
孤立量子系における 非平衡ダイナミクスと熱平衡化

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻（上田研究室）

濱崎立資

共同研究者：藤本和也、上田正仁

「熱場の量子論とその応用」 2018/8/28-30



Outline

1. イントロダクション

2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論

- ・ 熱平衡化の定義と目標
- ・ Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

3. 非可積分系と熱平衡化

- ・ 非可積分性とETHや熱平衡化との対応
- ・ 典型性の仮説はETHを説明するか？

RH and M. Ueda, PRL,
120, 080603 (2018).

4. 熱平衡化までの非平衡過程

- ・ 量子カオスとダイナミクス
- ・ 不可逆性と非可換性の等価性

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

Outline

1. イン트로ダクション

2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論

- ・ 熱平衡化の定義と目標
- ・ Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

3. 非可積分系と熱平衡化

- ・ 非可積分性とETHや熱平衡化との対応
- ・ 典型性の仮説はETHを説明するか？

RH and M. Ueda, PRL,
120, 080603 (2018).

4. 熱平衡化までの非平衡過程

- ・ 量子カオスとダイナミクス
- ・ 不可逆性と非可換性の等価性

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

孤立量子系の統計力学の目標

- ❖ ミクロな動力学から平衡統計力学を正当化したい
(2, 3章の内容)

$$\langle \psi(0) | \hat{O} | \psi(0) \rangle \xrightarrow[\text{ユニタリー時間発展}]{?} \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{mic}} \hat{O}]$$

(量子力学) ミクロカノニカル分布
(平衡統計力学)

1929年のJ. von Neumannに始まる問題

2000年代後半から急速に発展



- ❖ 非平衡過程での普遍的な物理を明らかにしたい
(4章の内容)

孤立量子系の実現

❖ 冷却原子系

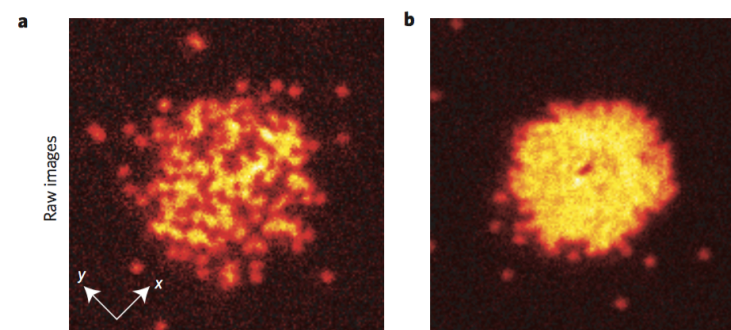
- ・ mK以下に冷却した原子集団を真空中に閉じ込め
超高真空、極低温 → ほとんど孤立した量子系
- ・ 高い制御性（相互作用、格子の形、次元など）
- ・ 観測技術の発展
(運動量空間・実空間の粒子分布)

❖ イオントラップ

長距離相互作用系などもモデル化

❖ 超伝導キュービット

❖ ダイヤモンドのNV中心



J. F. Sherson et al., Nature (2010)

Outline

1. イントロダクション
2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論
 - ・ 熱平衡化の定義と目標
 - ・ Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)
3. 非可積分系のクエンチと熱平衡化
 - ・ 非可積分性とETHや熱平衡化との対応
 - ・ 典型性の仮説はETHを説明するか？
4. 熱平衡化までの非平衡過程
 - ・ 量子カオスとダイナミクス
 - ・ 不可逆性と非可換性の等価性

RH and M. Ueda, PRL,
120, 080603 (2018).

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

純粋状態による熱平衡状態の記述

❖ 初期状態を純粋状態に取る

$$|\psi\rangle$$

→ 時間発展後も純粋状態のまま $|\psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle$

状態のレベルではミクロカノニカル分布とは異なる

$$\hat{\rho}_t = |\psi_t\rangle \langle \psi_t| \neq \hat{\rho}_{\text{mic}}$$

❖ 統計力学で興味のある物理量 $\hat{\mathcal{O}}$ に着目すれば、

$\hat{\rho}_t$ が熱平衡値を与える場合がある

$$\mathcal{O}(t) = \text{Tr}[\hat{\rho}_t \hat{\mathcal{O}}] \simeq \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{mic}} \hat{\mathcal{O}}]$$

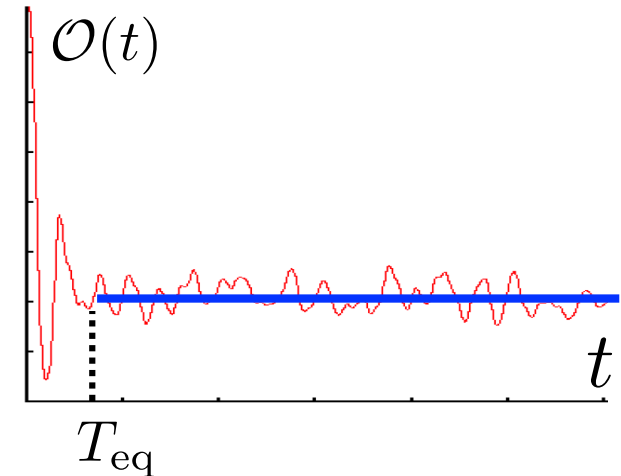
熱平衡化とは？

ある緩和時間 T_{eq} が存在し

$t \geq T_{\text{eq}}$ において

$\mathcal{O}(t) \simeq \mathcal{O}_{\text{mic}}$ を要求？

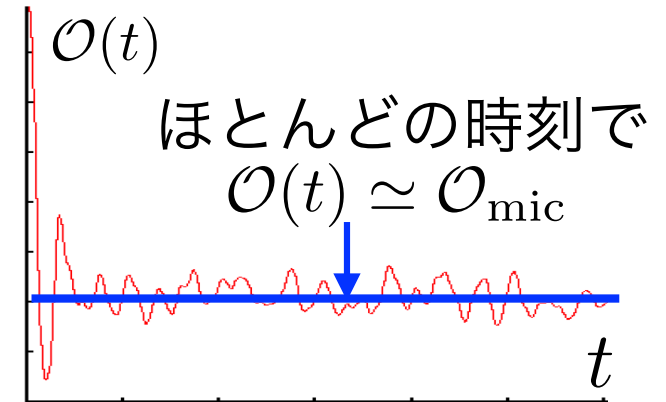
$\mathcal{O}(t) = \langle \psi_t | \hat{\mathcal{O}} | \psi_t \rangle$, $\mathcal{O}_{\text{mic}} = \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{mic}} \hat{\mathcal{O}}]$



❖ 再帰現象のため上式は成り立たない

任意の $\epsilon > 0$ に対しある T_{rec} が存在し $\| |\psi(T_{\text{rec}})\rangle - |\psi_0\rangle \| \leq \epsilon$

熱平衡化とは？



❖ 本発表での熱平衡化の定義：

ほとんどの時刻で $O(t) \simeq O_{mic}$ の時、

「 $\hat{O}$ が熱平衡化する」と呼ぶことにする

(注：文献によって定義は異なる)

熱平衡化の条件

❖ ほとんどの時間で $\mathcal{O}(t) \simeq \mathcal{O}_{\text{mic}}$ となるには？

① 定常状態へ緩和するか

ほとんどの時間で $\mathcal{O}(t) \simeq \overline{\mathcal{O}(t)}$ を要求

← $\Delta \mathcal{O}_t^2 := [\mathcal{O}(t) - \overline{\mathcal{O}(t)}]^2$ が十分小さい

時間揺らぎ

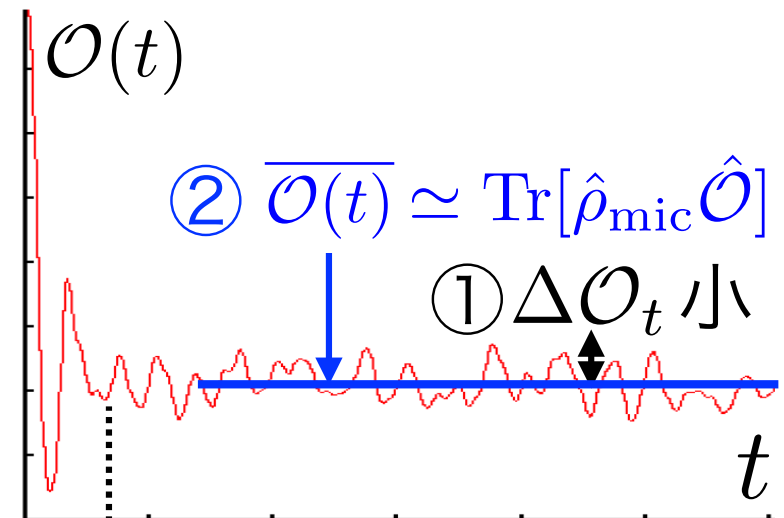
② 長時間平均が熱平衡分布で記述されるか

$$\overline{\mathcal{O}(t)} \simeq \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{mic}} \hat{\mathcal{O}}]$$

$$\bar{A} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

J. von Neumann,
Zeit. fur. Phys. (1929)

M. Srednicki, PRE (1994)



量子系での熱平衡化

❖ 初期状態の時間発展 $\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t} |\psi_0\rangle \langle\psi_0| e^{i\hat{H}t}$

$$\mathcal{O}(t) = \text{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{\mathcal{O}}] = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha}^* c_{\beta} e^{i(E_{\alpha}-E_{\beta})t} \mathcal{O}_{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} := \langle E_{\alpha} | \hat{\mathcal{O}} | E_{\beta} \rangle \quad c_{\alpha} := \langle E_{\alpha} | \psi_0 \rangle$$

