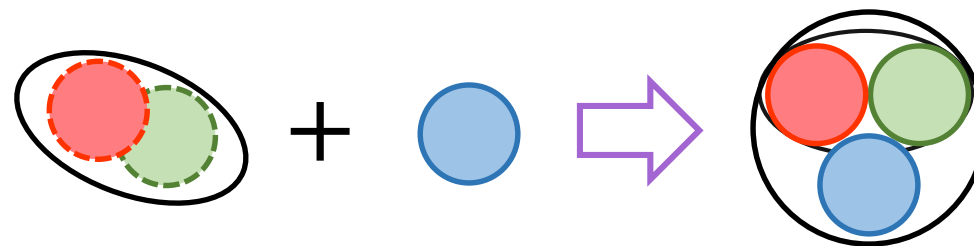
原子が凝縮  
: 凝縮抑制

Bose原子 + Fermi原子

Fermi分子

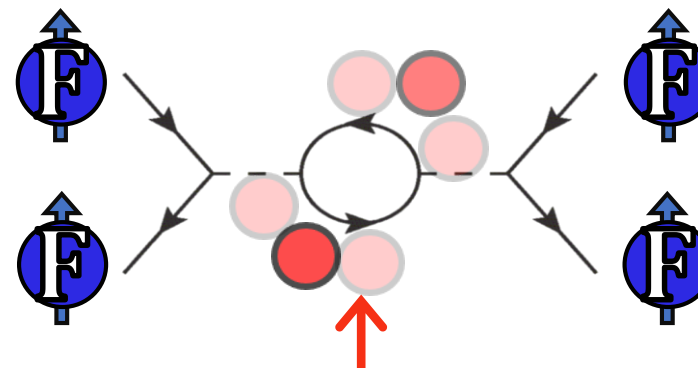


- 高密度QCDにおける  
Diquark(boson)-Quark(fermion) →  
Hardon(composite fermion) 「対形成」



との類似性 Maeda, et al., PRL **103** 085301 (2009)

- (高温)超伝導に類似の「媒介型」対形成

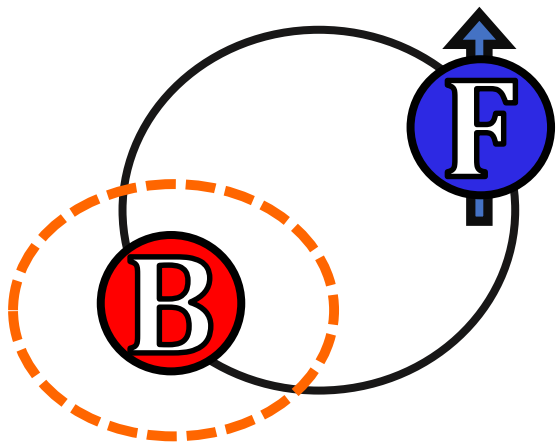


Bose成分の強い揺らぎがFermi成分のpairingを誘導



# Bose-Fermi対形成現象の実験の現状

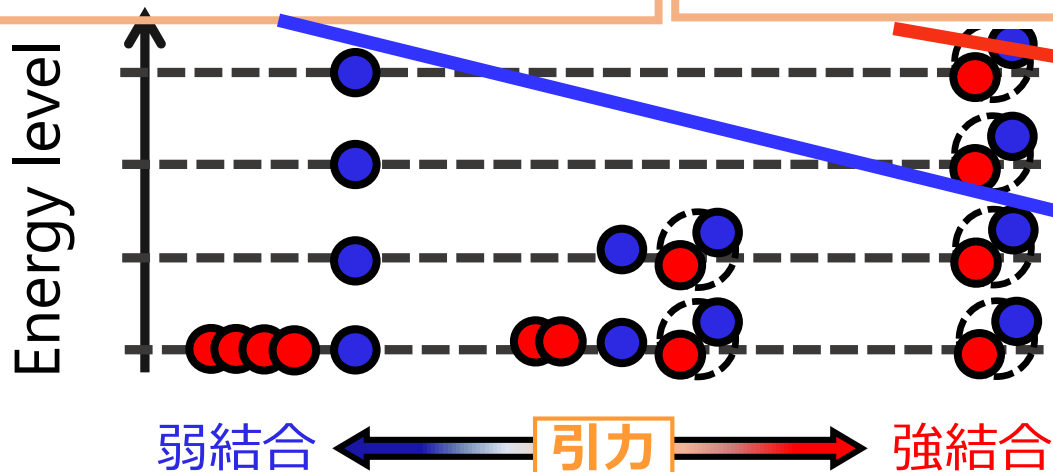
## Bose-Fermi 混合原子気体



原子が凝縮  
: 凝縮抑制

Bose原子 + Fermi原子

Fermi分子



## Bose-Fermi 原子気体

$^{87}\text{Rb}$  -  $^{40}\text{K}$

$^{23}\text{Na}$  -  $^{40}\text{K}$

$^{23}\text{Na}$  -  $^6\text{Li}$

$^7\text{Li}$  -  $^6\text{Li}$

$^{87}\text{Rb}$  -  $^6\text{Li}$

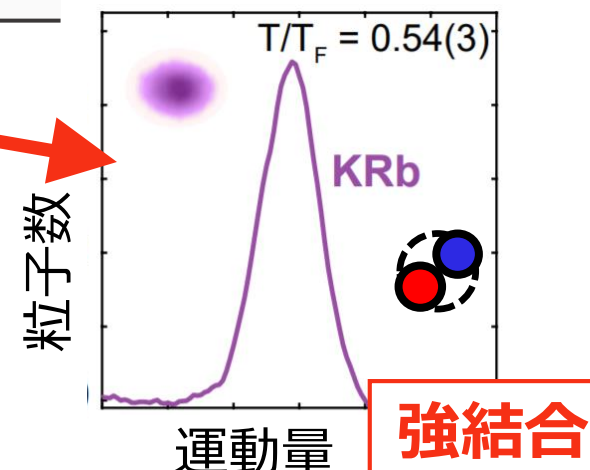
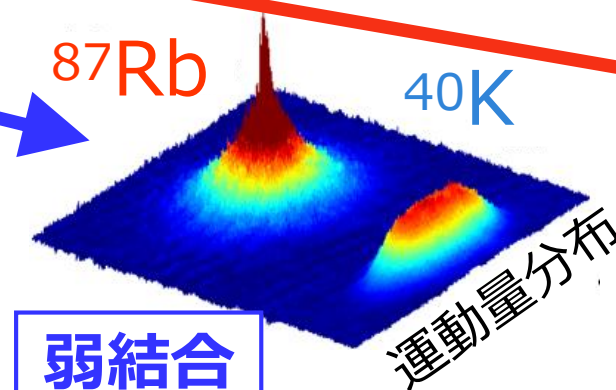
$^{41}\text{K}$  -  $^6\text{Li}$

$^{133}\text{Cs}$  -  $^6\text{Li}$

様々な原子種で  
Bose-Fermi気体  
が実験的に実現

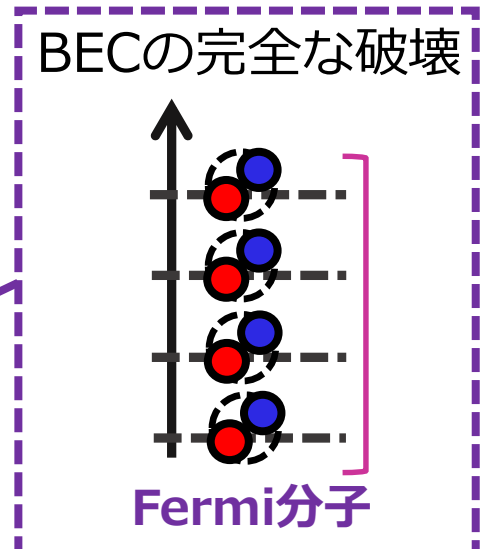
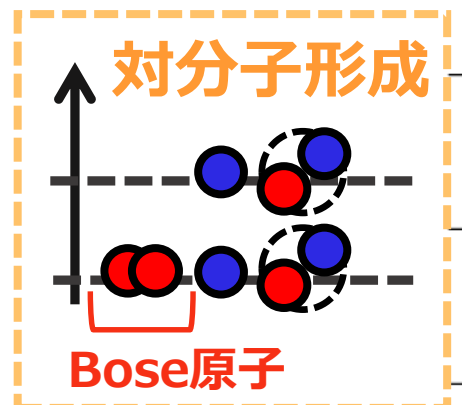
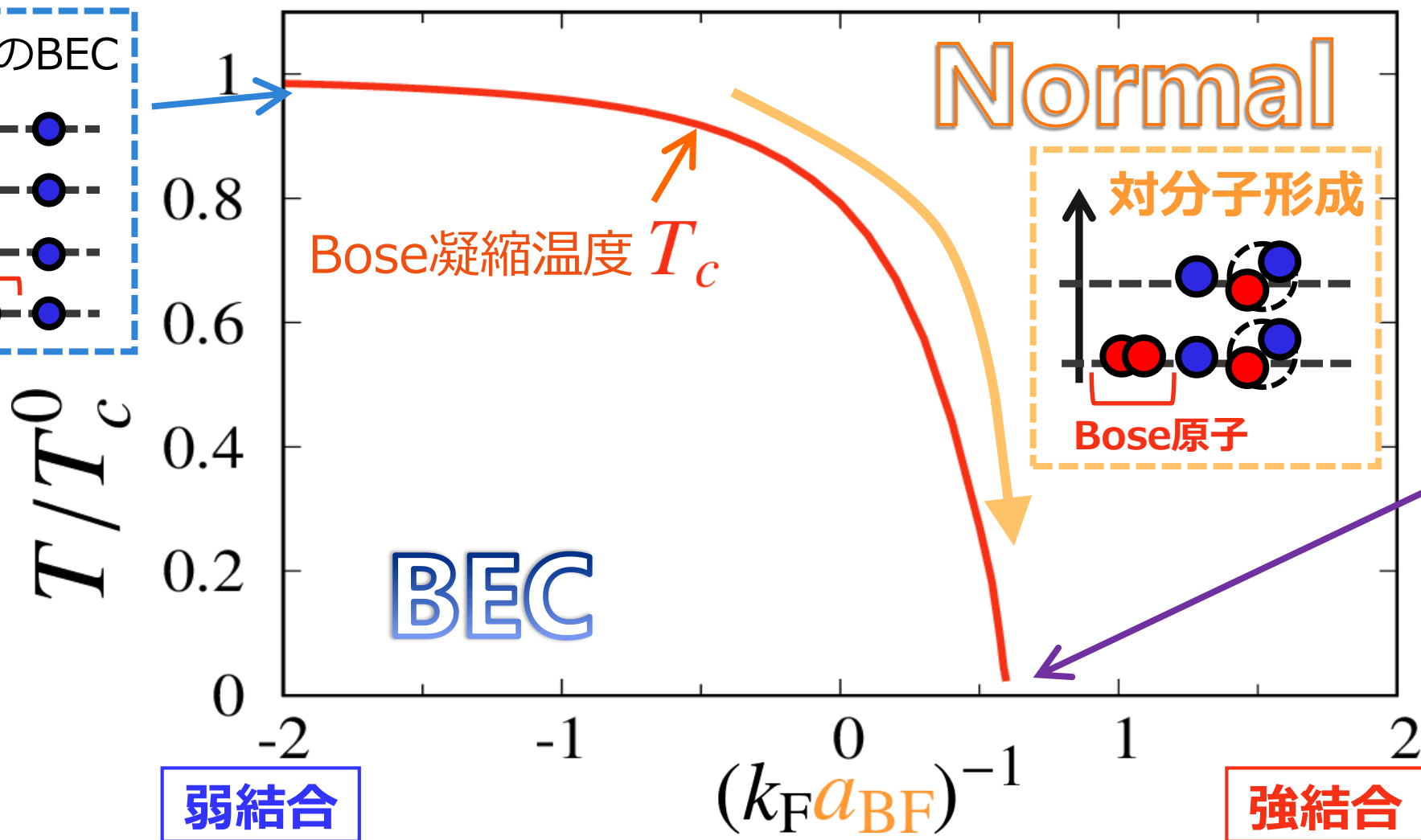
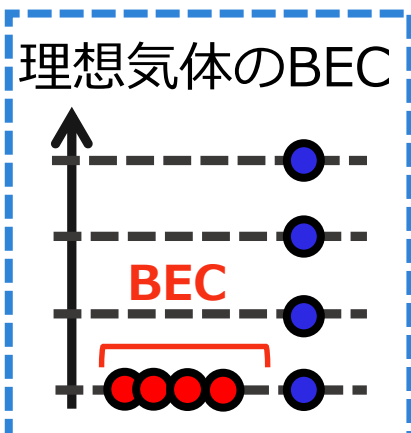
左図 : Ospelkaus *et al.*  
PRL **96**, 020401 (2006)

右図 : De Marco *et al.*  
Science **363** 853 (2019)



# Bose-Fermi強結合理論の現状

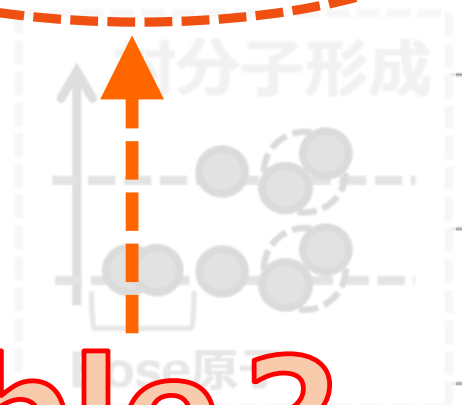
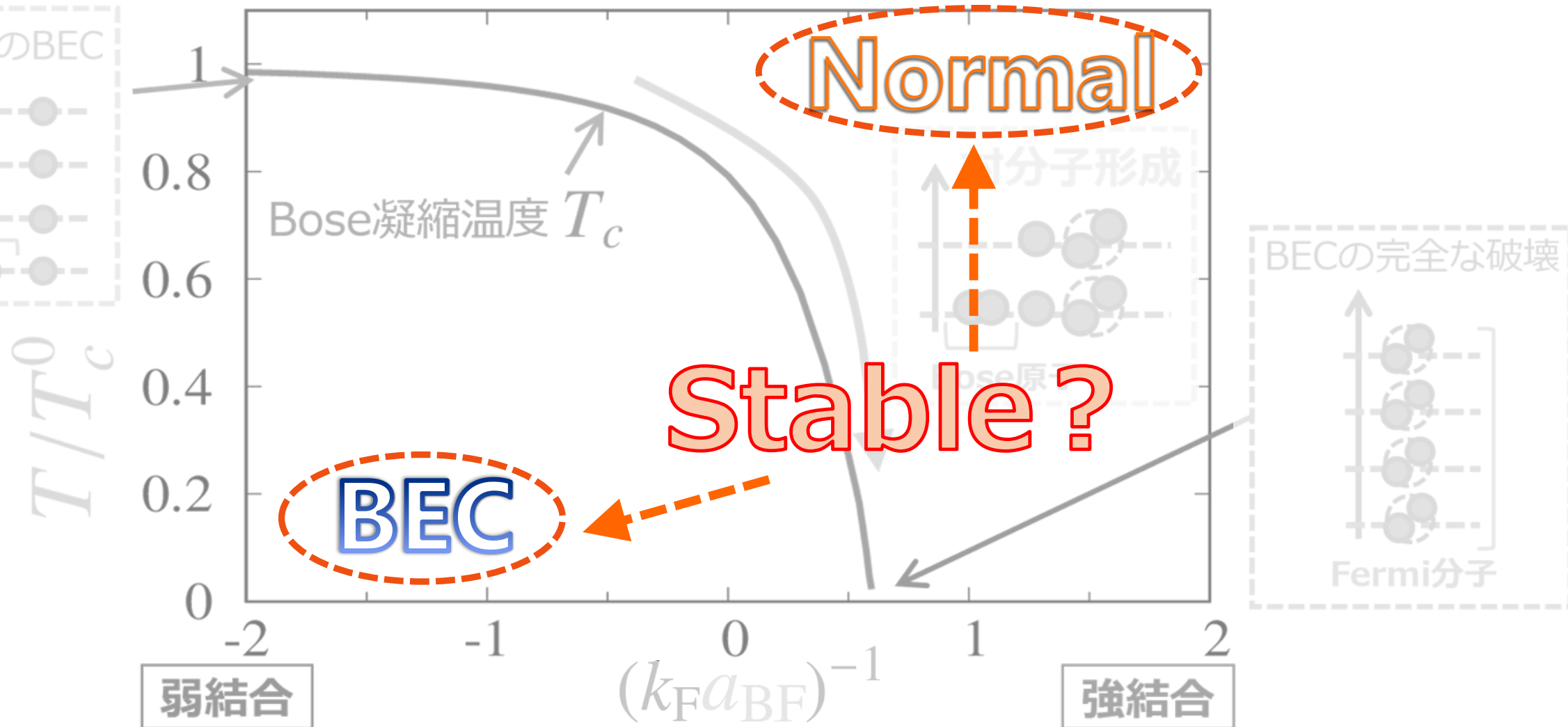
全相互作用領域におけるBEC相-正常相境界の記述に成功



# Bose-Fermi強結合理論の現状

## 問題点

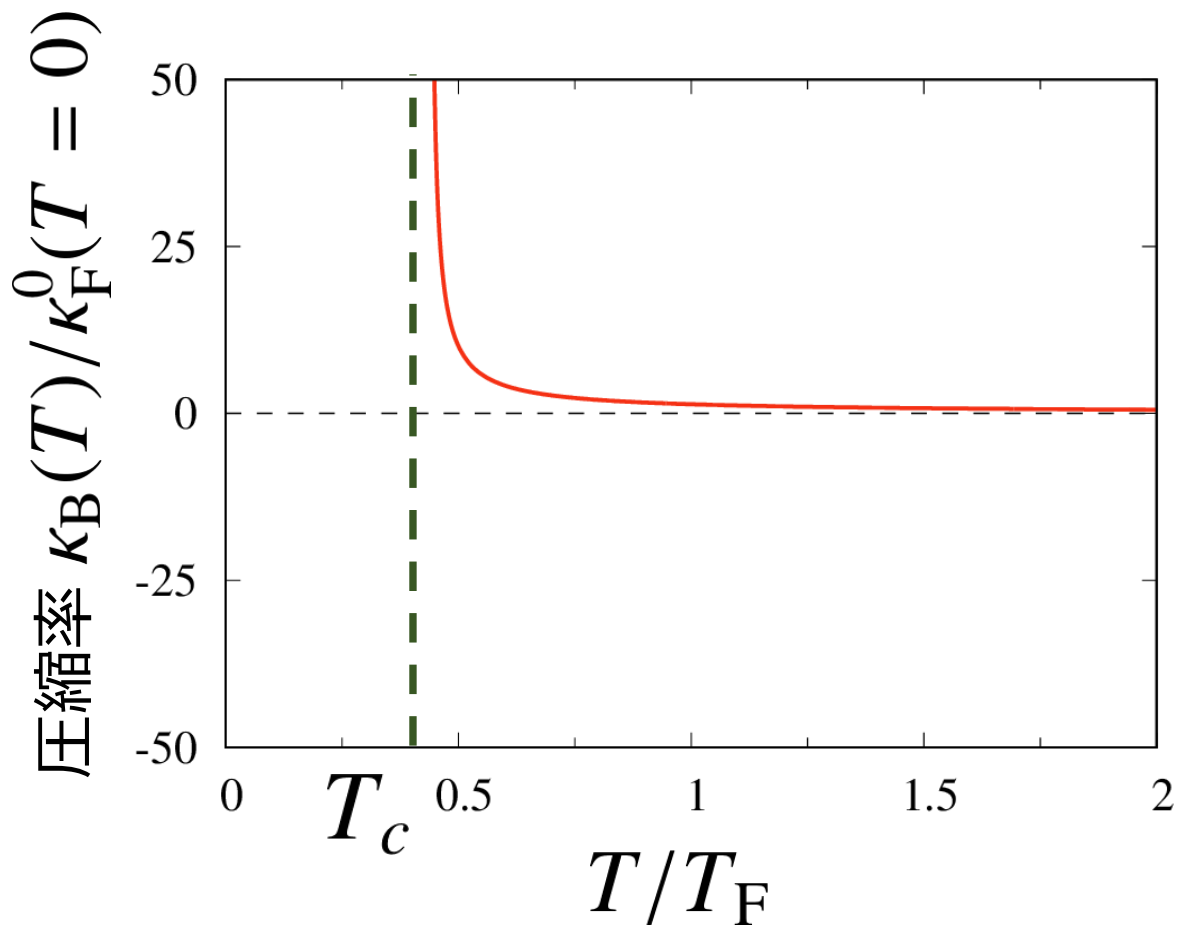
現状の強結合理論はBose系に特徴的な不安定性を記述できない



# 圧縮率と熱力学的安定性

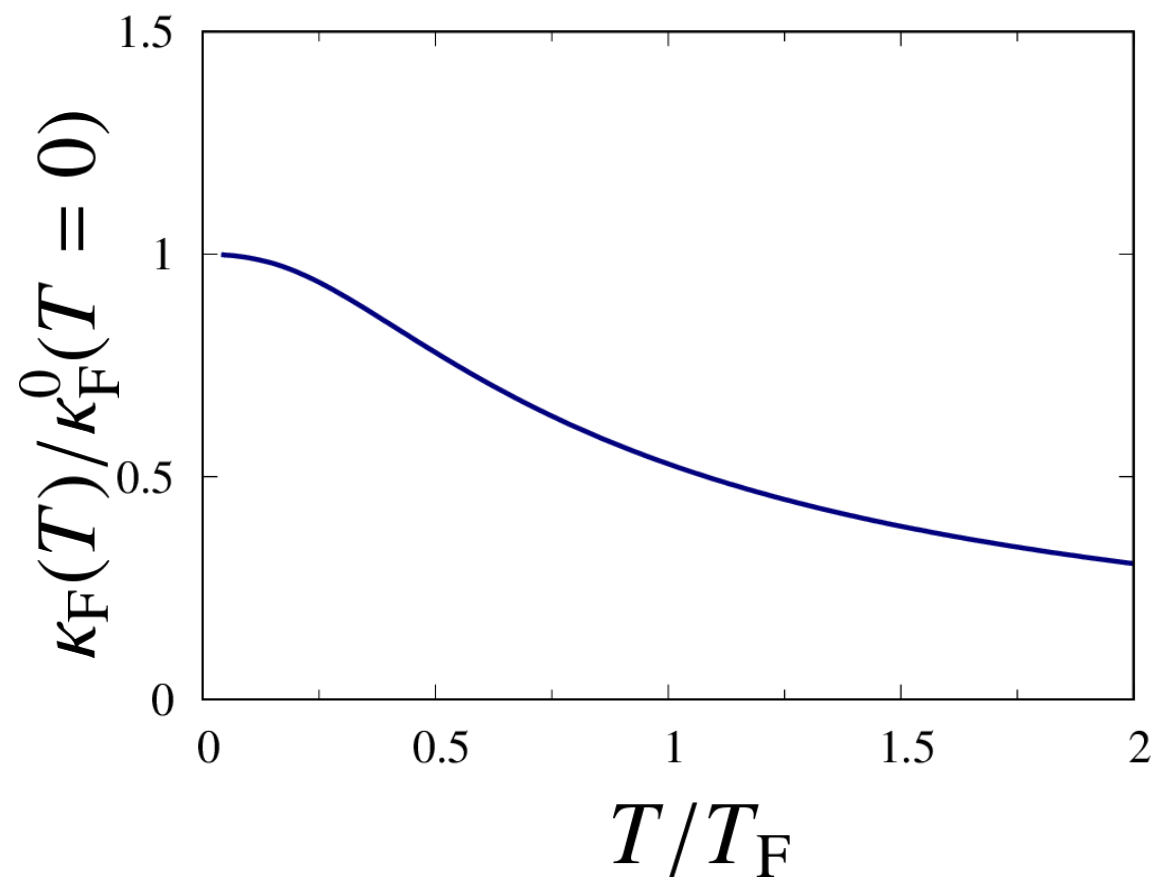
**B**

理想Bose気体の圧縮率



**F**

理想Fermi気体の圧縮率

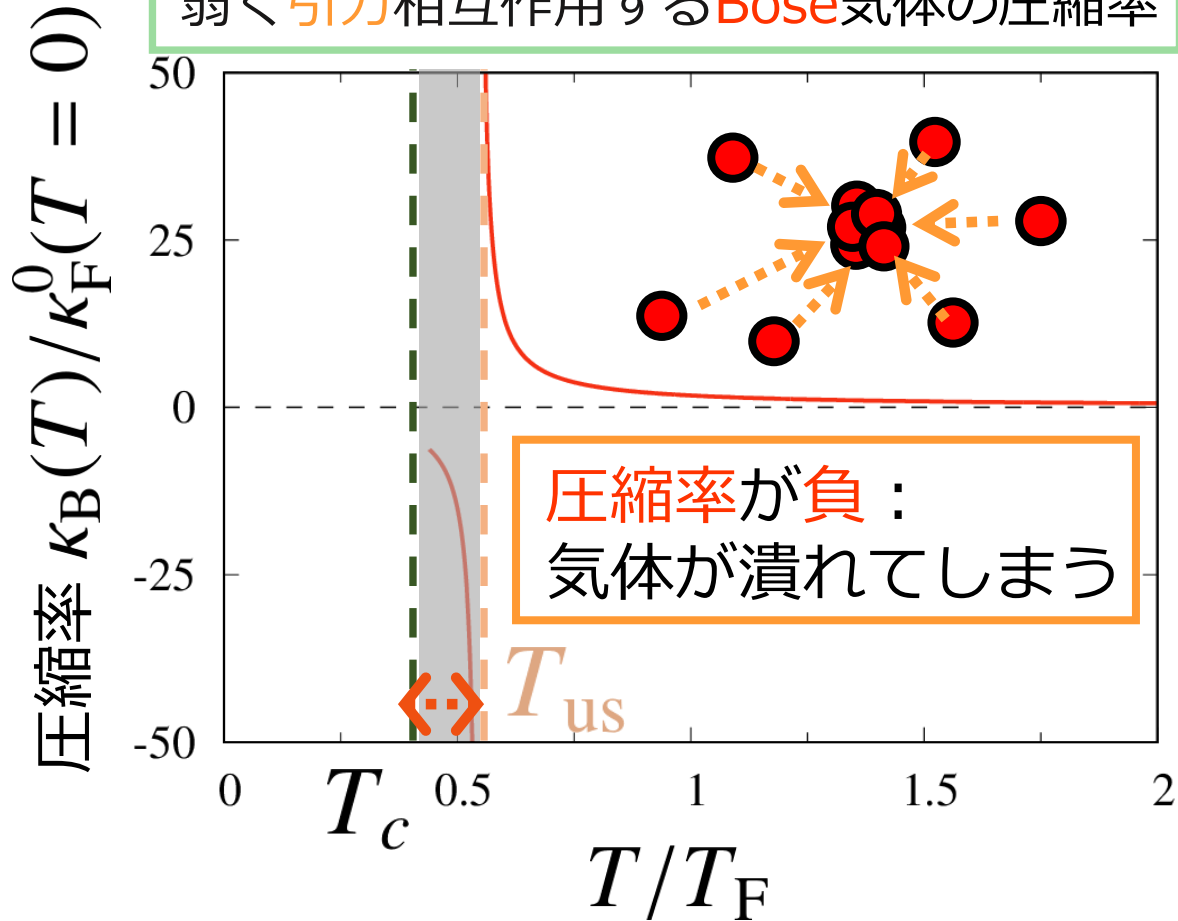


# 圧縮率と熱力学的安定性

**B**

理想Bose気体の圧縮率

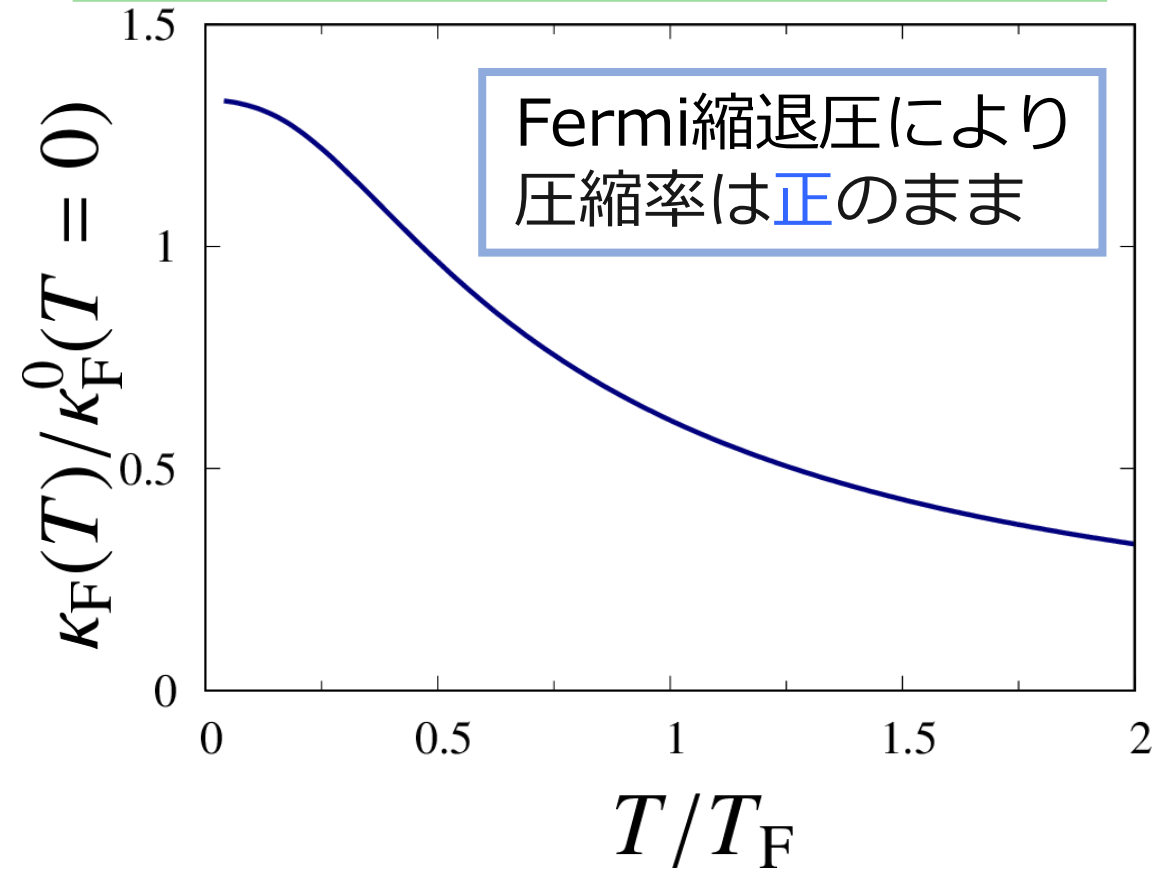
弱く引力相互作用するBose気体の圧縮率



**F**

理想Fermi気体の圧縮率

弱く引力相互作用するFermi気体の圧縮率

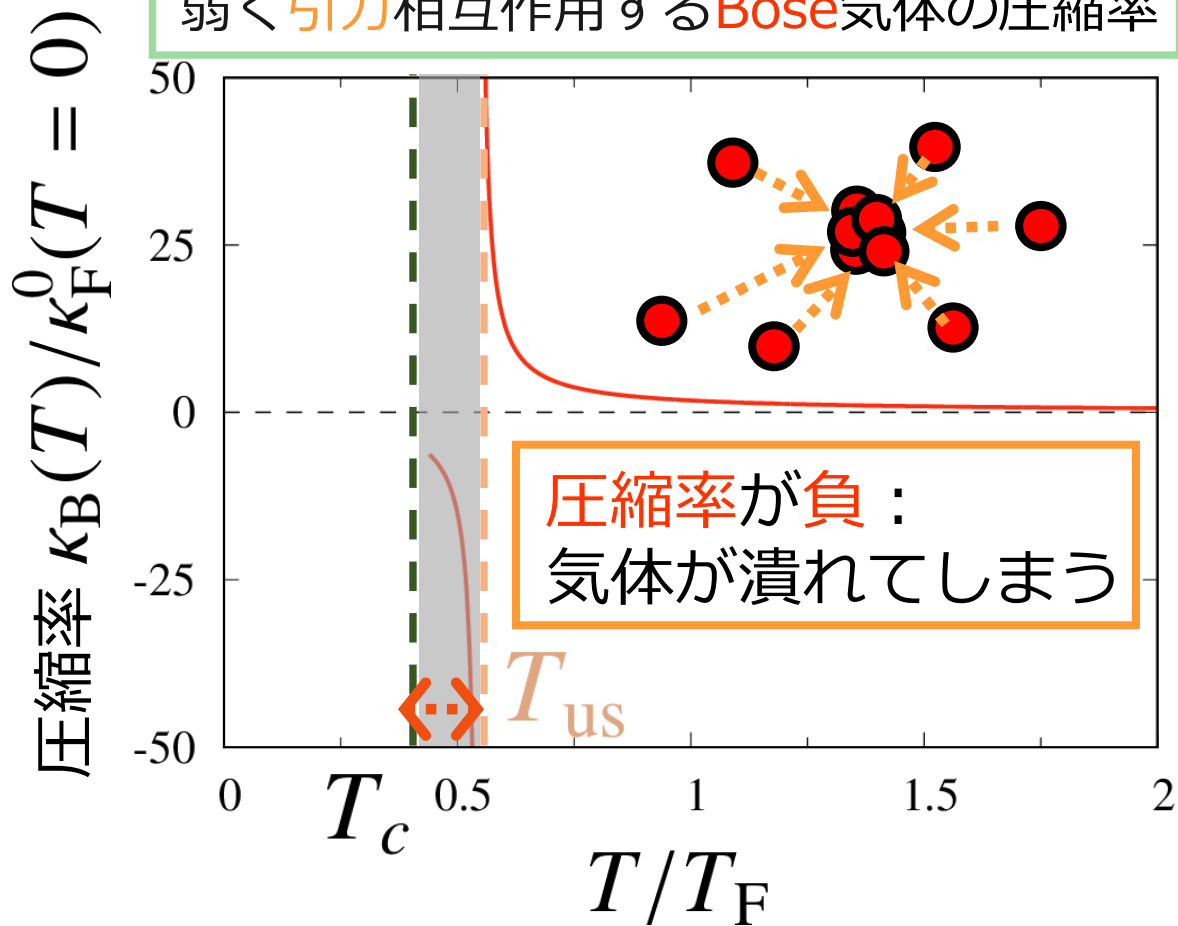


# 圧縮率と熱力学的安定性

**B**

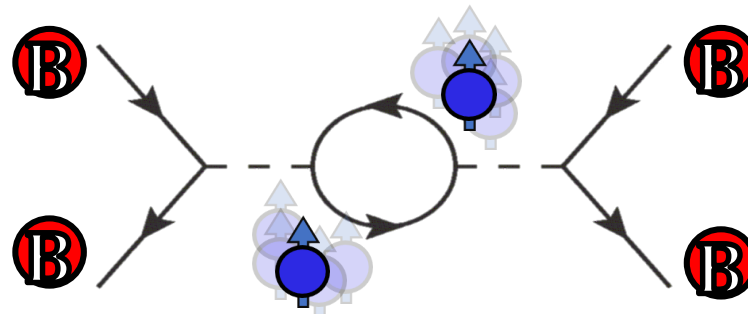
理想Bose気体の圧縮率

弱く引力相互作用するBose気体の圧縮率



➤ Bose-Fermi混合気体の場合は？

Bose原子間に直接に引力が作用していない場合でも、Fermi気体との混合により Bose-Bose間に**誘導引力**がはたらき混合系は不安定化する。



## 本研究の目的

冷却Bose-Fermi混合原子気体の常流動相において弱結合から強結合までの全相互作用領域にわたり系の熱力学的安定性を記述できる強結合理論を構築し相図上の安定-不安定領域境界を決定する。