❖ エネルギー固有値についての仮定

(非縮退) $E_{\alpha} = E_{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta$

(非共鳴) $E_{\alpha} - E_{\beta} = E_{\gamma} - E_{\delta} \neq 0 \Rightarrow \alpha = \gamma, \beta = \delta$

→ 時間平均が実行可能

量子系での熱平衡化

❖ 時間平均を実行

① ある定常状態へ緩和するか

$$\Delta \mathcal{O}_t^2 = \sum_{\alpha \neq \beta} |c_\alpha|^2 |c_\beta|^2 |\mathcal{O}_{\alpha\beta}|^2 \text{ が小さい}$$

② 長時間平均が熱平衡分布で $\sum_{\alpha} |c_\alpha|^2 \mathcal{O}_{\alpha\alpha} \simeq \mathcal{O}_{\text{mic}}$ 記述されるか

一般には初期状態と行列要素に依存

← 行列要素に関してETHを仮定すると、
初期状態の詳細に依存せず条件を達成

Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

❖ 物理量の行列要素に着目 $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$

・ $\hat{\mathcal{O}}$ についての非対角項に関するETH:

(興味あるエネルギー領域内の)

全ての $|E_\alpha\rangle, |E_\beta\rangle$ に対し $\mathcal{O}_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ (熱力学極限)
($E_\alpha \neq E_\beta$)

→ 任意の初期状態について $\hat{\mathcal{O}}$ の定常状態への緩和を正当化

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{O}_t^2 &= \sum_{\alpha \neq \beta} |c_\alpha|^2 |c_\beta|^2 |\mathcal{O}_{\alpha\beta}|^2 \\ &\leq \left[\max_{\alpha \neq \beta} |\mathcal{O}_{\alpha\beta}| \right]^2 \sum_{\alpha\beta} |c_\alpha|^2 |c_\beta|^2 \\ &\leq \left[\max_{\alpha \neq \beta} |\mathcal{O}_{\alpha\beta}| \right]^2 \rightarrow 0 \\ &\quad \text{ETH}\end{aligned}$$

J. von Neumann, Zeit. fur. Phys. (1929);
M. Srednicki, PRE (1994)

Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

・ $\hat{O}$ についての (対角項に関する) ETH

系のサイズに対し subextensive

エネルギーシェル $[E - \delta E/2, E + \delta E/2]$ 内の全ての $|E_\alpha\rangle$ に対し

$$O_{\alpha\alpha} \rightarrow O_m(E) \quad \text{熱力学極限で一定値へ漸近}$$

(subextensiveな誤差は除く)

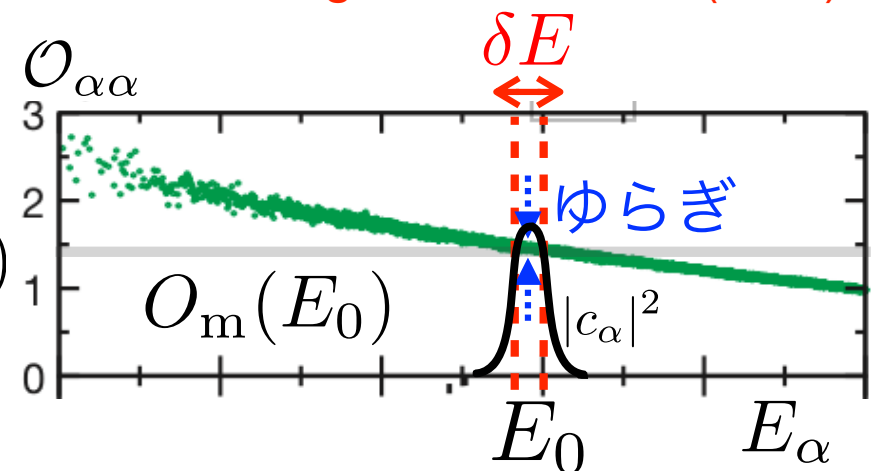
→ エネルギー揺らぎの小さいすべての初期状態に対し

$\overline{O(t)} \simeq \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{mic}} \hat{O}]$ を正当化

$$\overline{O(t)} = \frac{\sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 \langle E_{\alpha} | \hat{O} | E_{\alpha} \rangle}{\sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2} \simeq \langle \hat{O} \rangle_{\text{mic}}(E_0)$$

$\underset{\text{規格化}}{= 1} \quad \underset{\text{ETH}}{\simeq O_m(E_0)}$

M. Rigol et al., Nature (2008)



Outline

1. イントロダクション

2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論

- ・ 熱平衡化の定義と目標
- ・ Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

3. 非可積分系と熱平衡化

- ・ 非可積分性とETHや熱平衡化との対応
- ・ 典型性の仮説はETHを説明するか？

RH and M. Ueda, PRL,
120, 080603 (2018).

4. 熱平衡化までの非平衡過程

- ・ 量子カオスとダイナミクス
- ・ 不可逆性と非可換性の等価性

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

量子多体系の分類

❖ 可積分系

F. H. L. Essler and M. Fagotti, J. Stat. Mech (2016).

- ・ 自由粒子系、横磁場Ising模型、XY模型など
(準粒子の二次形式にマップできる)
- ・ XXZ模型、Lieb-Liniger模型など (Bethe ansatz)

❖ Many-body localization (MBL)

R. Nandkishore and D. A. Huse, Ann. Review of Cond. Mat. Phys. (2015).

- ・ 強い乱れにより状態が局在

→ 局所保存量により熱平衡化が起こらない

❖ 非可積分系...可積分点・MBLから十分遠い系

→ ETHによって熱平衡化する (いくつかの例外あり)

熱平衡化の冷却原子実験

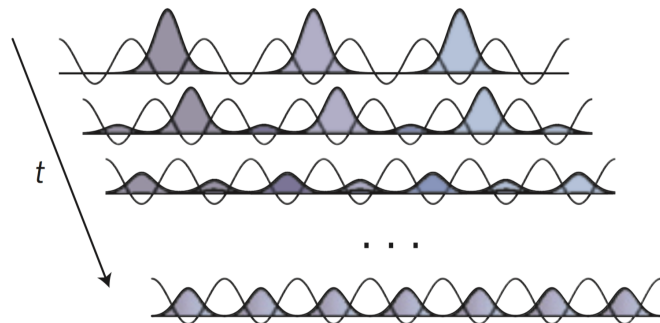
❖ 非可積分系の熱平衡化

S. Trotzky et al., Nat. Phys. (2012).

$$\hat{H} = \sum_j \left[-J(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} + \text{h.c.}) + \frac{U}{2} \hat{n}_j(\hat{n}_j - 1) + \frac{K}{2} \hat{n}_j j^2 \right]$$

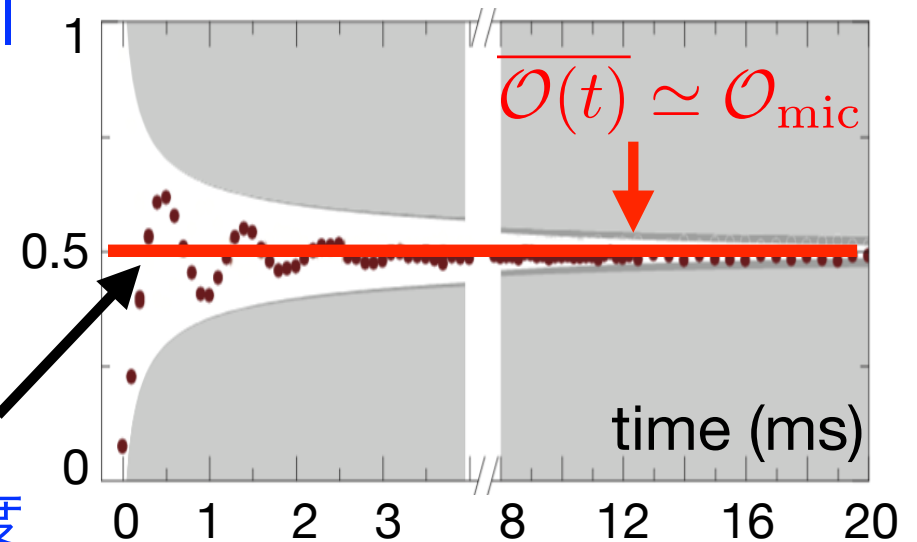
$$\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$$

1D Bose-Hubbard model



奇数サイトの粒子密度

$\mathcal{O}(t)$



❖ 可積分系やMBL下の非熱平衡化

(可積分系) T. Kinoshita et al., Nature (2016).; T. Langen et al., Science (2015).