# 目次

1. 導入

**2. 定式化**

3. 結果

4. まとめ

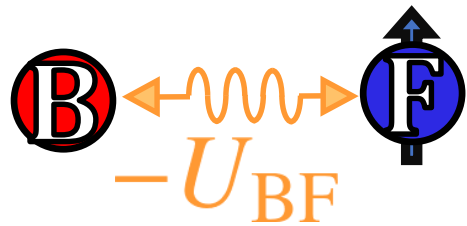


# Hamiltonian

$$H_{\text{BF}} = \sum_p \xi_p^{\text{B}} b_p^\dagger b_p + \sum_p \xi_p^{\text{F}} f_p^\dagger f_p - U_{\text{BF}} \sum_{p,p',q} b_{p+q/2}^\dagger f_{-p+q/2}^\dagger f_{p'+q/2} b_{-p'+q/2} + \frac{U_{\text{BB}}}{2} \sum_{p,p',q} b_{p+q/2}^\dagger b_{-p+q/2}^\dagger b_{p'+q/2} b_{-p'+q/2}$$

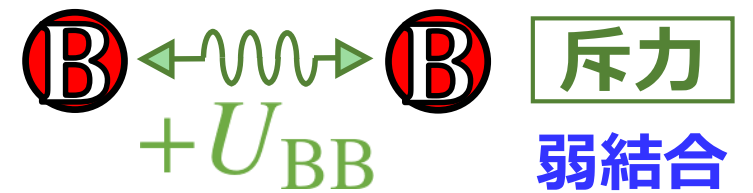
$b_p^\dagger$  : Bose 原子の生成演算子  
 $f_p^\dagger$  : Fermi 原子の生成演算子

## 相互作用の取り扱い



$$-\infty \quad (k_{\text{F}} a_{\text{BF}})^{-1} \quad +\infty \quad \frac{4\pi a_{\text{BF}}}{m} = \frac{-U_{\text{BF}}}{1 - U_{\text{BF}} \sum_p \omega_c \frac{m}{p^2}}$$

弱結合 引力 強結合  $a_{\text{BF}}$  : B-F引力のs波散乱長



$$+U_{\text{BB}} = \frac{4\pi a_{\text{BB}}}{m} > 0$$

$a_{\text{BB}}$  : B-B斥力のs波散乱長

# Bose-Fermi引力 → 自己無撞着T行列近似 (SCTMA)

Bose – Fermi引力  $-U_{BF}$

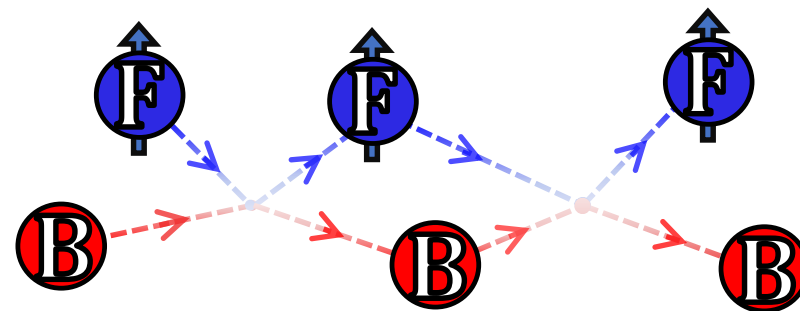
$$\Sigma_F = \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{B} \end{array} \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{F} \end{array} \Gamma_{BF} \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{F} \end{array}$$

$$\Sigma_B^{BF} = \begin{array}{c} \text{F} \\ \text{B} \end{array} \begin{array}{c} \text{F} \\ \text{B} \end{array} \Gamma_{BF} \begin{array}{c} \text{F} \\ \text{B} \end{array}$$

対形成揺らぎ

$$\begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \\ \text{B} \quad \text{B} \end{array} \Gamma_{BF}$$

$$= -U_{BF} \left[ \begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \\ \text{B} \quad \text{B} \end{array} + \begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \\ \text{B} \quad \text{B} \end{array} + \begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \quad \text{F} \\ \text{B} \quad \text{B} \quad \text{B} \end{array} + \dots \right]$$



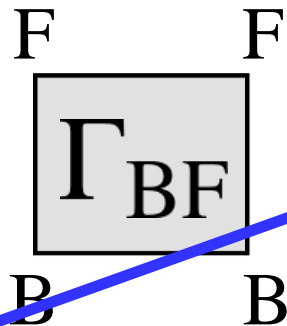
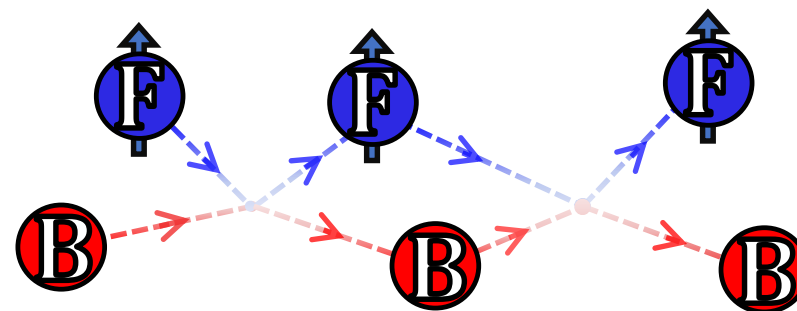
# Bose-Fermi引力 → 自己無撞着T行列近似 (SCTMA)

Bose – Fermi引力  $-U_{BF}$

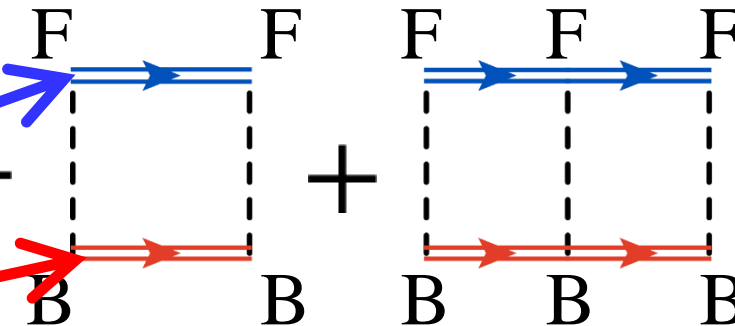
$$\Sigma_F = \begin{array}{c} \text{B} \quad \text{B} \\ \curvearrowright \\ \Gamma_{BF} \\ \curvearrowleft \\ \text{F} \quad \text{F} \end{array}$$

$$\Sigma_B^{BF} = \begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \\ \curvearrowright \\ \Gamma_{BF} \\ \curvearrowleft \\ \text{B} \quad \text{B} \end{array}$$

対形成揺らぎ



$-U_{BF}$



自己エネルギー補正を受けたGreen関数  $G_\alpha(\mathbf{p}, i\omega_\alpha) = \frac{1}{i\omega_\alpha - \xi_p^\alpha - \Sigma_\alpha(\mathbf{p}, i\omega_\alpha)}$

# Bose-Bose斥力 → 平均場近似

Bose – Fermi 引力  $-U_{BF}$

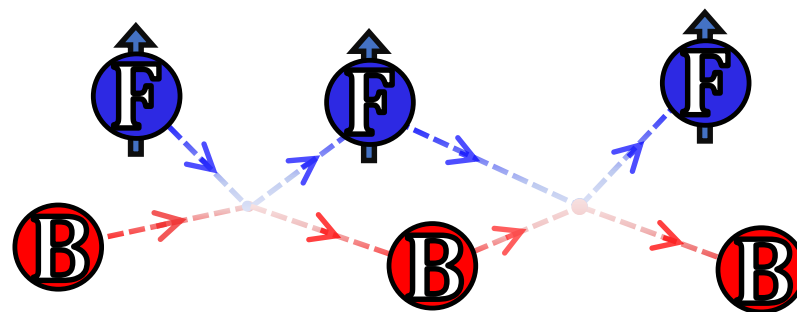
$$\Sigma_F = \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{B} \\ \text{F} \end{array} \Gamma_{BF} \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{B} \\ \text{F} \end{array}$$

$$\Sigma_B^{BF} = \begin{array}{c} \text{F} \\ \text{F} \\ \text{B} \end{array} \Gamma_{BF} \begin{array}{c} \text{F} \\ \text{F} \\ \text{B} \end{array}$$

対形成揺らぎ

$$\begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \\ \text{B} \quad \text{B} \end{array} \Gamma_{BF}$$

$$-U_{BF} \left[ \text{---} + \begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \\ \text{B} \quad \text{B} \end{array} + \begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \quad \text{F} \\ \text{B} \quad \text{B} \quad \text{B} \end{array} + \dots \right]$$



Bose – Bose 斥力  $+U_{BB}$

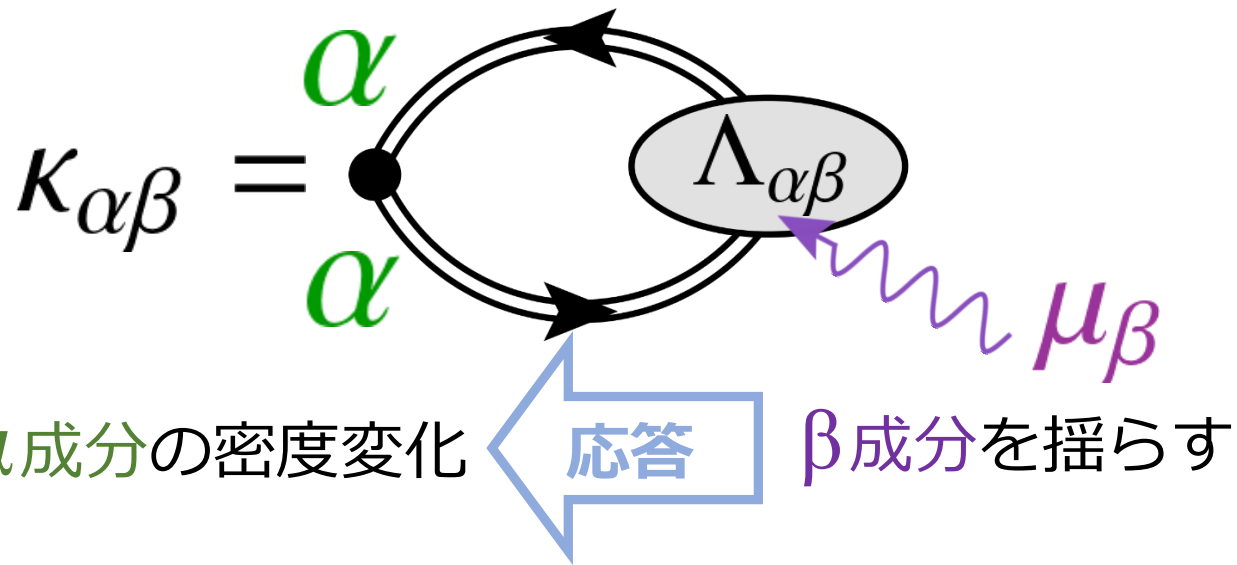
$$\Sigma_B^{BB} = \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{B} \\ \text{B} \end{array} + U_{BB}$$

$$\begin{array}{c} \text{B} \\ \text{B} \\ \text{B} \end{array} + U_{BB} = \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{B} \\ \text{B} \end{array} + \frac{U_{BB}}{2} + \frac{U_{BB}}{2} \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{B} \\ \text{B} \end{array}$$

# 圧縮率行列による系の熱力学的安定性の評価

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} K_{FF} & K_{FB} \\ K_{BF} & K_{BB} \end{pmatrix} \quad K_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \mu_{\beta}} = \pm T \sum_p G_{\alpha}^2(p) \left[ \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial \Sigma_{\alpha}(p)}{\partial \mu_{\beta}} \right]$$

$\equiv \Lambda_{\alpha\beta}(p)$

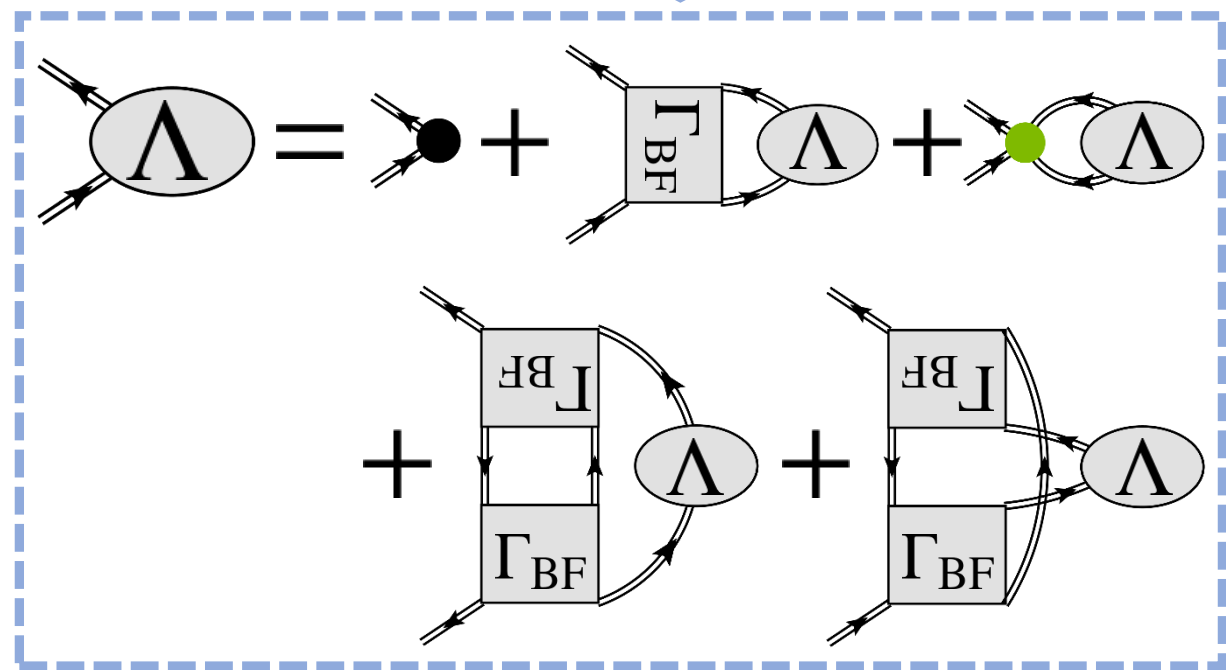
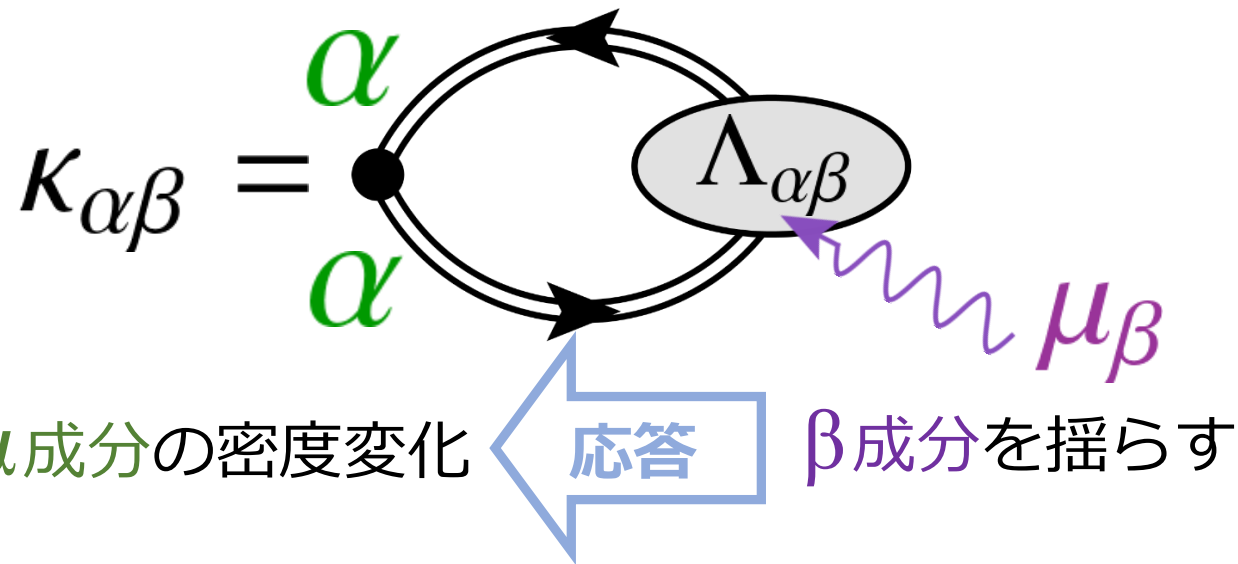


# 圧縮率行列による系の熱力学的安定性の評価

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} K_{FF} & K_{FB} \\ K_{BF} & K_{BB} \end{pmatrix} \quad K_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \mu_{\beta}} = \pm T \sum_p G_{\alpha}^2(p) \left[ \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial \Sigma_{\alpha}(p)}{\partial \mu_{\beta}} \right]$$

自己エネルギーと  
consistentな強結合補正

$$\Downarrow \equiv \Lambda_{\alpha\beta}(p)$$



# 圧縮率行列による系の熱力学的安定性の評価

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} K_{FF} & K_{FB} \\ K_{BF} & K_{BB} \end{pmatrix}$$

系が熱力学的に安定  $\iff \hat{K}$  が正定値

i.e. ①  $K_{BB} > 0$     ②  $K_{FF} > 0$     ③  $\det[\hat{K}] > 0$

# 計算フロー

Hugenholtz-Pines の定理 ( $T = T_c$  のみ)

$$\mu_B = \Sigma_B(0, 0)$$

粒子数方程式

$$N_F = T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_F} G_F(\mathbf{p}, i\omega_F) e^{i\delta\omega_F} \quad N_B = -T \sum_{\mathbf{p}, i\nu_B} G_B(\mathbf{p}, i\nu_B) e^{i\delta\nu_B}$$

自己無撞着解 :  $T_{(c)}, \mu_F(T_{(c)}), \mu_B(T_{(c)}), \Sigma_F(\mathbf{p}, i\omega_F; T_{(c)}), \Sigma_B(\mathbf{p}, i\nu_B; T_{(c)})$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial \mu_\beta}$$

数値偏微分により圧縮率行列の各成分を計算

$K_{BB}$  ,  $K_{FF}$  ,  $\det[\hat{k}]$  の正負により系の安定性を判定



# 計算フロー

Hugenholtz-Pines の定理 ( $T = T_c$  のみ)

$$\mu_B = \Sigma_B(0, 0)$$

粒子数方程式

$$N_F = T \sum_{\mathbf{p}, i\omega_F} G_F(\mathbf{p}, i\omega_F) e^{i\delta\omega_F} \quad N_B = -T \sum_{\mathbf{p}, i\nu_B} G_B(\mathbf{p}, i\nu_B) e^{i\delta\nu_B}$$

自己無撞着解 :  $T_{(c)}, \mu_F(T_{(c)}), \mu_B(T_{(c)}), \Sigma_F(\mathbf{p}, i\omega_F; T_{(c)}), \Sigma_B(\mathbf{p}, i\nu_B; T_{(c)})$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial \mu_\beta}$$

数値偏微分により圧縮率行列の各成分を計算

$$\kappa_{BB}, \kappa_{FF}, \det[\hat{\kappa}]$$

の正負により系の安定性を判定

# 目次

## 1. 導入

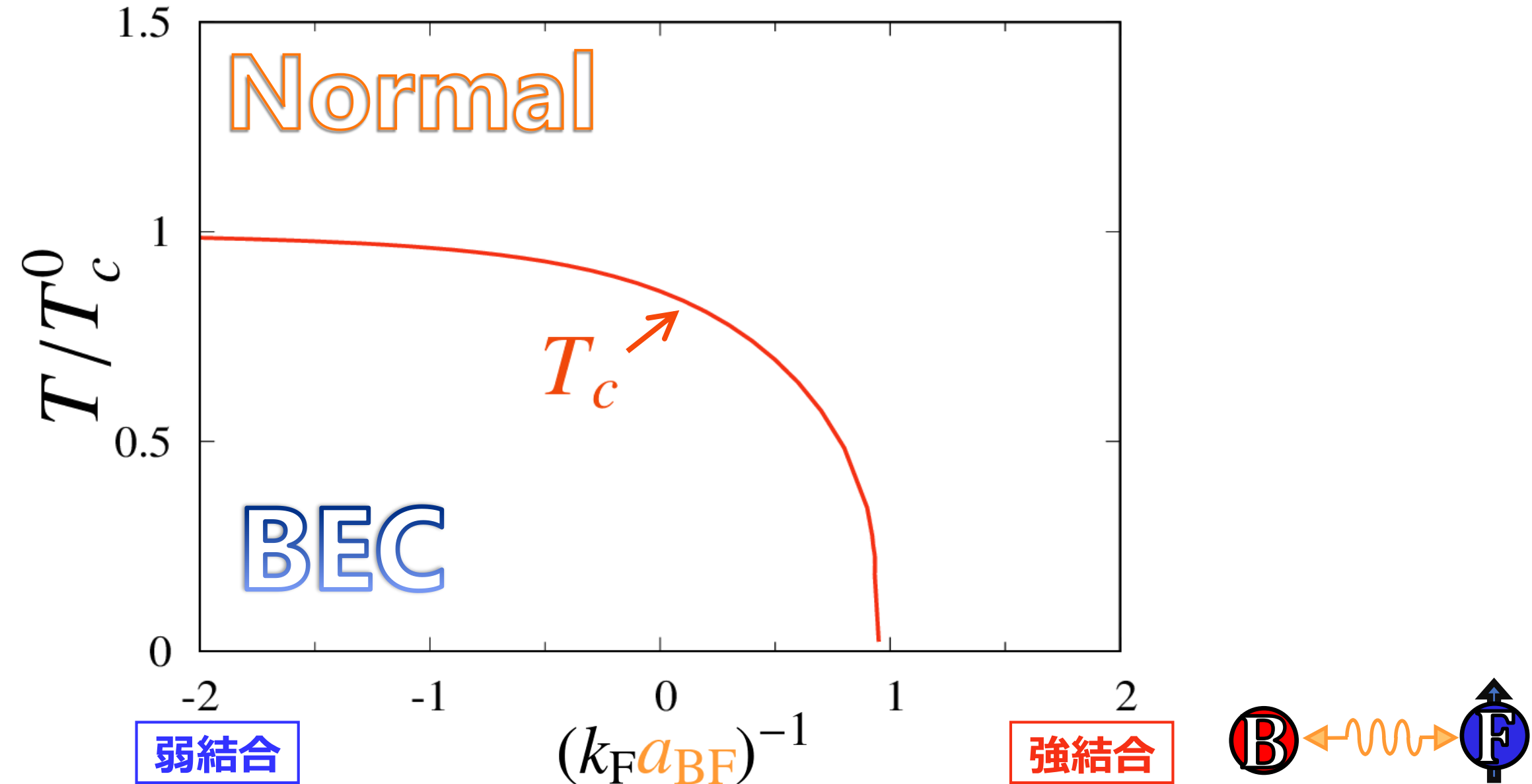
## 2. 定式化

## 3. 結果

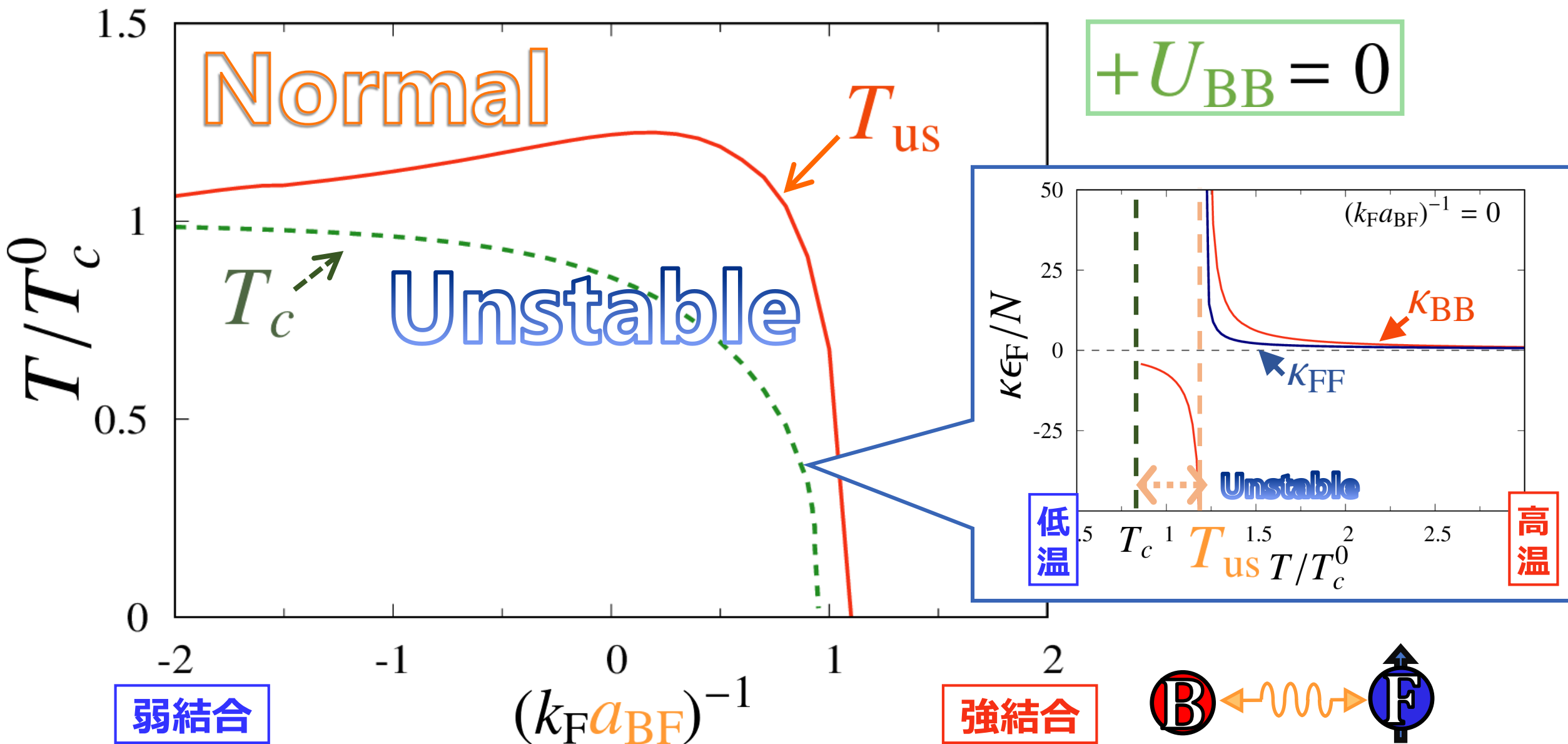
- ▶ **Boson間斥力がゼロの場合**
- ▶ Boson間斥力が有限の場合

## 4. まとめ

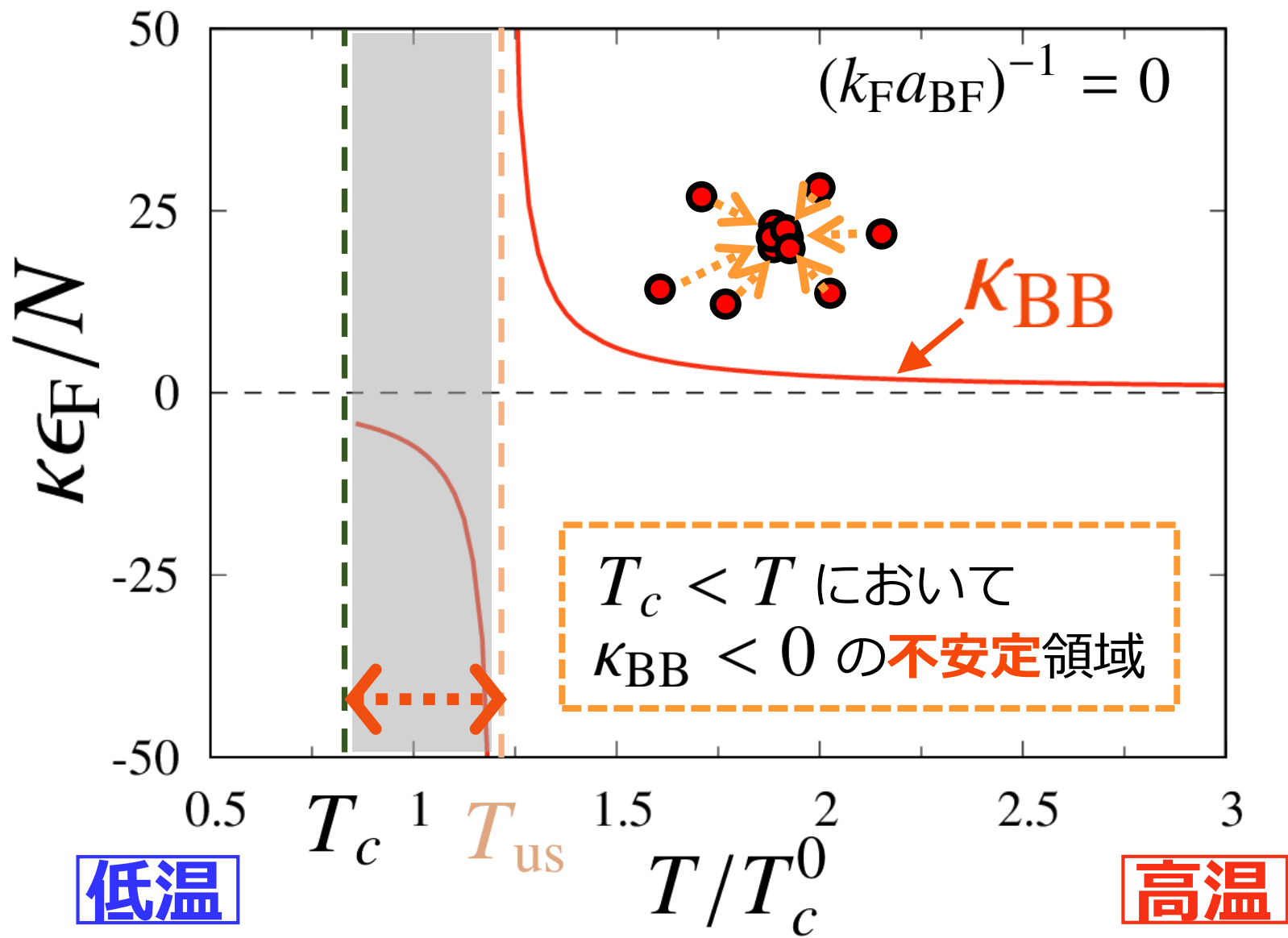
# Bose-Fermi混合気体の相図 (BEC相-正常相)



# Bose-Fermi混合気体の相図 (安定相-不安定相)



# 圧縮率行列の計算結果 (Bose成分)



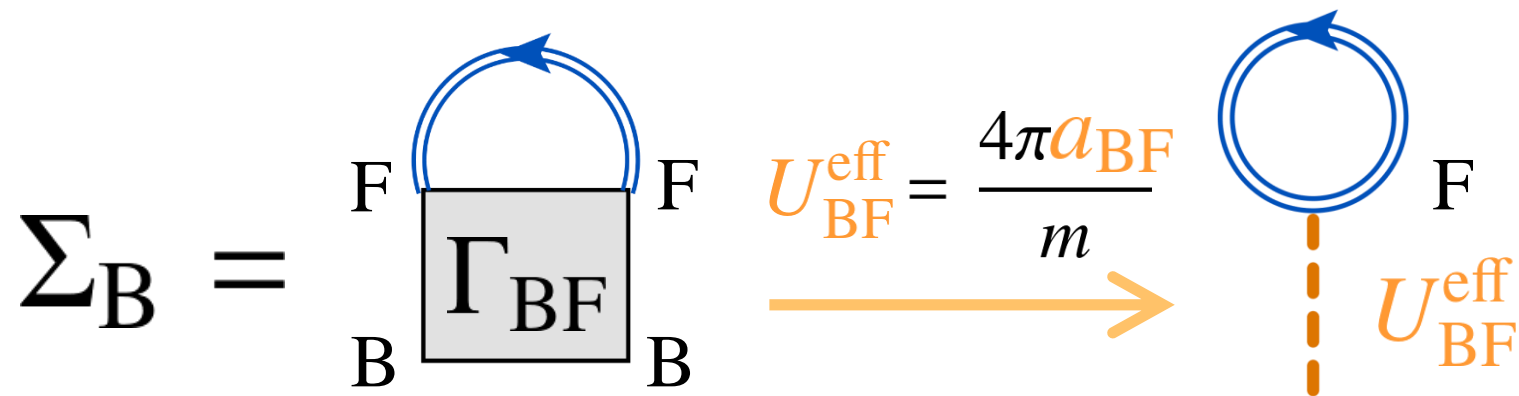
$$+U_{BB} = 0$$

$\epsilon_F$ : Fermiエネルギー

$T_c^0$ : 理想Bose気体のBEC転移温度

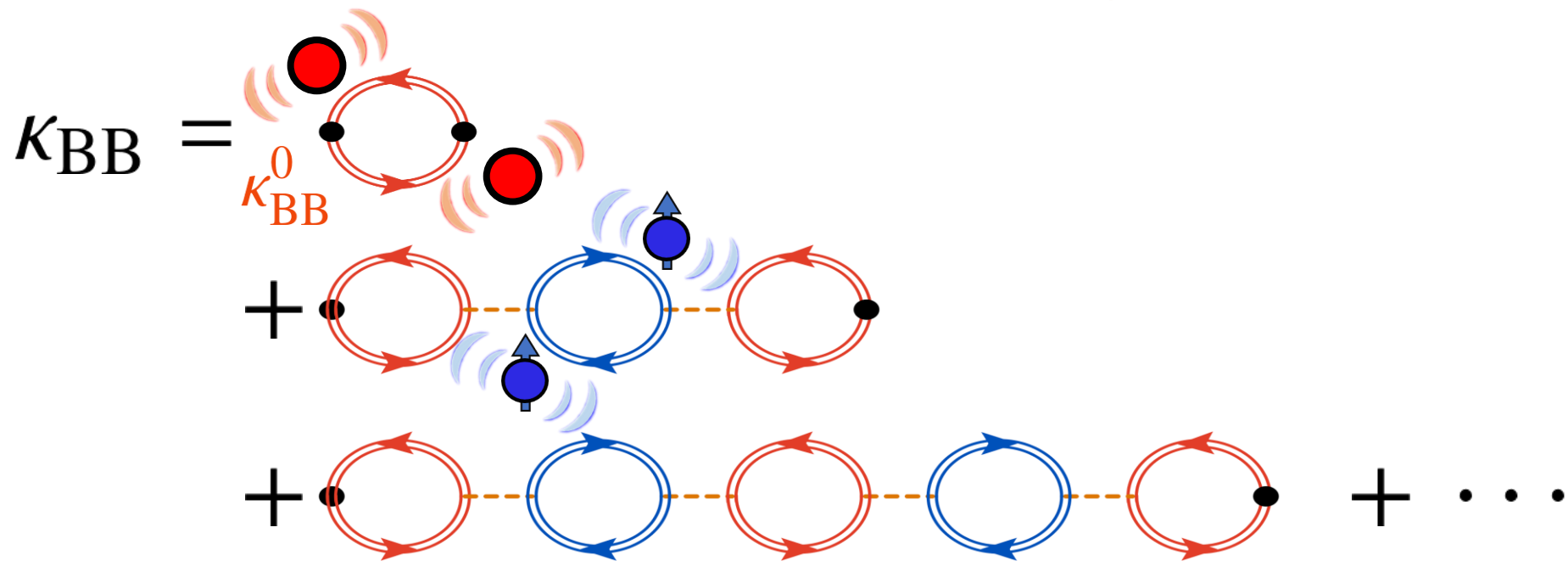
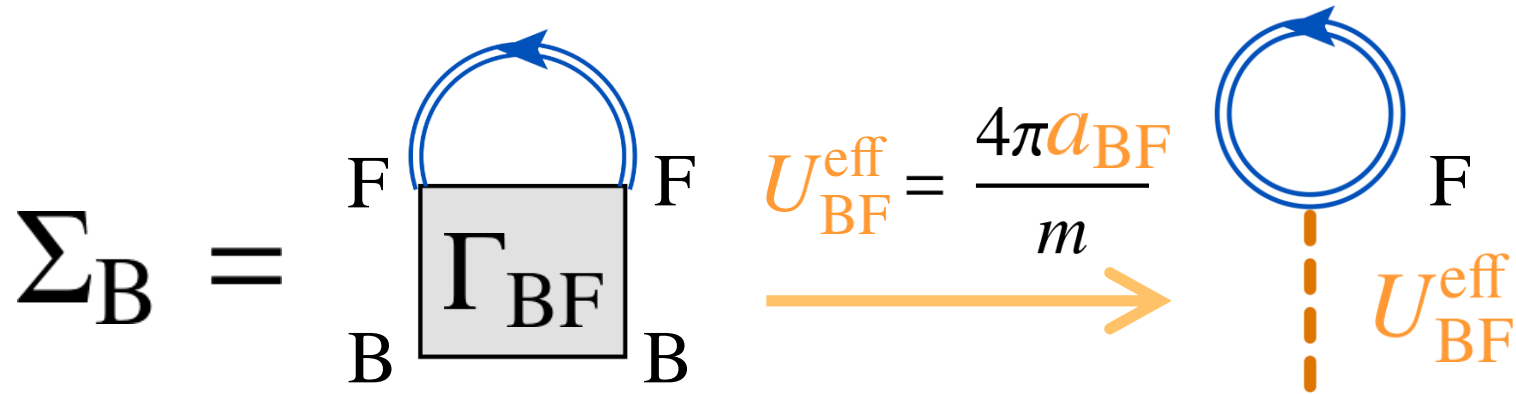
# 弱結合近似による解釈