(MBL) M. Schreiber et al., Science (2016).; J. Choi et al., Science (2016).

非可積分性と熱平衡化

M. Rigol, Phys. Rev. Lett. 103, 100403 (2009).

❖ 可積分性を調整できるハードコアボゾン系

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^L \left\{ -t \left(\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + \text{H.c.} \right) + V \left(\hat{n}_i - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{i+1} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. - t' \left(\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+2} + \text{H.c.} \right) + V' \left(\hat{n}_i - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{i+2} - \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (\text{一次元、PBC})$$

$t' = V' = 0$: 可積分系

$\neq 0$: 非可積分系

❖ パラメーターを時刻0で変化させる :

$$t' = V' \text{ 固定} \quad t = 0.5, V = 2.0 \rightarrow t = 1.0, V = 1.0$$

初期状態 : 初期ハミルトニアンの励起固有状態

非可積分性と熱平衡化

M. Rigol, Phys. Rev. Lett. 103, 100403 (2009).

❖ 物理量

$$\hat{n}(k) = \frac{1}{L} \sum_{i,j} e^{-k(i-j)} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j$$

$$\hat{N}(k) = \frac{1}{L} \sum_{i,j} e^{-k(i-j)} \hat{n}_i \hat{n}_j$$

❖ 定常状態のミクロ

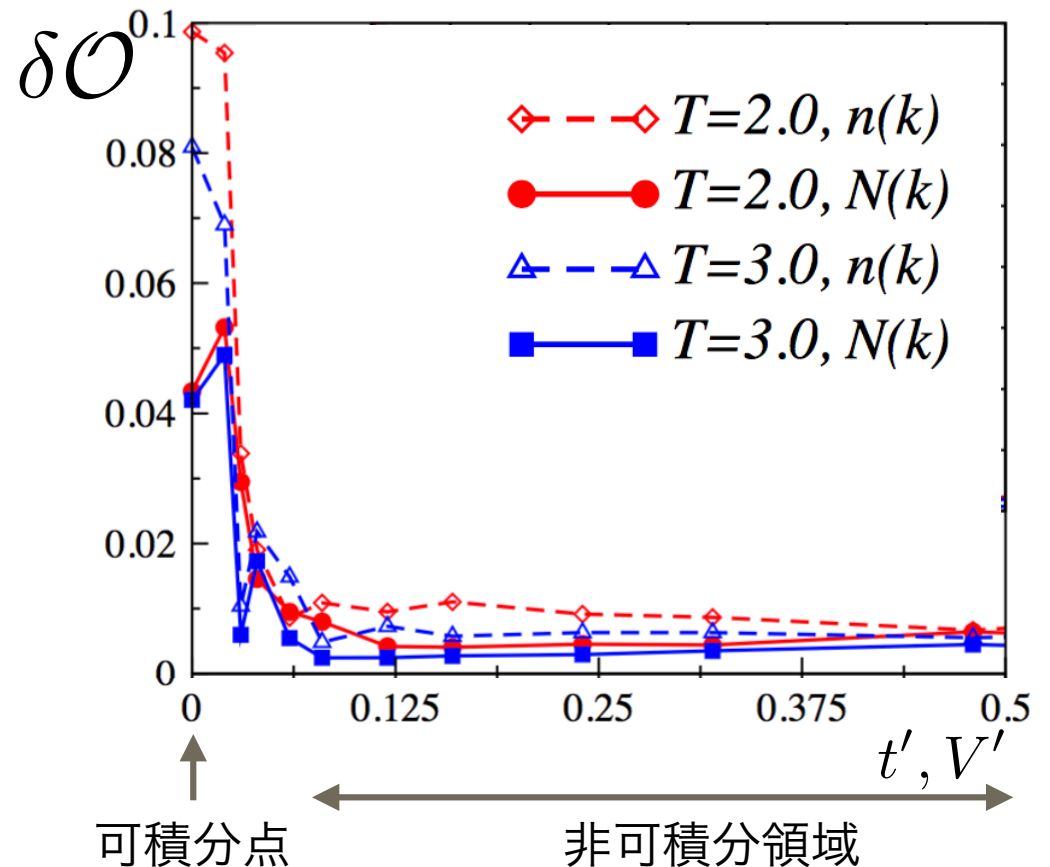
カノニカル分布の精度

$$\delta\mathcal{O} = \frac{\sum_k |(\mathcal{O}_k)_{\text{mic}} - \overline{\mathcal{O}_k(t)}|}{\sum_k \overline{\mathcal{O}_k(t)}}$$

可積分点を離れると

差は小さくなる

→ 熱平衡化！



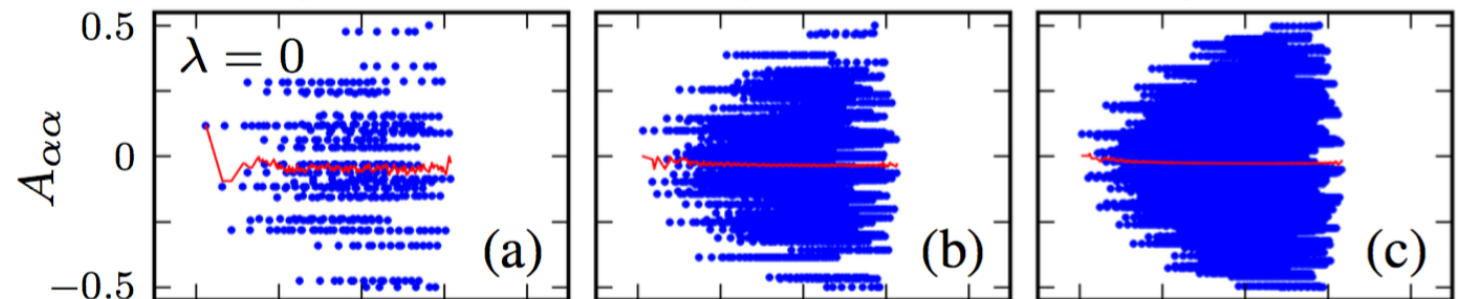
非可積分性とETH

W. Beugeling et al., Phys. Rev. E 89 (2014).

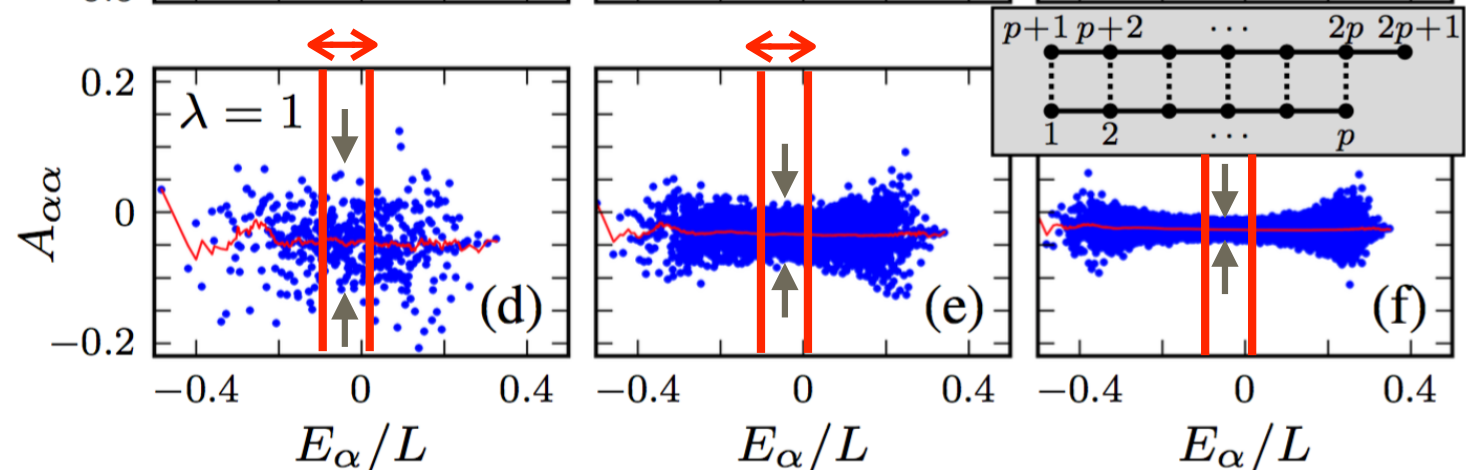
- ❖ 可積分性を変化できる格子スピン系
ETHのサイズ依存性などを検証

$\hat{A}$: あるスピンのz成分 $(L, N_{\uparrow}) = (11, 5)$ $(L, N_{\uparrow}) = (15, 7)$ $(L, N_{\uparrow}) = (19, 9)$