→ 対形成揺らぎ  $\Gamma_{BF}$  を有効相互作用  $U_{BF}^{\text{eff}}$  で置き換える



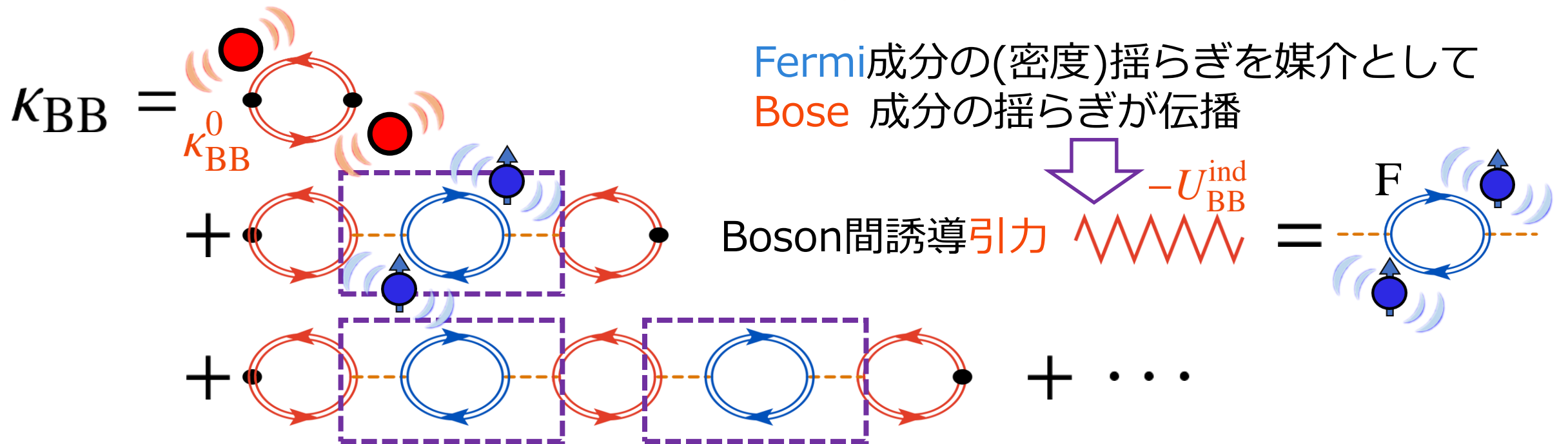
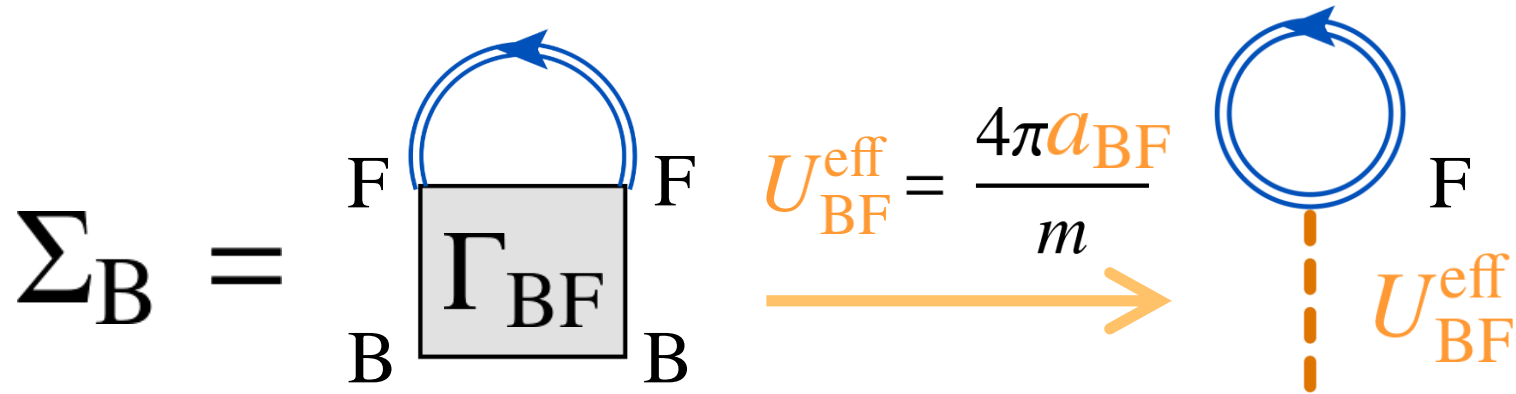
# 弱結合近似による解釈

→ 対形成揺らぎ  $\Gamma_{BF}$  を有効相互作用  $U_{BF}^{\text{eff}}$  で置き換える



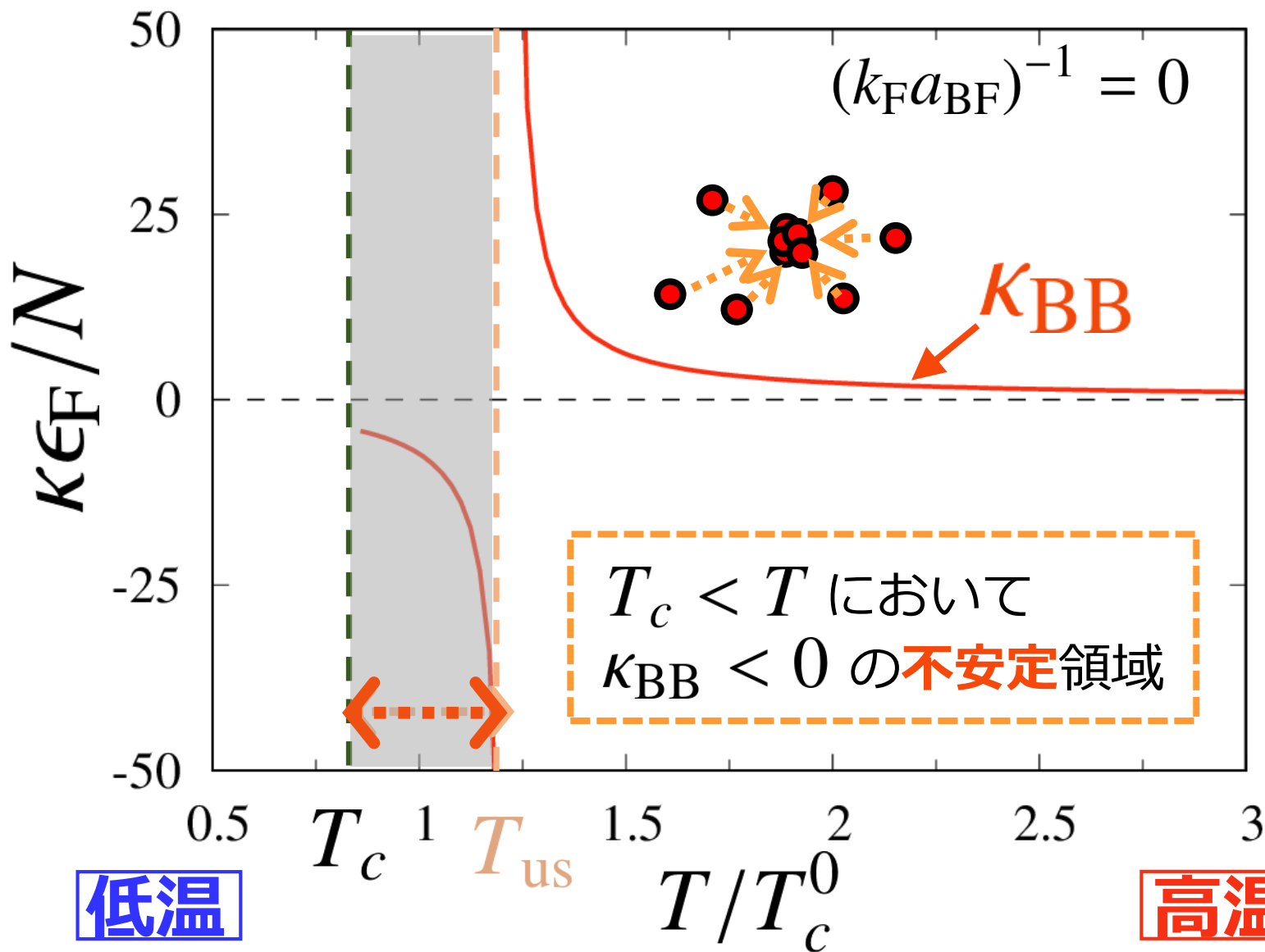
# 弱結合近似による解釈

→ 対形成揺らぎ  $\Gamma_{BF}$  を有効相互作用  $U_{BF}^{\text{eff}}$  で置き換える





# 圧縮率行列の計算結果 (Bose成分)



弱結合理論による  $K_{BB}$

$$K_{BB}(T) = \frac{\kappa_{BB}^0(T)}{1 - U_{BB}^{ind} \kappa_{BB}^0(T)}$$

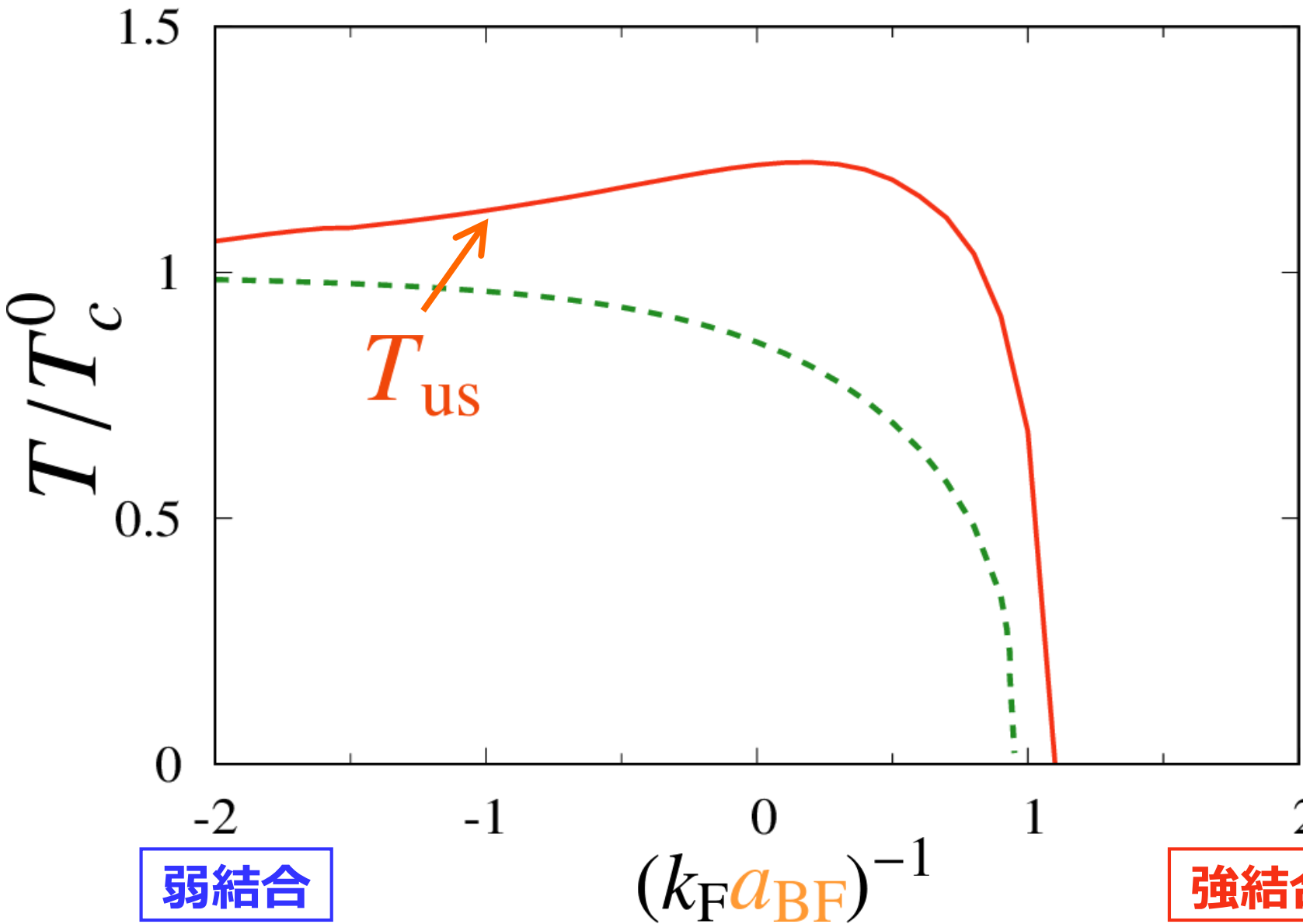
$T \rightarrow T_c$  で  
Bose気体の圧縮性は急増

$$\kappa_{BB}^0(T) = \sum_p \frac{dn(\xi_p)}{d\xi_p} \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow T_c)$$