可積分系



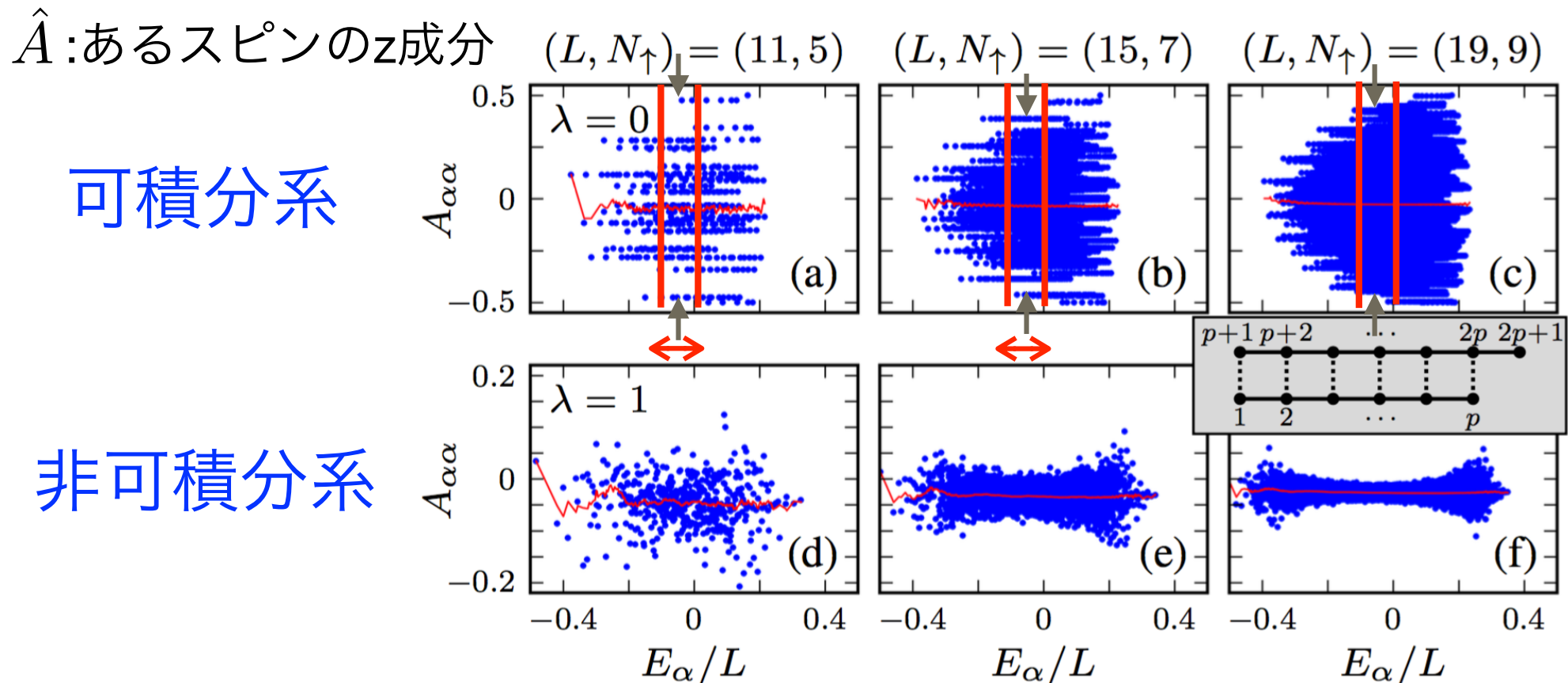
非可積分系



非可積分性とETH

W. Beugeling et al., Phys. Rev. E 89 (2014).

- ❖ 可積分性を変化できる格子スピン系
ETHのサイズ依存性などを検証



非可積分性とETH

W. Beugeling et al., Phys. Rev. E 89 (2014).

❖ ETHは多くの非可積分系で数値的証拠

(例) spinless & spinful fermions,
interacting spin chains, Bose-Hubbard models, ...

ただし、例外も構成できる [RH, T. N. Ikeda, M. Ueda, PRE \(2016\).](#)
[N. Shiraishi and T. Mori, PRL \(2017\).](#)

❖ ただし、数学的な証明は存在しない

❖ 可積分系やMBLの系ではETHは破れる

ETHはなぜ多くの系で成り立つか？

❖ ETHは特殊な理由のない一般的な系で期待される

← 典型性の仮説による説明の試み

J. von Neumann (1929);
P. Reimann (2015)

キーワード：

- ・ 典型性（数学的定理）
- ・ 典型性の仮説（物理的仮説）

これが正しければ対角項に関するETHを説明できる

- ・ 我々の結果...ほとんどの物理量についての非典型性
（典型性の仮説を否定）

行列要素の別表現

- ミクロカノニカルシェル $\mathcal{H}_{\text{mic}}$ 内で、 $\hat{\mathcal{O}}$ を対角化

$$\hat{\mathcal{P}}_{\text{mic}} \hat{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{P}}_{\text{mic}} = \sum_{i=1}^{d_{\text{mic}}} a_i |a_i\rangle \langle a_i| \quad d_{\text{mic}} = \dim [\mathcal{H}_{\text{mic}}] \\ [E - \Delta E/2, E + \Delta E/2], \Delta E = O(\sqrt{V})$$

→固有状態に対する行列要素は

ユニタリ行列 U : $U_{\alpha i} = \langle E_{\alpha} | a_i \rangle$ を用いて表される

$$\mathcal{O}_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^{d_{\text{mic}}} a_i |\langle E_{\alpha} | a_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{d_{\text{mic}}} a_i |U_{\alpha i}|^2$$

$\{a_i\}$ が与えられると、 $\mathcal{O}_{\alpha\alpha}$ は U のみによって決定される

典型性

❖ U は非常に複雑 → 確率的議論を用いる

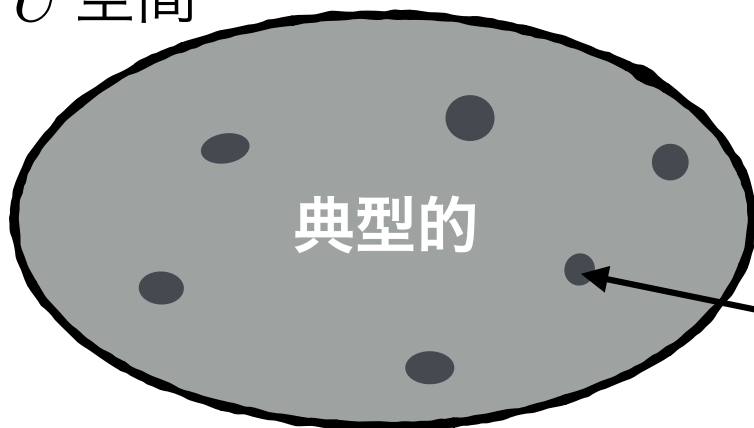
U はユニタリー行列

→ もっとも単純な測度としてハール測度を用いる
(U の正規直交する列ベクトルをランダムベクトルに取る)

❖ 典型性 (数学的定理)

(ハール測度で) ランダムな U に対し、確率1で

U 空間



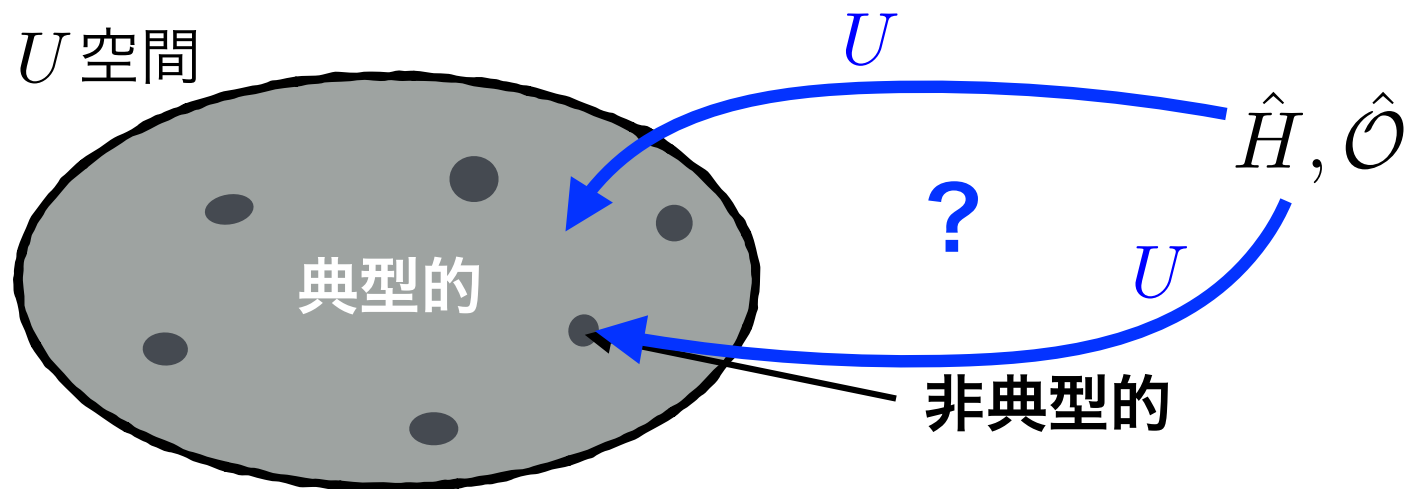
$$\max_{|E_\alpha\rangle, |E_\beta\rangle \in \mathcal{H}_{\text{mic}}} |\langle E_\alpha | \hat{O} | E_\alpha \rangle - \langle E_\beta | \hat{O} | E_\beta \rangle|$$

が系のサイズに対し指数的に減少

非典型的

典型性の仮説

- ❖ 現実に興味のあるハミルトニアンと物理量から得られる U は典型的か？
 - 論理的には決定できない



典型性の仮説

❖ 典型性の仮説（物理的仮説）

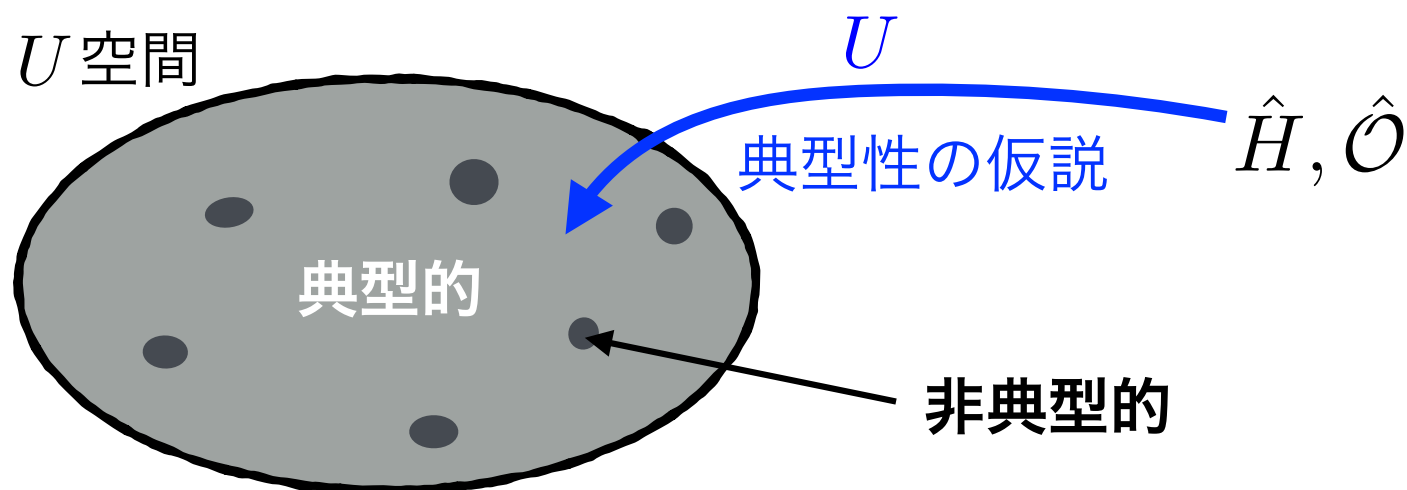
実際の興味ある $\hat{H}, \hat{O}$ に対しても（特別な理由がない限り）

$$\max_{|E_\alpha\rangle, |E_\beta\rangle \in \mathcal{H}_{\text{mic}}} |\langle E_\alpha | \hat{O} | E_\alpha \rangle - \langle E_\beta | \hat{O} | E_\beta \rangle|$$

が系のサイズに対し指数的に減少

→ $\mathcal{H}_{\text{mic}}$ 内の（対角項についての）ETHを正当化

J. von Neumann (1929); P. Reimann (2015)



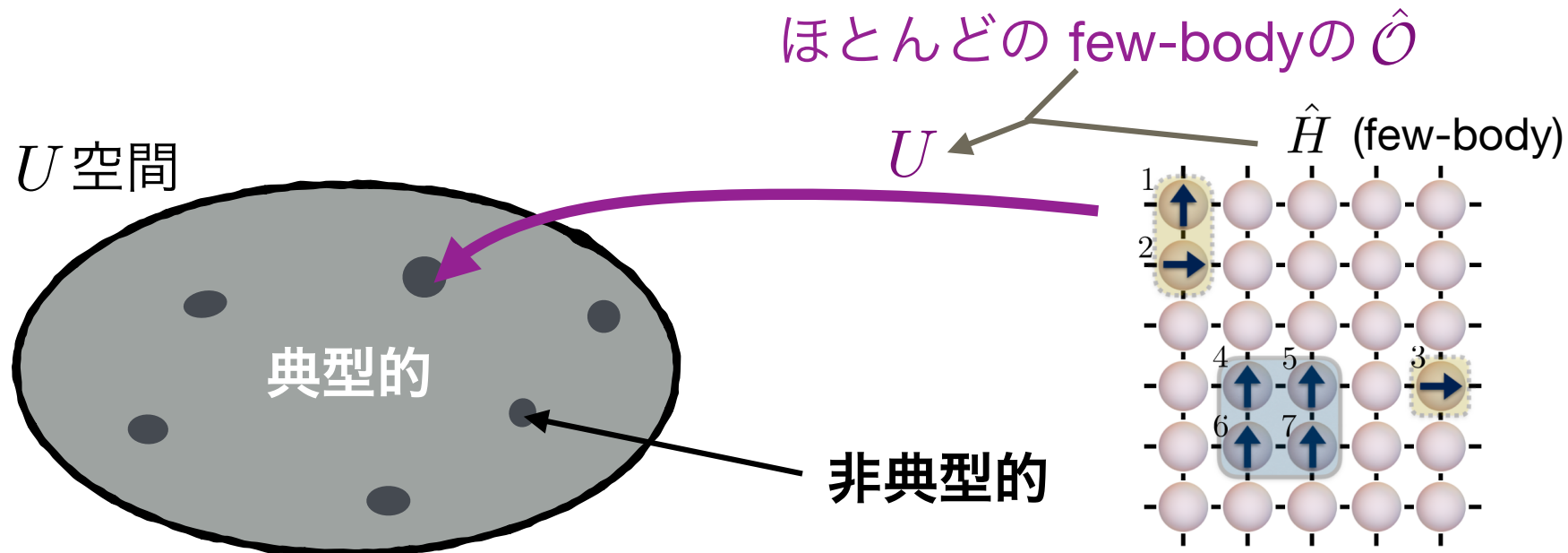
ほとんどのfew-body物理量の非典型性

RH and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. 120, 080603 (2018).

❖ 真に興味があるのはfew-bodyのセッティング

- ・ ハミルトニアンをfew-bodyに取る (任意)
- ・ ほとんどのfew-body物理量に対し行列要素は非典型的

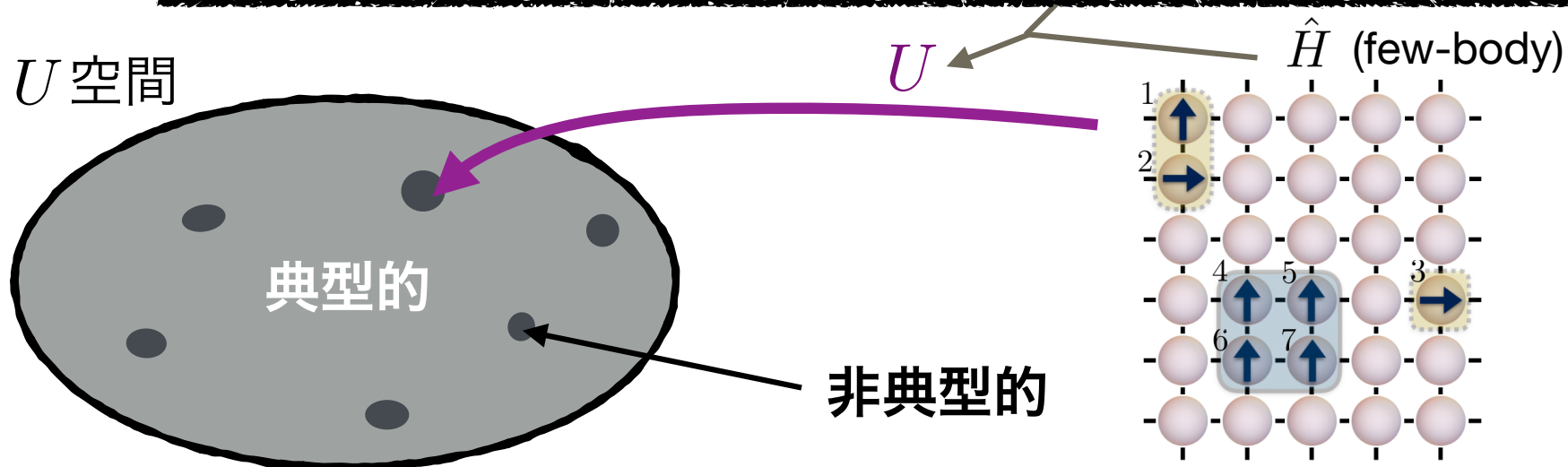
$\max_{|E_\alpha\rangle, |E_\beta\rangle \in \mathcal{H}_{\text{mic}}} |\langle E_\alpha | \hat{\mathcal{O}} | E_\alpha \rangle - \langle E_\beta | \hat{\mathcal{O}} | E_\beta \rangle|$ は指数的に小さくならない



ほとんどのfew-body物理量の非典型性

RH and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. 120, 080603 (2018).