$\epsilon_F$ : Fermiエネルギー

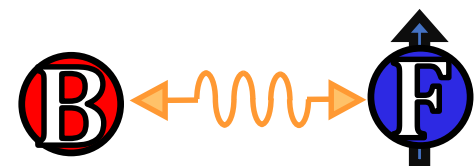
$T_c^0$ : 理想Bose気体のBEC転移温度

# Bose-Fermi混合気体の相図 (安定相-不安定相)

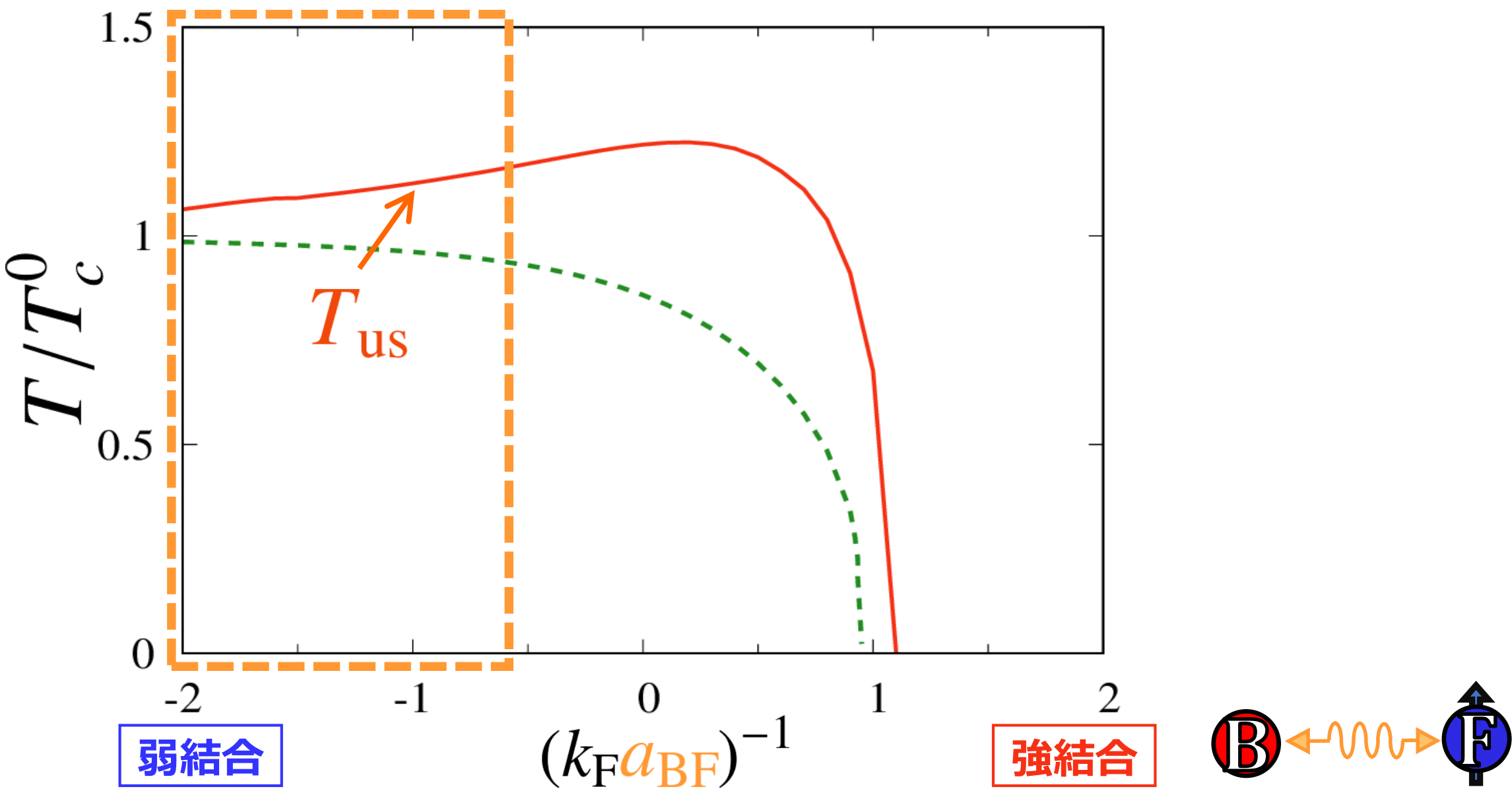


弱結合

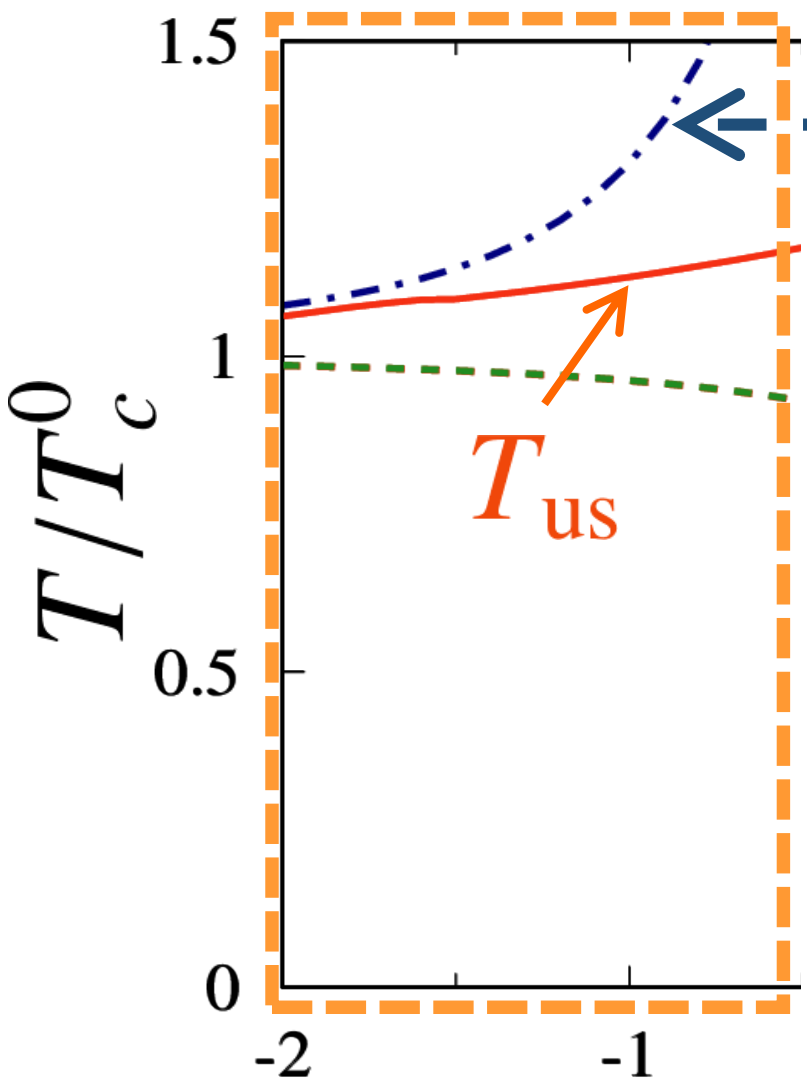
強結合



# Bose-Fermi混合気体の相図 (弱結合領域)

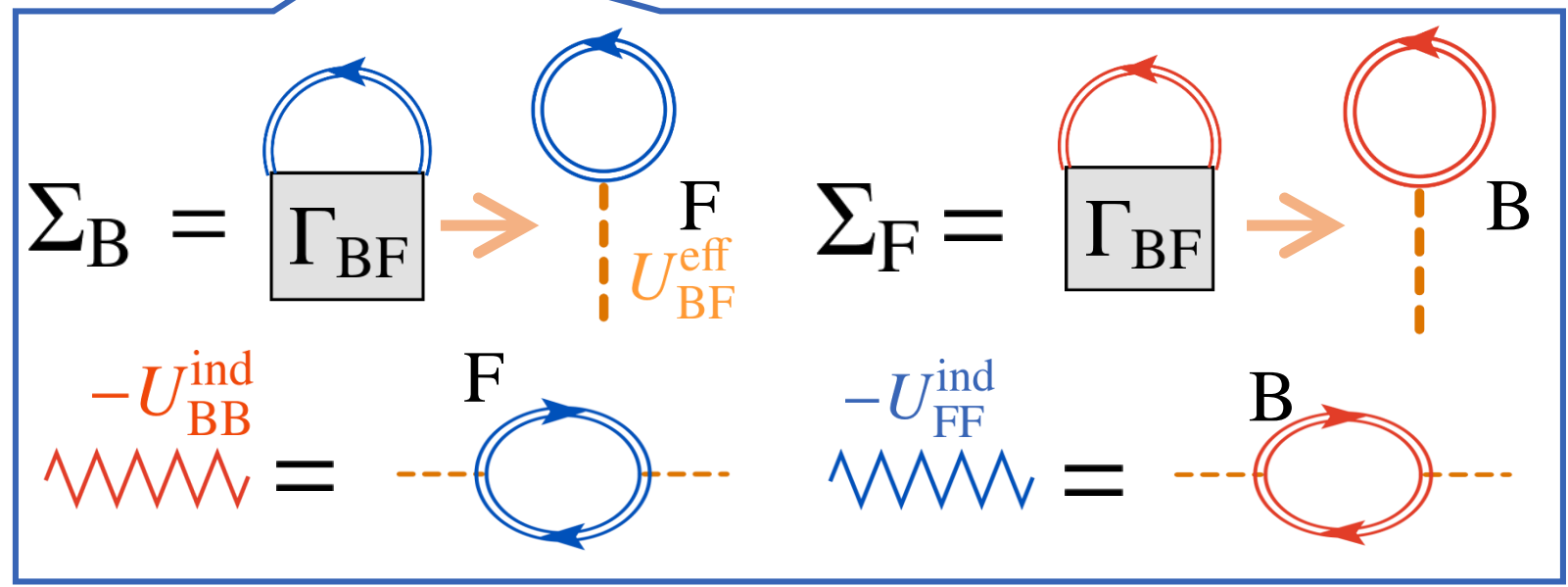


# Bose-Fermi混合気体の相図 (弱結合領域)



弱結合

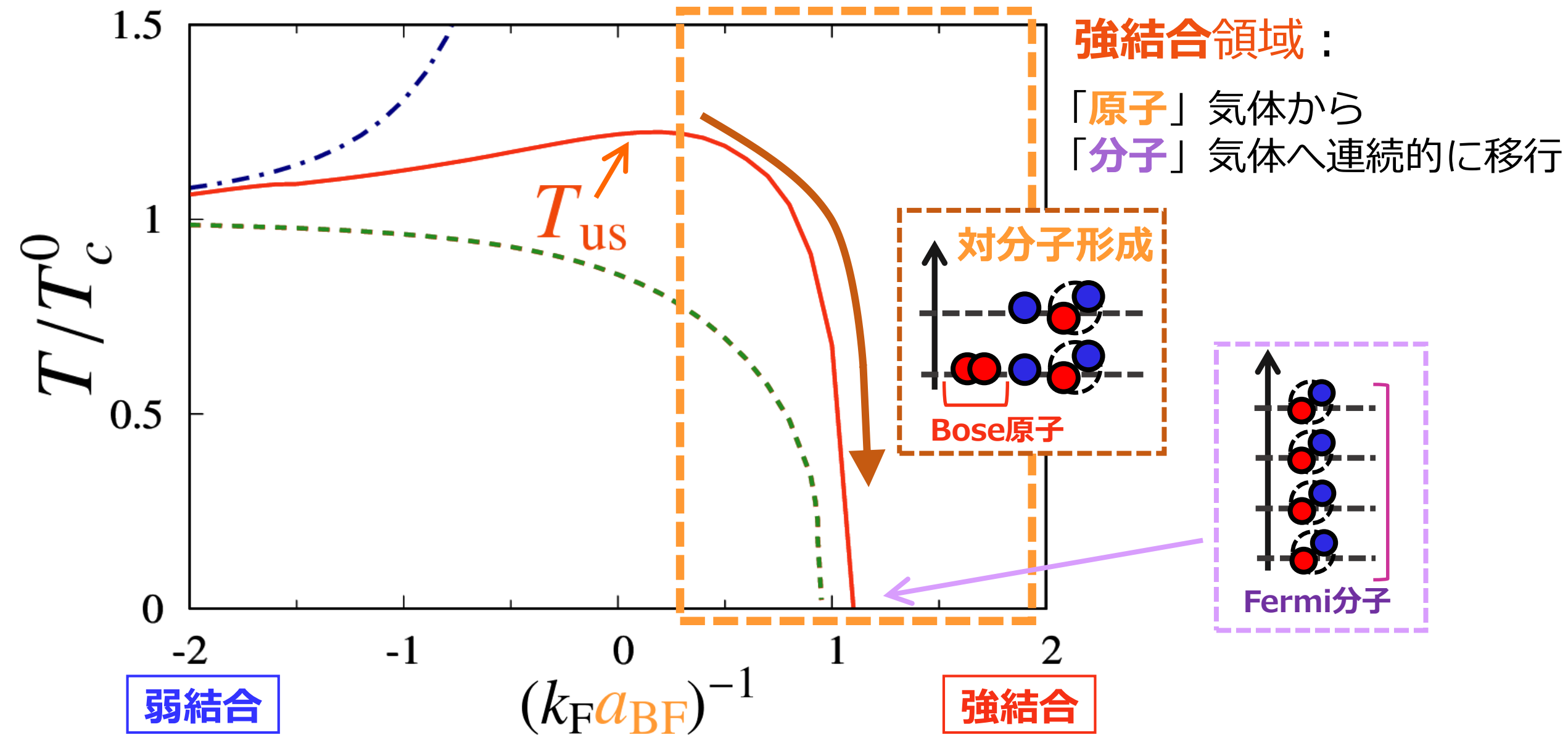
弱結合近似の範囲で求めた不安定化温度  $T_{us}$



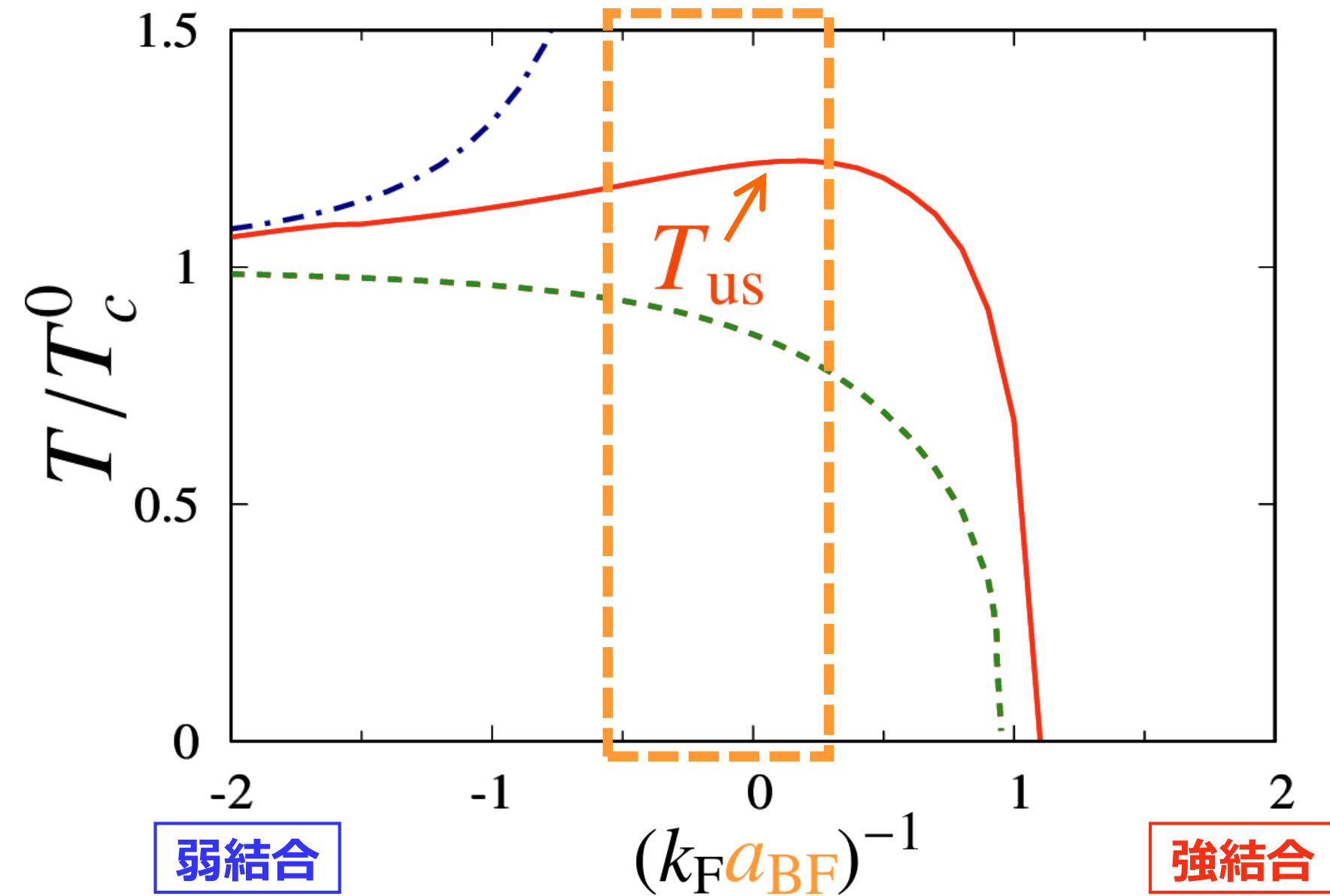
$(k_F a_{BF})^{-1}$

強結合

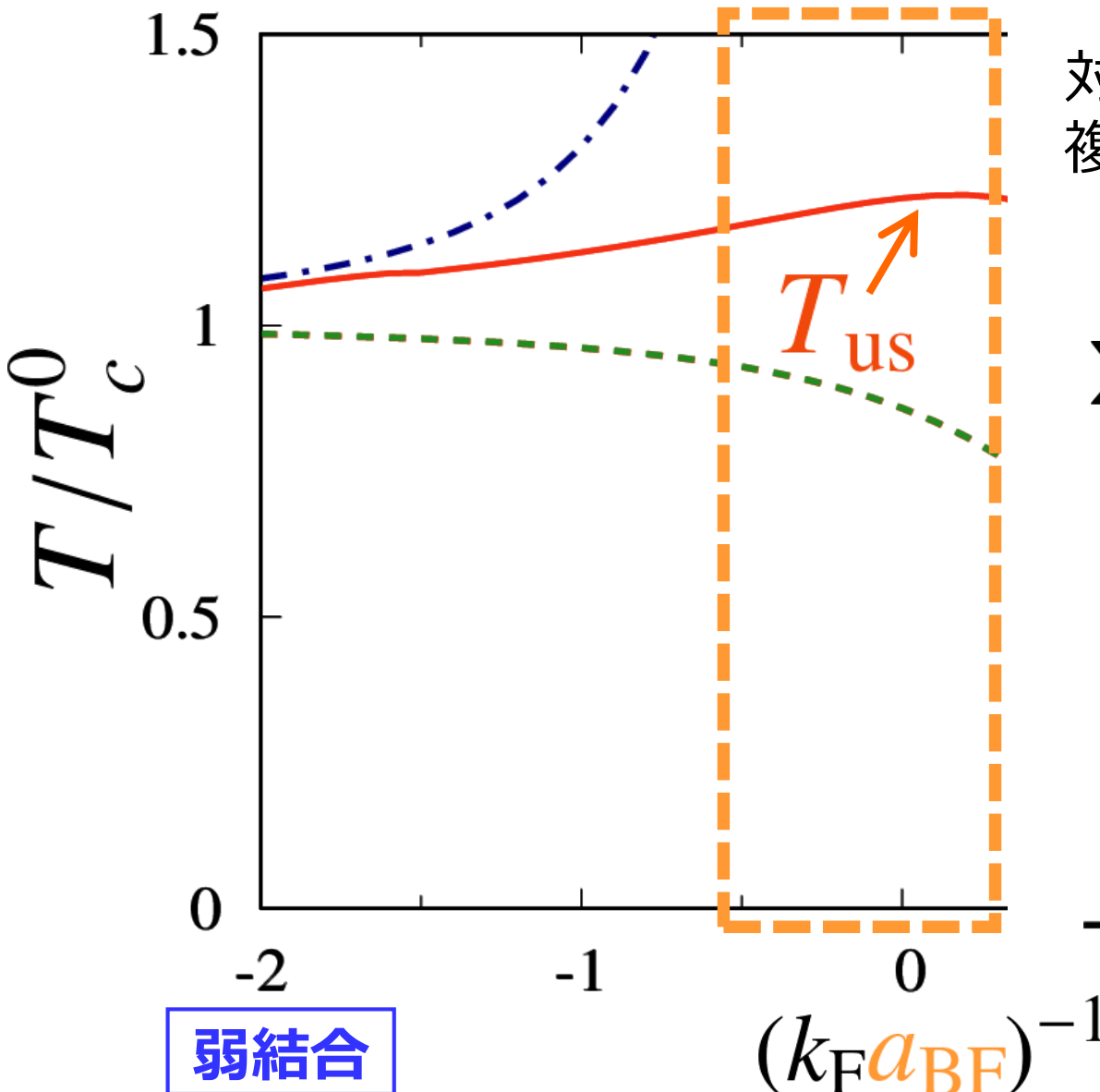
# Bose-Fermi混合気体の相図 (強結合領域)