- ❖ 真に興味があるのはfew-bodyのセッティング
 - ・ ハミルトニアンをfew-bodyに取る (任意)
 - ・ ほとんどのfew-body物理量に対し行列要素は非典型的
- 現実の系はミクロカノニカルシェル内で非典型的
ETHの正当化には従来の典型性以外の説明が必要**



Outline

1. イントロダクション

2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論

- ・ 熱平衡化の定義と目標
- ・ Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

3. 非可積分系と熱平衡化

- ・ 非可積分性とETHや熱平衡化との対応
- ・ 典型性の仮説はETHを説明するか？ RH and M. Ueda, PRL, 120, 080603 (2018).

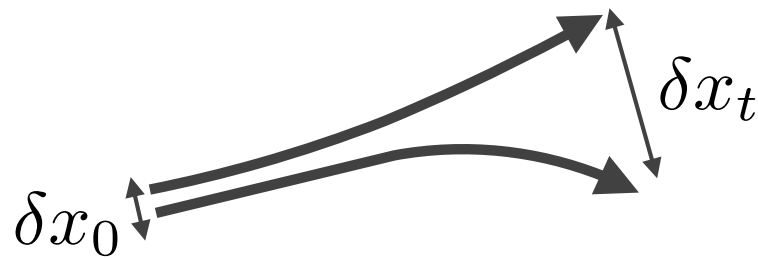
4. 熱平衡化までの非平衡過程

- ・ 量子カオスとダイナミクス
- ・ 不可逆性と非可換性の等価性

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

古典カオスと量子カオス

❖ 古典カオス：摂動に対する軌道の不安定性



$$\delta x_t \sim e^{\lambda t} \delta x_0 \quad \lambda > 0$$

λ : Lyapunov指数

❖ 量子的なユニタリー時間発展は線形

→ 波動関数のレベルでは初期状態鋭敏性はない

$$|\psi_0\rangle \longrightarrow |\psi_t\rangle$$

$$U = e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}$$

$$|\psi'_0\rangle \longrightarrow |\psi'_t\rangle$$

$$|| |\psi_0\rangle - |\psi'_0\rangle || = || |\psi_t\rangle - |\psi'_t\rangle ||$$

量子カオスの特徴づけ I: 不可逆性

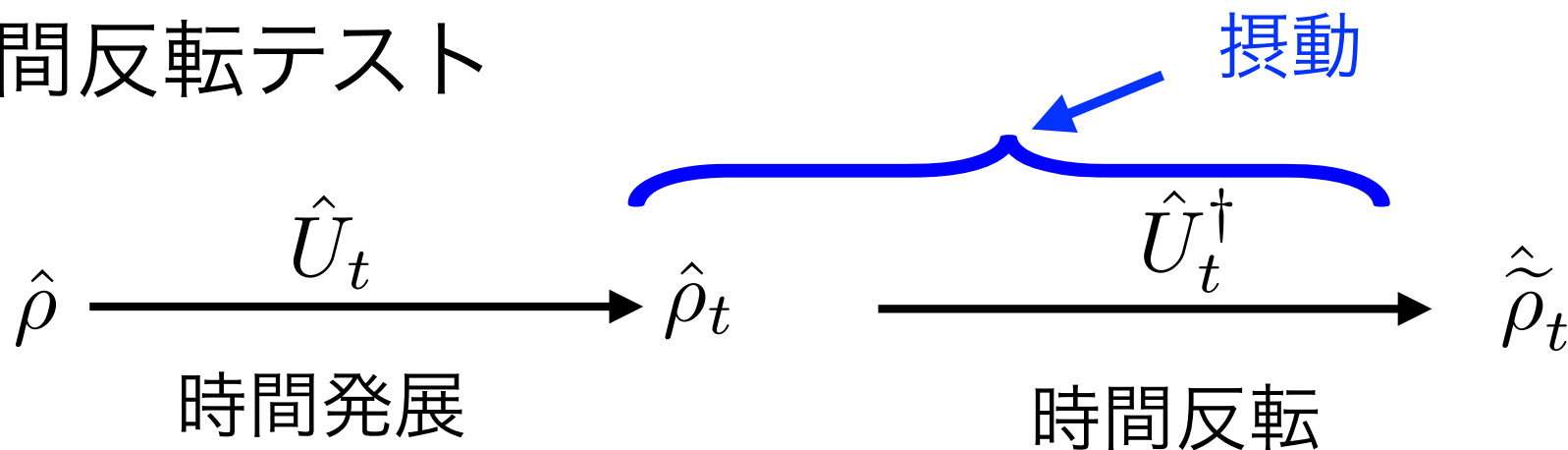
❖ Loschmidtの議論 J. Loschmidt, Wiener Ber. (1876).

系が平衡に達したあとに全ての粒子の速度を反転すると、
一定時間後に元の状態へと戻る

→ 実際には、このような完全な反転操作は不可能

W. Thomson (1874)

❖ 時間反転テスト



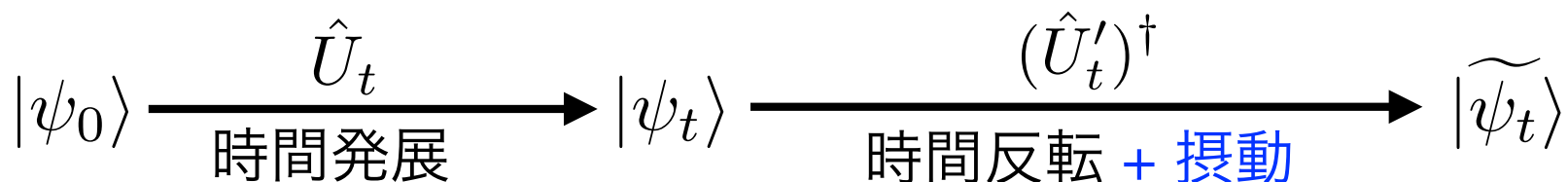
$\hat{\rho}$ と $\tilde{\tilde{\rho}}_t$ はカオス系では大きく異なると期待される

時間反転テストによる不可逆性

- Loschmidt echo $L(t) := |\langle \psi_0 | e^{\frac{i(\hat{H} + \hat{V})t}{\hbar}} e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} | \psi_0 \rangle|^2$

パラメータをうまく選ぶと $L(t) \sim e^{-\lambda t}$ 「Lyapunov減衰」

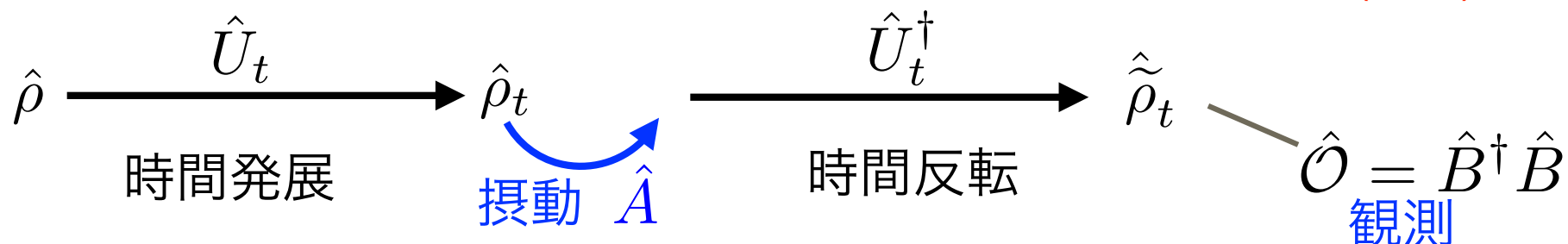
RA. Jalabert and HM. Pastawski, PRL (2001).