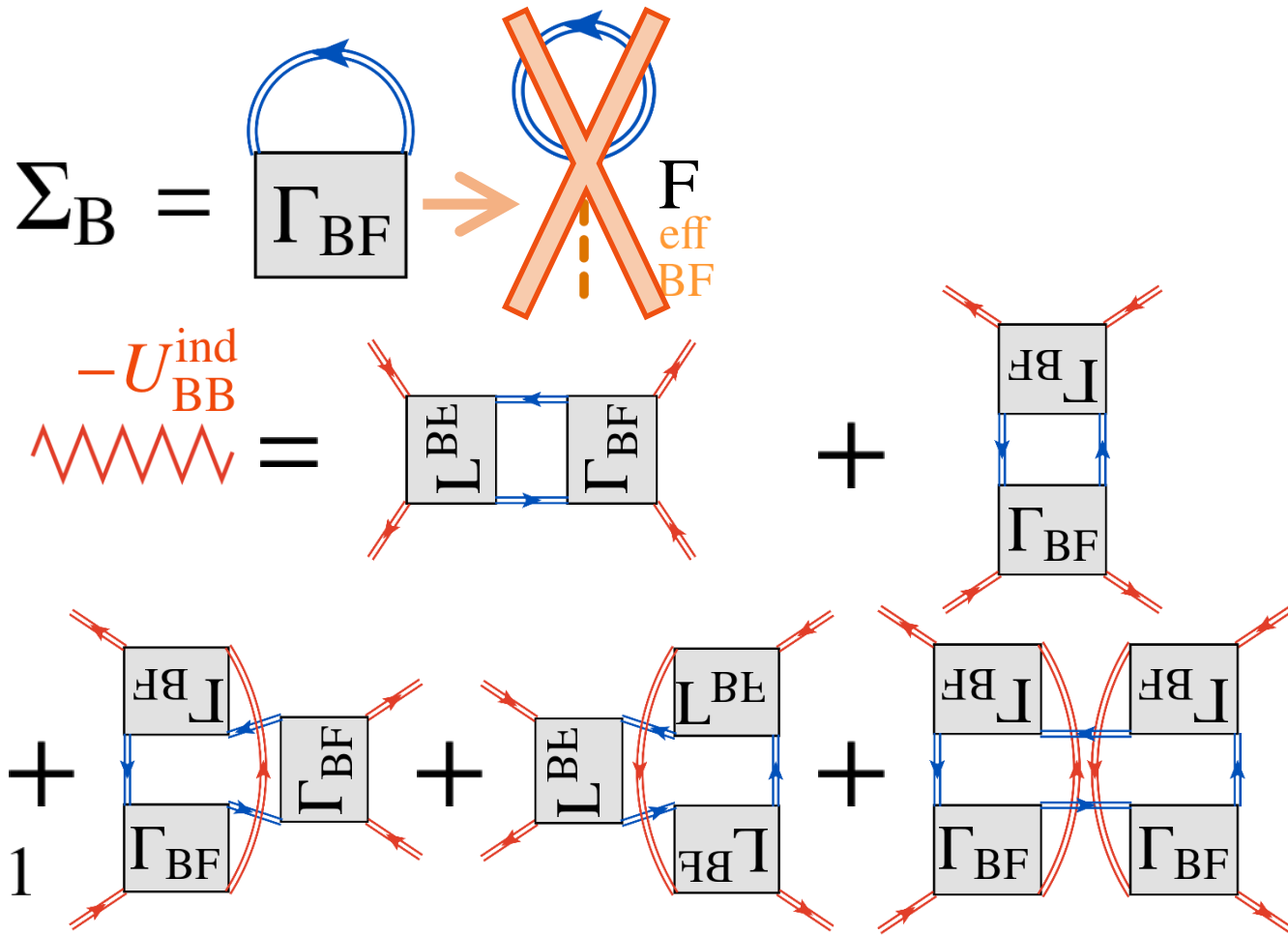
# Bose-Fermi混合気体の相図 (中間結合領域)



# Bose-Fermi混合気体の相図 (中間結合領域)



対形成揺らぎ  $\Gamma_{BF}$  の動的自由度に起因し、  
 複数の有効相互作用がはたらく



# 目次

## 1. 導入

## 2. 定式化

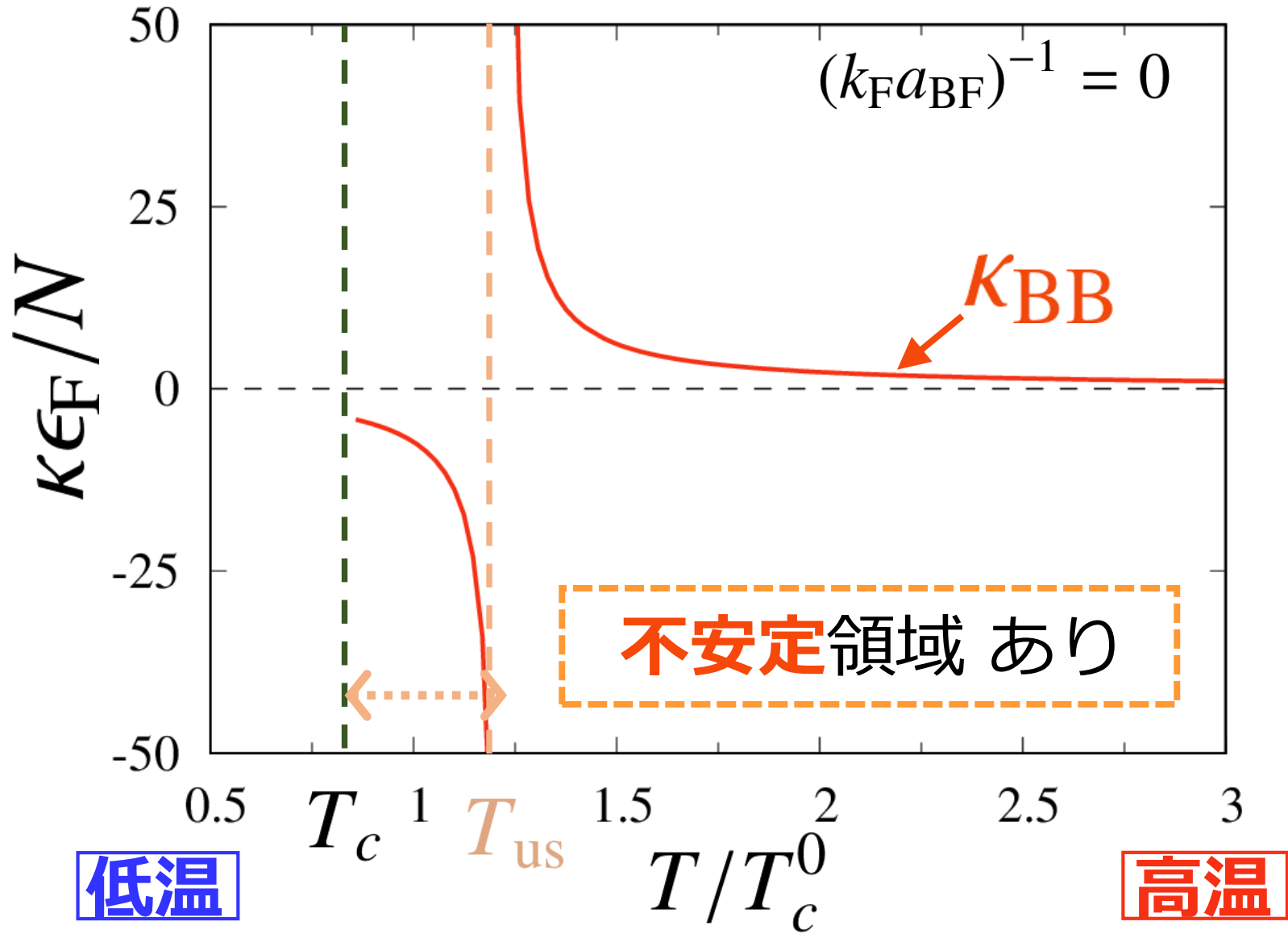
## 3. 結果

- ▶ Boson間斥力がゼロの場合
- ▶ **Boson間斥力が有限の場合**

## 4. まとめ



# 圧縮率行列に対する Bose-Bose 斥力の効果

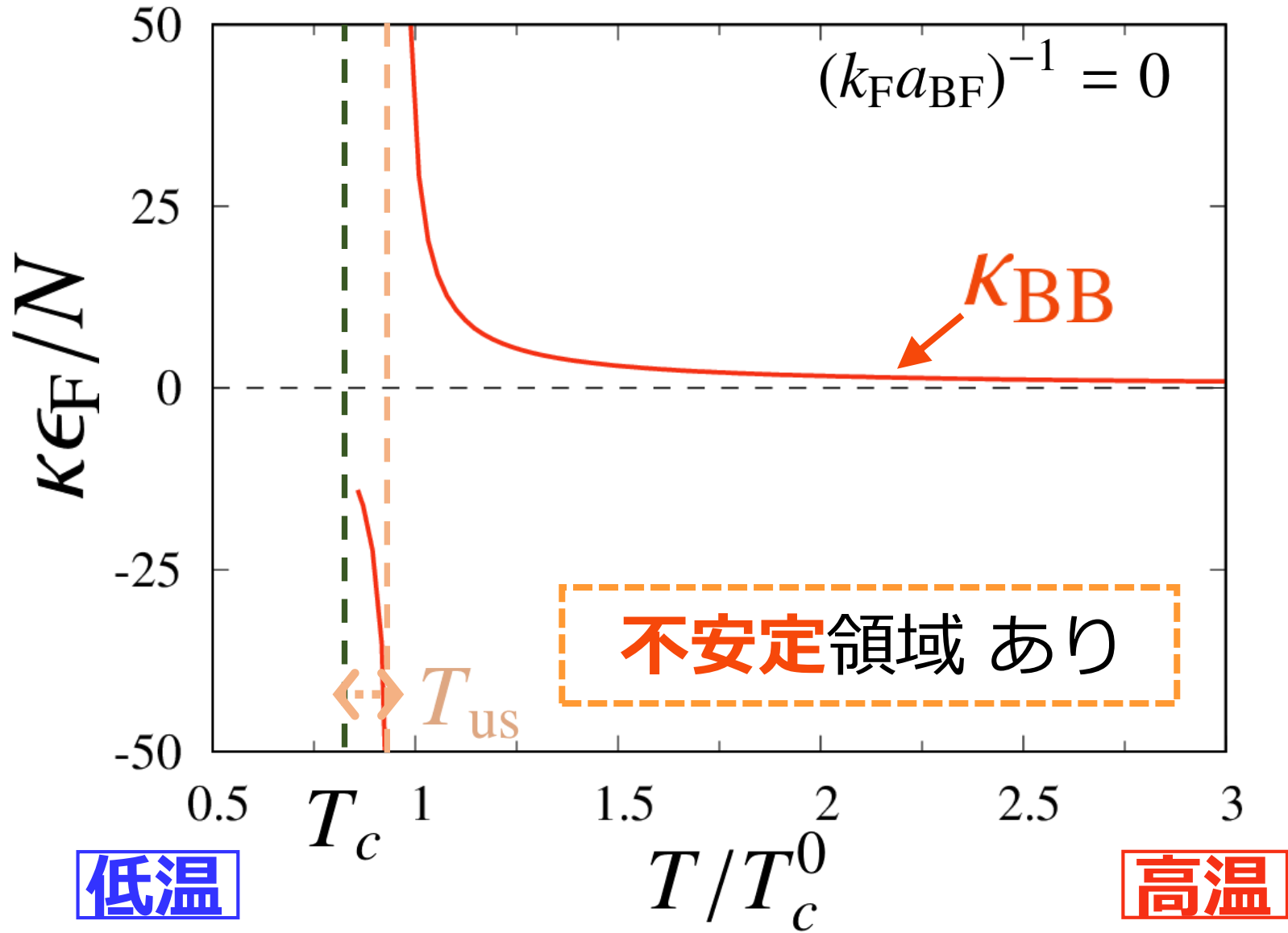


$$n_B^{\frac{1}{3}} a_{BB} = 0 \text{ (斥力なし)}$$

$\epsilon_F$ : Fermiエネルギー

$T_c^0$ : 理想Bose気体のBEC転移温度

# 圧縮率行列に対する Bose-Bose 斥力の効果



$$n_B^{1/3} a_{BB} = 0 \text{ (斥力なし)}$$



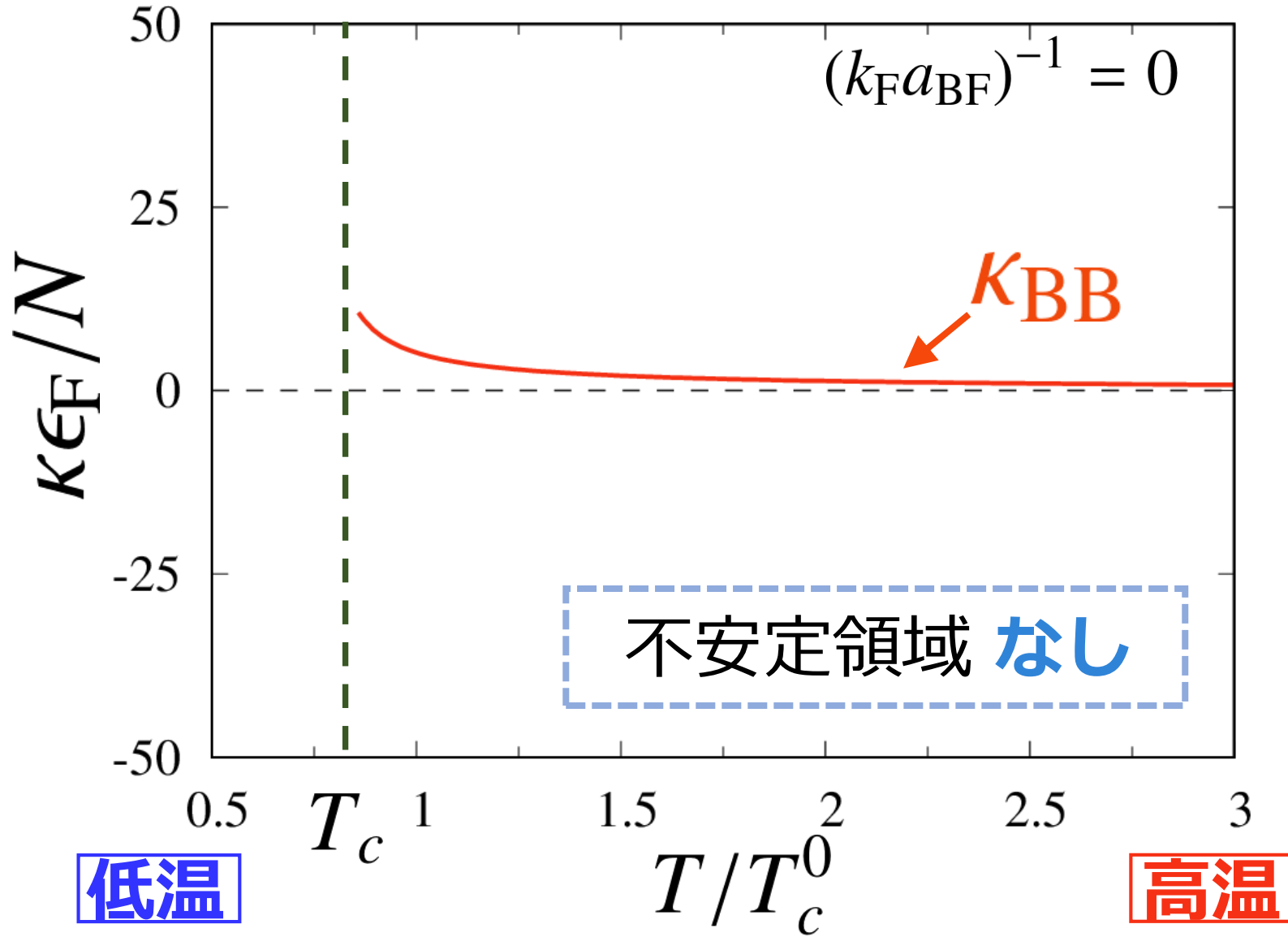
$$n_B^{1/3} a_{BB} = 0.05 \text{ (斥力弱)}$$



$\epsilon_F$ : Fermiエネルギー

$T_c^0$ : 理想 Bose 気体の BEC 転移温度

# 圧縮率行列に対する Bose-Bose 斥力の効果



$n_B^{1/3} a_{BB} = 0$  (斥力なし)



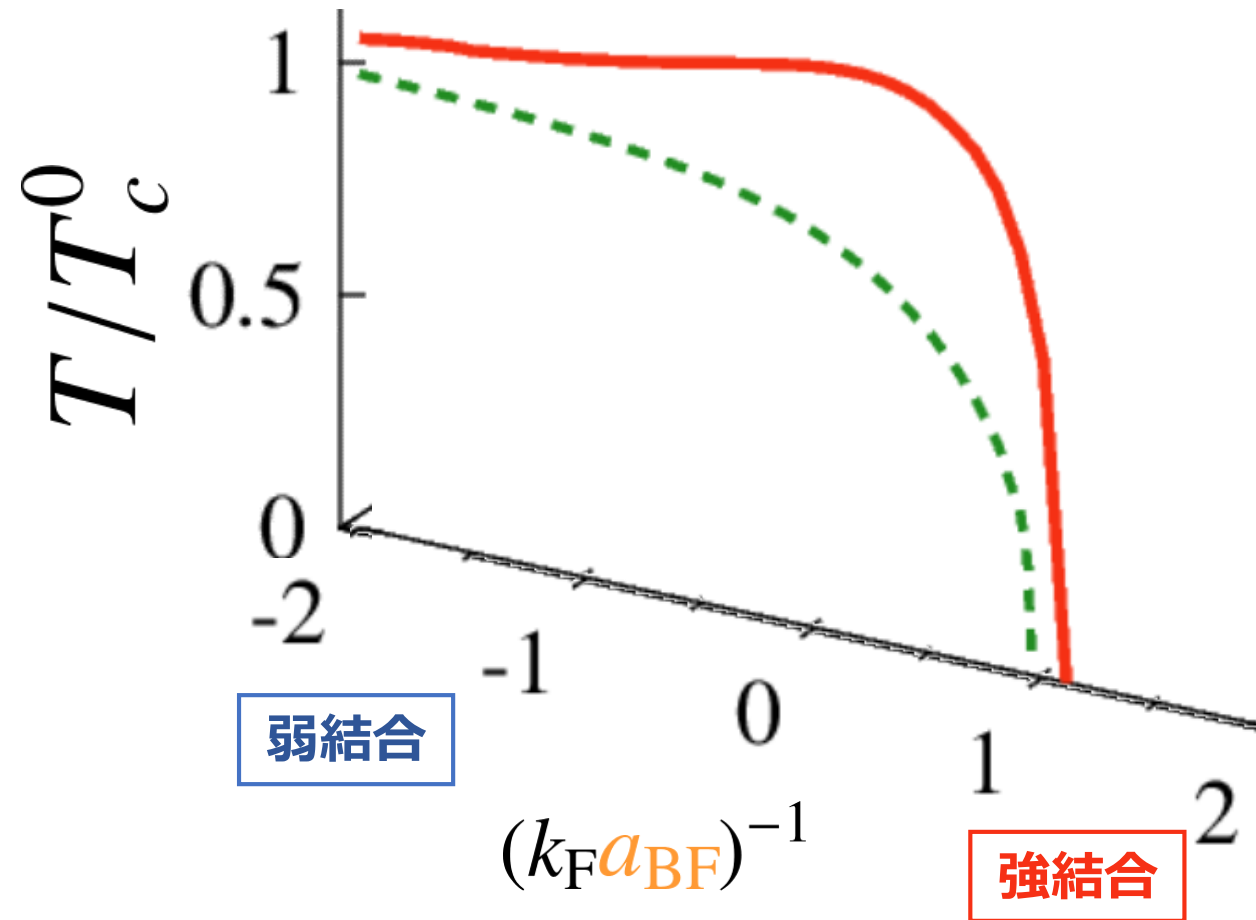
$n_B^{1/3} a_{BB} = 0.05$  (斥力弱)