- 物理量に着目 $\text{Tr}[\hat{\rho}_t \hat{\mathcal{O}}] \propto \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{A}^\dagger(t) \hat{B}^\dagger \hat{B} \hat{A}(t)] := I_{AB}(t)$

例) $\hat{A} = e^{\frac{i\hat{p}\epsilon}{\hbar_{\text{eff}}}}, \hat{B} = \hat{p}$

S. Adachi, M. Toda, and K. Ikeda, PRL (1988).;
H. S. Yamada and K. S. Ikeda, PRE (2010).



量子カオスの特徴づけ II: 非可換性

❖ 異時刻の演算子の交換子の二乗

$$C(t) = - \langle |[\hat{A}(t), \hat{B}]|^2 \rangle = -\text{Tr}[\hat{\rho}[\hat{A}(t), \hat{B}]^\dagger [\hat{A}(t), \hat{B}]]$$

量子的な非可換性の増大の指標

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A} e^{-i\hat{H}t}$$

$$\hat{B} = \hat{B}(0)$$

❖ 半古典極限...カオスの指数増大！

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{p}$$

Larkin and Ovchinnikov (1969); Kitaev (2015)

短時間

$$C(t) \rightarrow \hbar^2 \int dx dp \rho_W(x, p) \left(\frac{\partial p_t}{\partial x} \right)^2$$

$$\sim \hbar^2 e^{2\lambda t}$$

カオス系の場合

$$\rho_W(x, p) = \int \frac{d\xi}{2\pi\hbar} \langle x - \xi/2 | \hat{\rho} | x + \xi/2 \rangle e^{\frac{ip\xi}{\hbar}} \quad : \text{Wigner関数}$$

非可換性に関する先行研究

❖ 指数増大の現れる量子多体系 Kitaev's talk at KITP (2015).

• Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) モデル @ 有限温度

$$H = \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq N} j_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l, \quad \langle j_{ijkl}^2 \rangle_{\text{disorder}} = \frac{J^2 3!}{N^3}$$

Majorana fermions

$\psi(t)$ と $\psi(0)$ の反交換子の二乗平均 $\sim e^{\lambda' t}$ $\lambda' > 0$
(フェルミオンのため) カオスを想起？

• 有限温度状態で $C(t) \sim e^{\lambda' t}$ の時、 $\lambda' \leq \frac{2\pi k_B T}{\hbar}$
Maldacena et al., JHEP (2016). “a bound on chaos”
conjecture

• SYKなど、いくつかの系でこのバウンドが達成される

モチベーション

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

❖ 量子カオスとして多くの指標が提案されている

- ・ 物理量の不可逆性
- ・ Loschmidt echo
- ・ 固有状態のエンタングルメントエントロピー
- ・ Ehrenfest時間での量子古典対応の破れ
- ・ 物理量の非可換性
- ・ 固有値の準位統計
- etc.

❖ これらの指標の関係性は重要な問題だが、 一般に非自明

❖ 不可逆性と非可換性の関係は？

不可逆性と非可換性の関係

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

- ❖ 我々のConjecture: 不可逆性と非可換性の等価性
 $\langle B \rangle = 0$ の時、局在した初期状態に対し

$$C_{AB}(t) \simeq I_{AB}(t) \quad \text{二つの指標は等価！}$$

不可逆性の指標： $I_{AB}(t) = \langle \hat{A}^\dagger(t) \hat{B}^\dagger \hat{B} \hat{A}(t) \rangle$

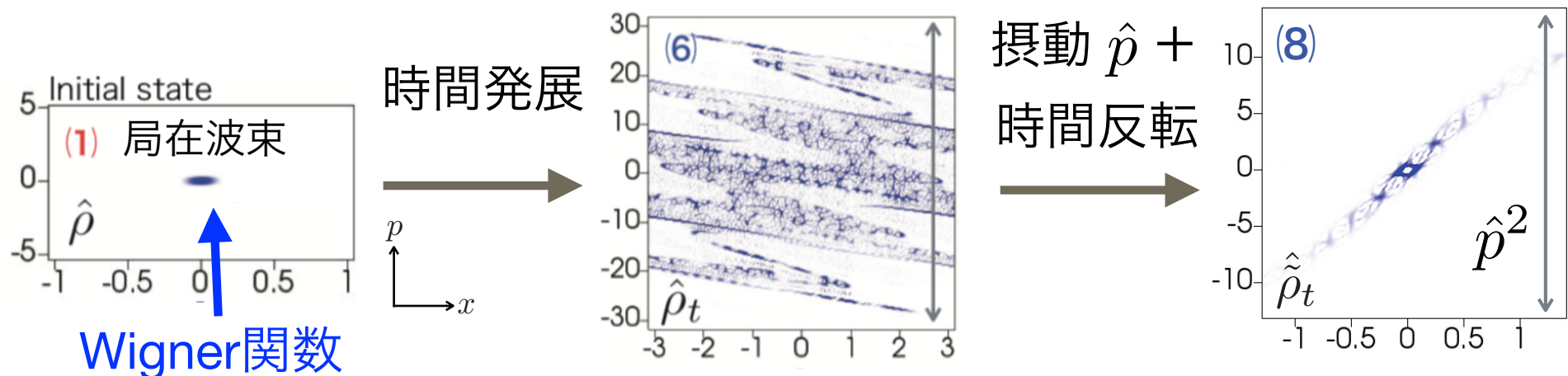
非可換性の指標： $C_{AB}(t) = -\langle |[\hat{A}(t), \hat{B}]|^2 \rangle$

- ❖ 上の予想を、量子kicked rotorモデル、
相互作用する量子多体系を用いて正当化

具体例：量子kicked rotor

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

- ハミルトニアン $\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos \hat{x} \sum_n \delta(t - n)$
- 局在した波束に対応するWigner関数は
時間反転テストに対し不可逆に広がる
→ $I_{pp}(t) = \langle \hat{p}(t) \hat{p} \hat{p} \hat{p}(t) \rangle$ の増加