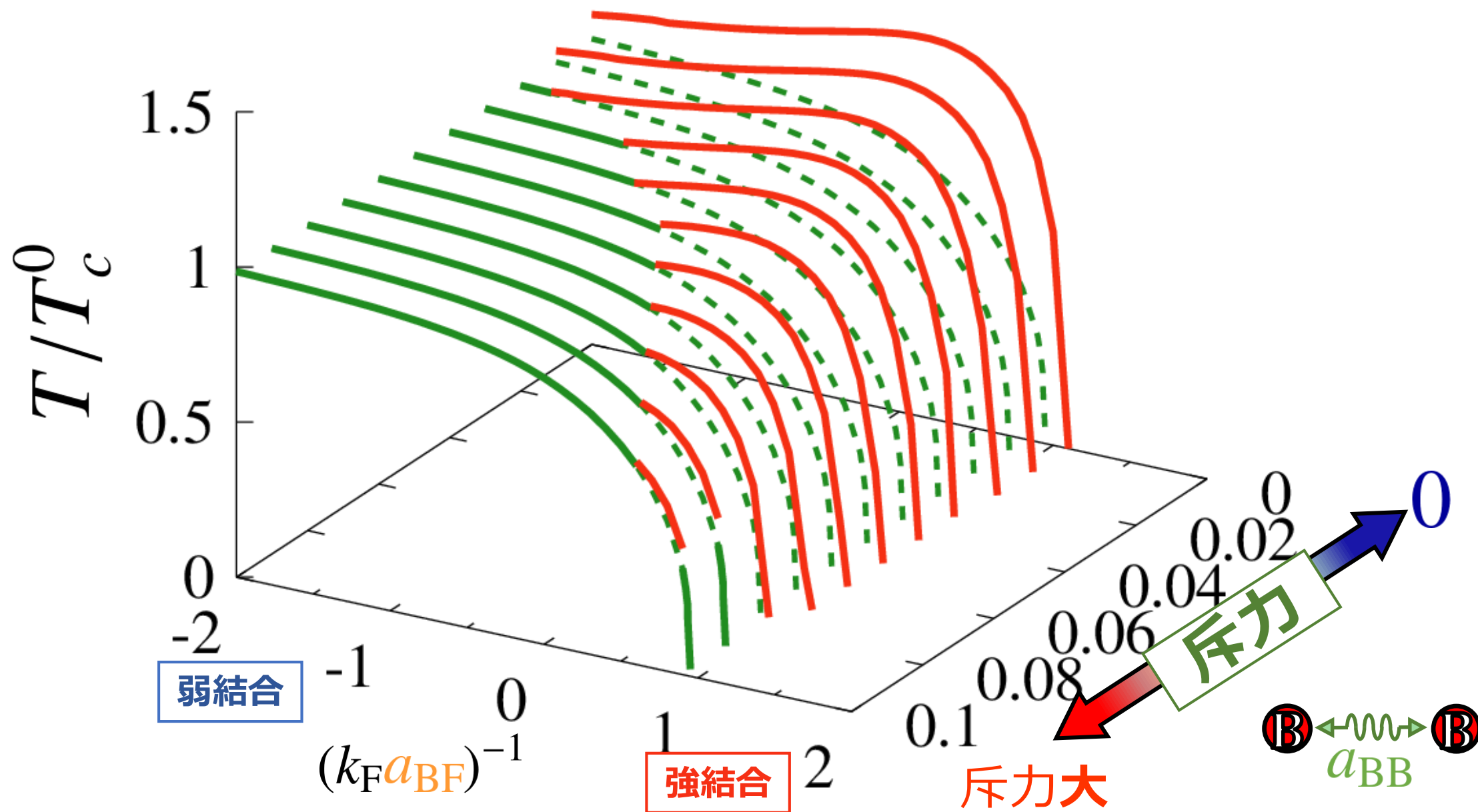
$n_B^{1/3} a_{BB} = 0.1$  (斥力强)

$\epsilon_F$ : Fermiエネルギー  
 $T_c^0$ : 理想 Bose 気体の BEC 転移温度

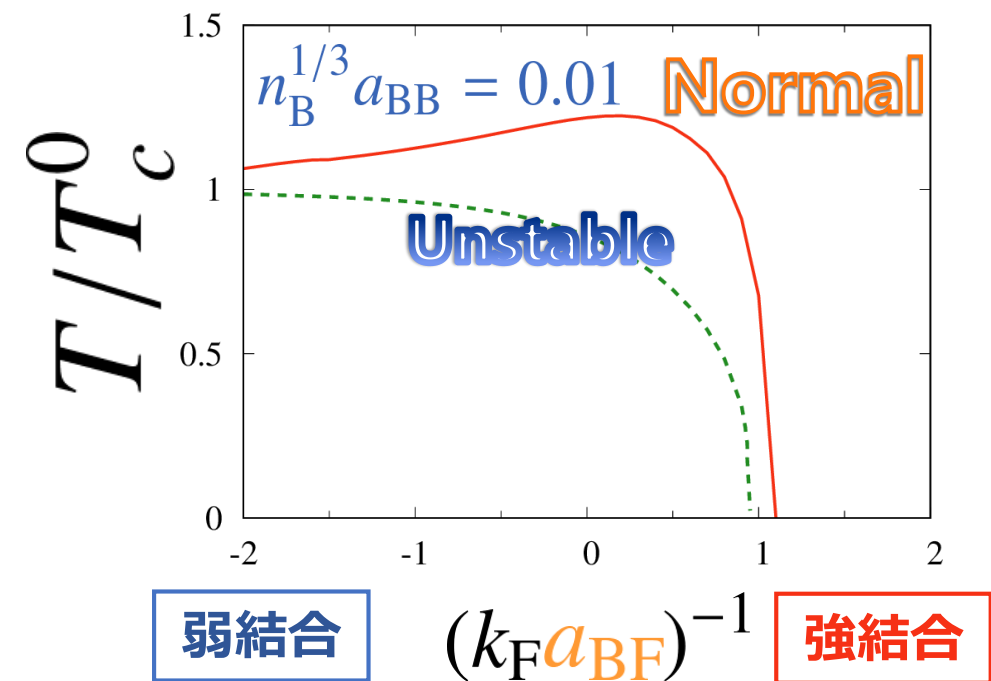
# Bose-Fermi混合気体の相図 (B-B斥力有限の場合)



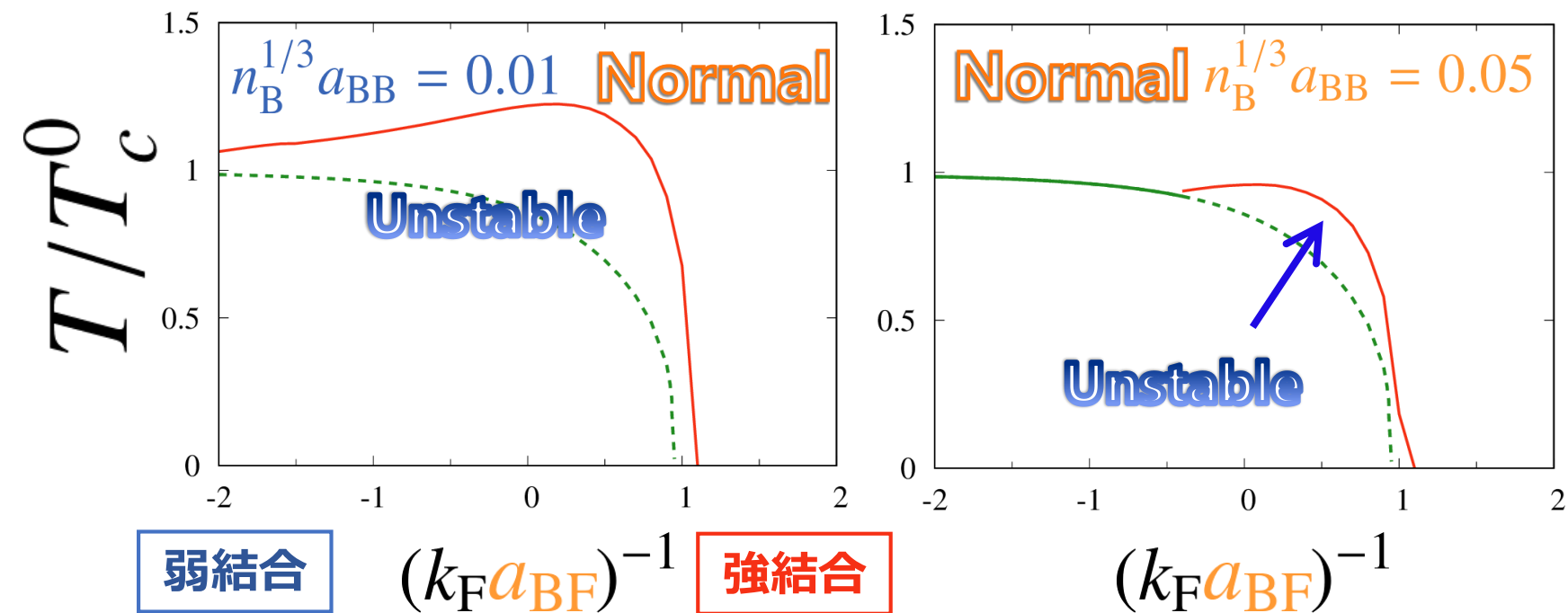
# Bose-Fermi混合気体の相図 (B-B斥力有限の場合)



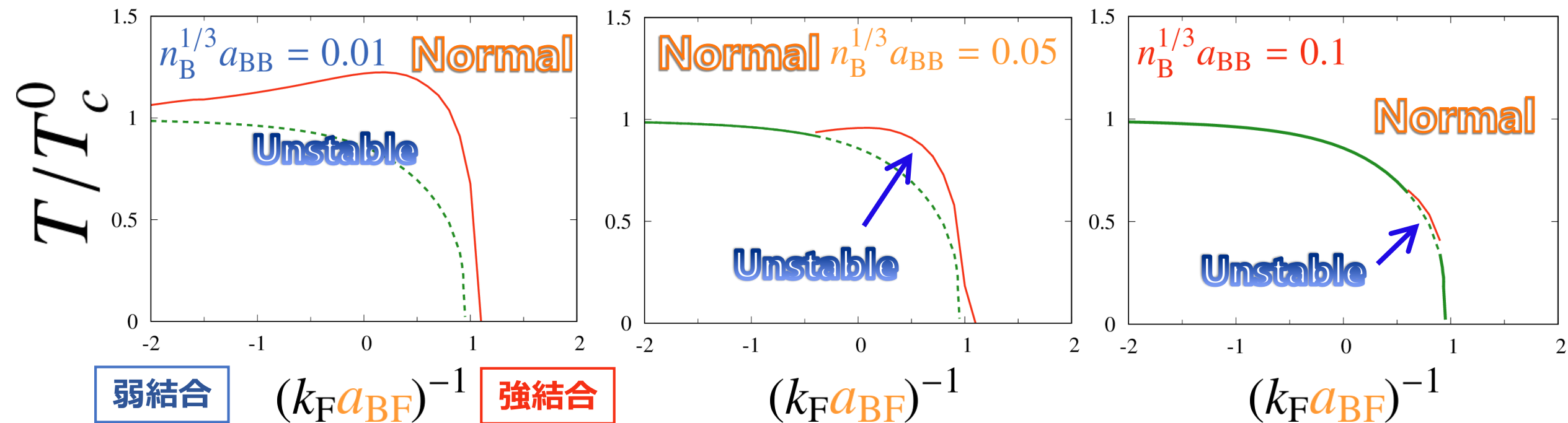
# Bose-Fermi混合気体の相図 (B-B斥力有限の場合)



# Bose-Fermi混合気体の相図 (B-B斥力有限の場合)

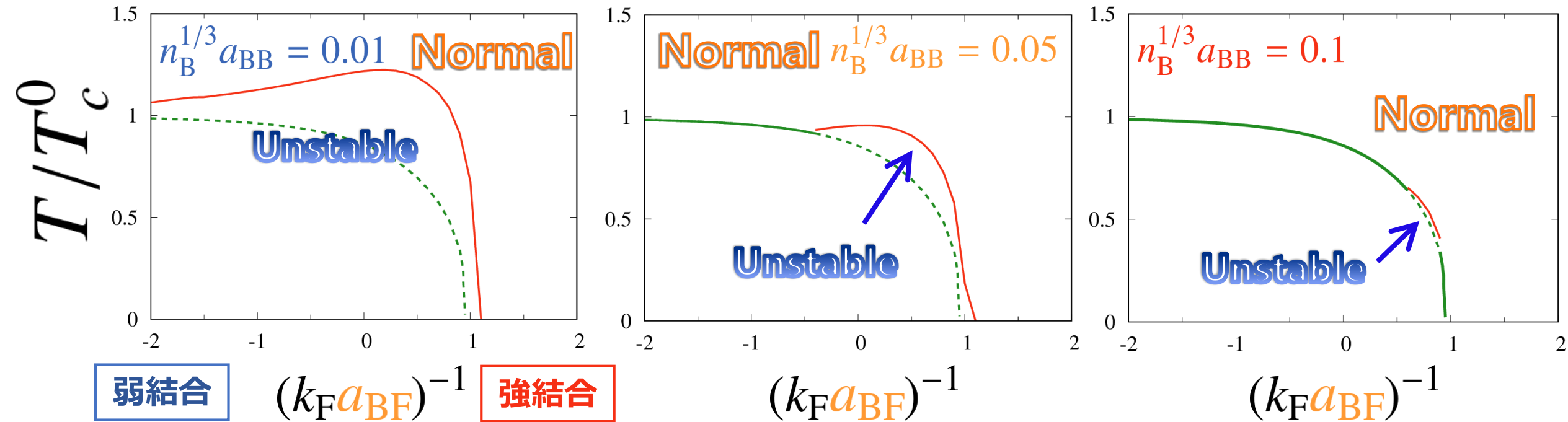


# Bose-Fermi混合気体の相図 (B-B斥力有限の場合)





# Bose-Fermi混合気体の相図 (B-B斥力有限の場合)



実験的に実現可能なB-B斥力の範囲で、正常相のほぼ全域にアクセス可能

# 目次

1. 導入

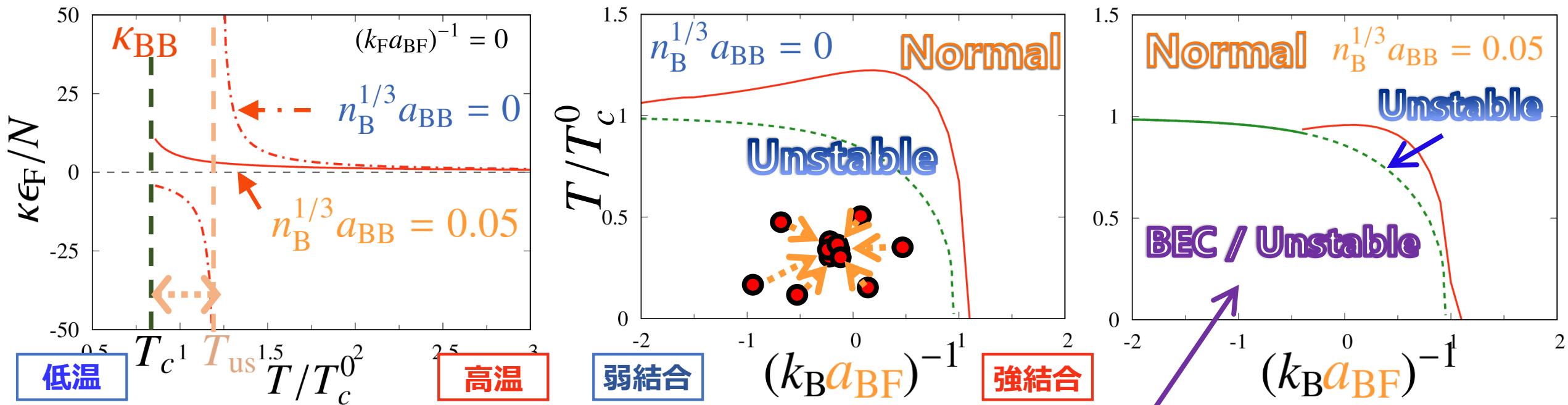
2. 定式化

3. 結果

4. まとめ

# まとめ

- Bose-Fermi混合原子気体の常流動相において、自己無撞着 $T$ 行列近似を定式化し熱力学的安定性を解析、全相互作用強度領域での安定-不安定領域境界を決定した。
- 量子臨界点近傍を除く常流動相のほぼ全領域が、実験的に実現可能な程度の大きさの斥力により安定化させられることを明らかにした。



- 今後の課題：成分間インバランスの存在による相境界の変化、BEC相における不安定性