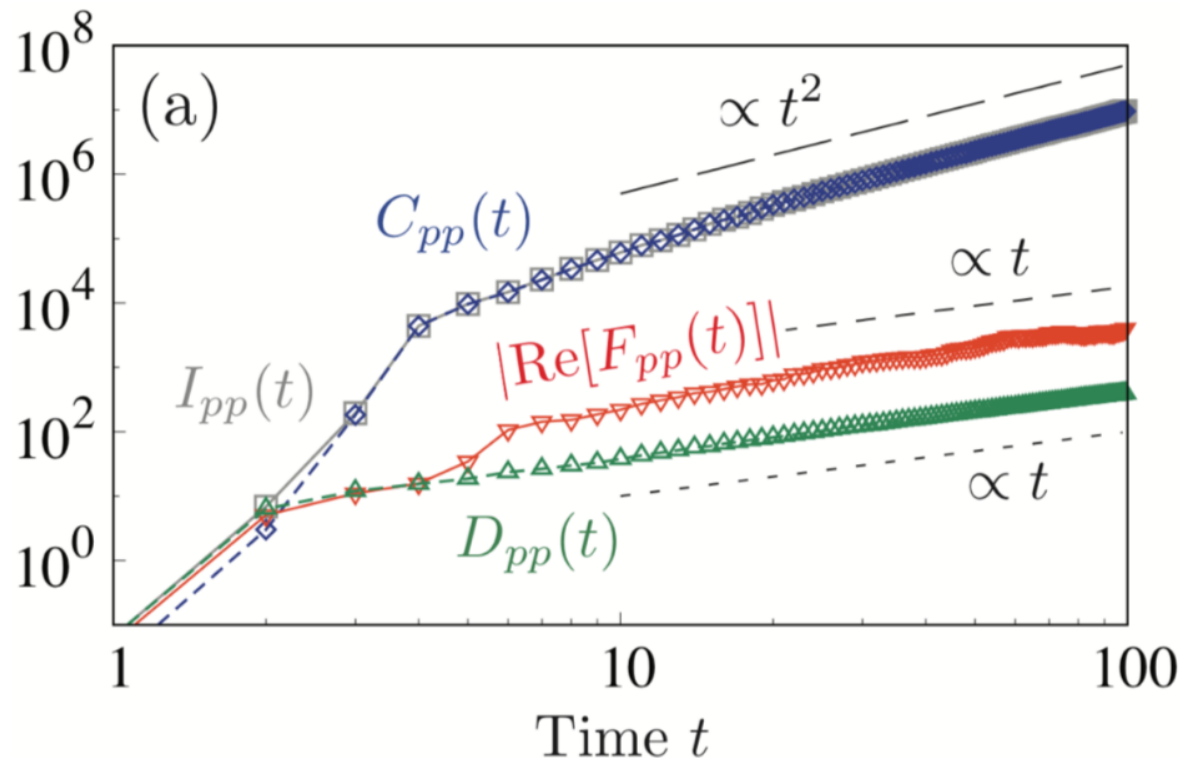
具体例：量子kicked rotor

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

❖我々の主張

$I_{pp}(t) = \langle \hat{p}(t) \hat{p} \hat{p} \hat{p}(t) \rangle$ の増加

→ $C_{pp}(t) = -\langle [\hat{p}(t), \hat{p}]^2 \rangle$ の増加と等価



主張を確認！

ただし

$$F_{pp}(t) = \langle \hat{p}(t) \hat{p} \hat{p}(t) \hat{p} \rangle$$

$$D_{pp}(t) = \langle \hat{p} \hat{p}(t) \hat{p}(t) \hat{p} \rangle$$

非可換性はなぜ増大するか？

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

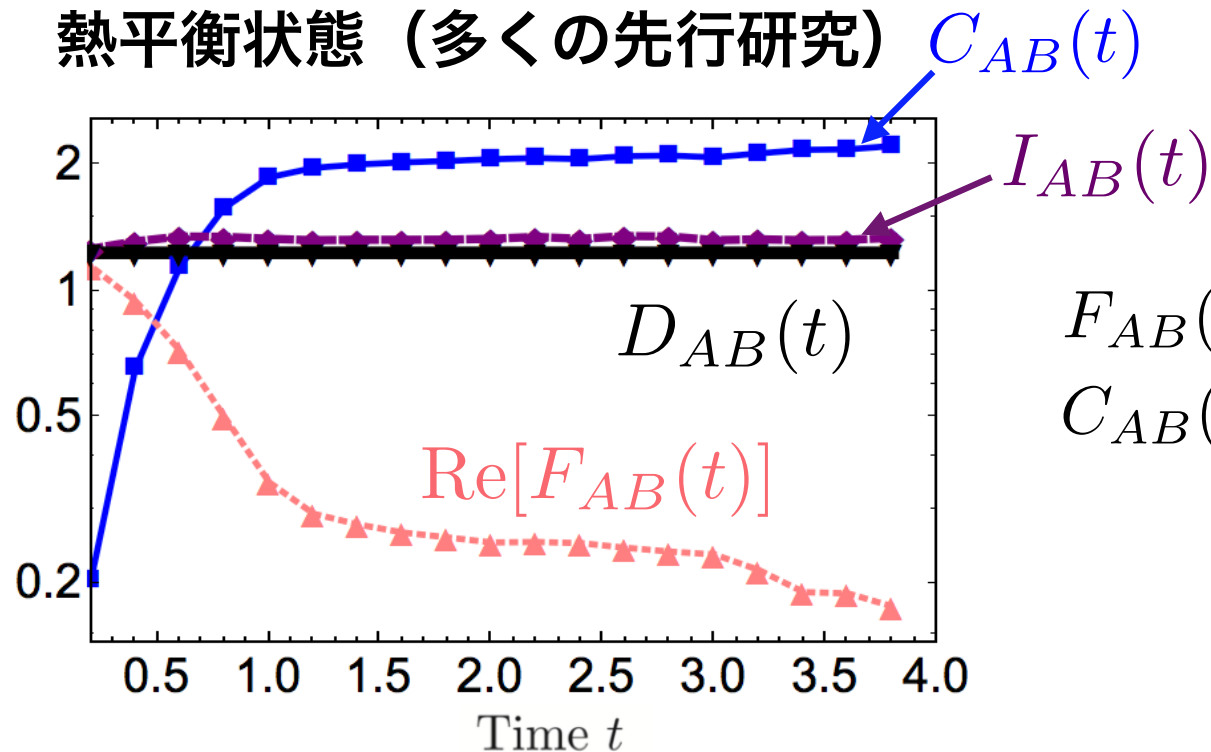
❖ 交換子の二乗を展開

$$F_{AB}(t) = \langle \hat{A}^\dagger(t) \hat{B}^\dagger \hat{A}(t) \hat{B} \rangle$$

$$D_{AB}(t) = \langle \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger(t) \hat{A}(t) \hat{B} \rangle$$

$$C_{AB}(t) = \cancel{I_{AB}(t)} + \cancel{D_{AB}(t)} - 2\text{Re}[F_{AB}(t)]$$

熱平衡状態（多くの先行研究）



$F_{AB}(t)$ の非自明な減衰が
 $C_{AB}(t)$ の増大に寄与する

非可換性はなぜ増大するか？

RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

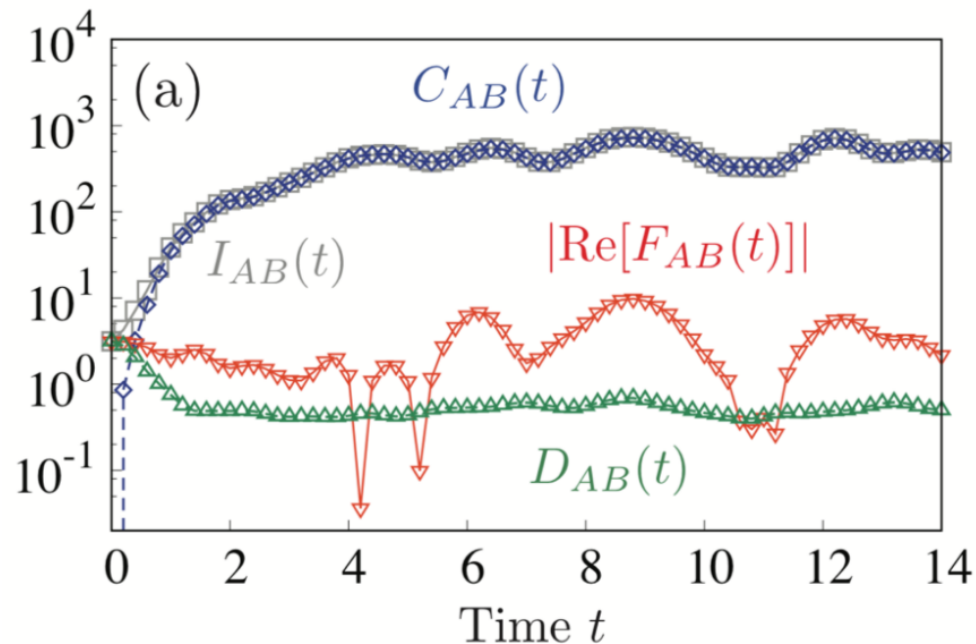
❖ 交換子の二乗を展開

$$F_{AB}(t) = \langle \hat{A}^\dagger(t) \hat{B}^\dagger \hat{A}(t) \hat{B} \rangle$$

$$D_{AB}(t) = \langle \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger(t) \hat{A}(t) \hat{B} \rangle$$

$$C_{AB}(t) = I_{AB}(t) + \cancel{D_{AB}(t)} - \cancel{2\text{Re}[F_{AB}(t)]}$$

局在した非平衡状態（本研究）



$I_{AB}(t)$ の非自明な増大が
 $C_{AB}(t)$ の増大に寄与する

まとめ

- ❖ 実験技術の発展により、孤立量子系のダイナミクス・熱平衡化の問題が注目を集めている
- ❖ ETHは熱平衡化の十分条件を与える
- ❖ ETHは多くの非可積分系で成り立つことが期待されるが、その証明はいまだ存在しない
(従来の典型性の議論でもうまくいかない)
- ❖ 非可換性など、量子カオスのダイナミクスが注目されている
(局在した初期状態に対しては、これは不可逆性と等価)

補足

(純粋) 状態による熱平衡状態の記述と典型性

- ❖ 状態はミクロカノニカル分布と一般に異なる

$$\hat{\rho} \neq \hat{\rho}_{\text{mic}}$$

- ❖ 物理量を限定すれば、 $\hat{\rho}$ も熱平衡状態を記述する

$$\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{O}] \simeq \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{mic}}\hat{O}]$$

$\hat{O}$: few-bodyの物理量

- ❖ 典型的な純粋状態は熱平衡状態

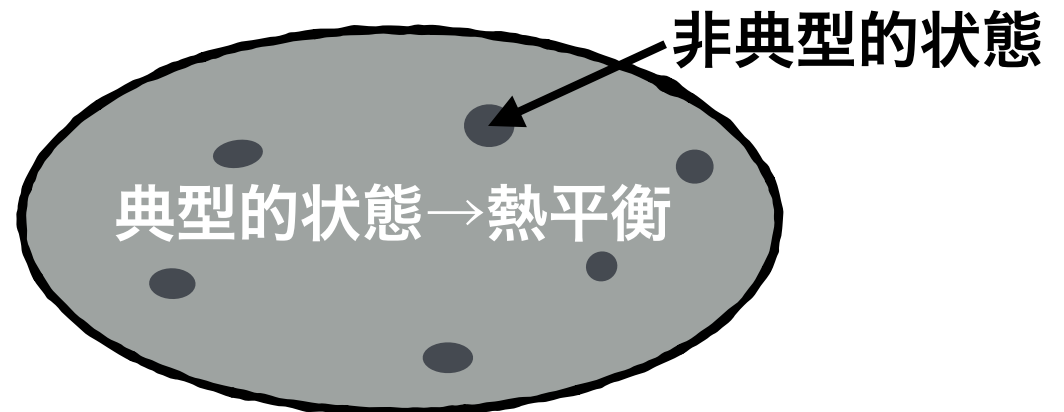
S. Popescu et al.,
Nat. Phys. (2018).; etc.

エネルギーシェル内のほぼ全ての状態 $|\psi\rangle$ に対し

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle \simeq \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{mic}}\hat{O}]$$

$$|\psi\rangle = \sum_{E_\alpha \in \text{energy shell}} \underline{z_\alpha} |E_\alpha\rangle$$

ランダム



緩和時間の問題

❖ 熱力学極限では必ず熱平衡化が見られるか？

❖ 非可積分なIsing模型（無限系） $g = -1.05, h = 0.5$

$$\hat{H} = - \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - g \sum_i \sigma_i^x - h \sum_i \sigma_i^z$$

M. C. Banuls et al.,
PRL (2011).

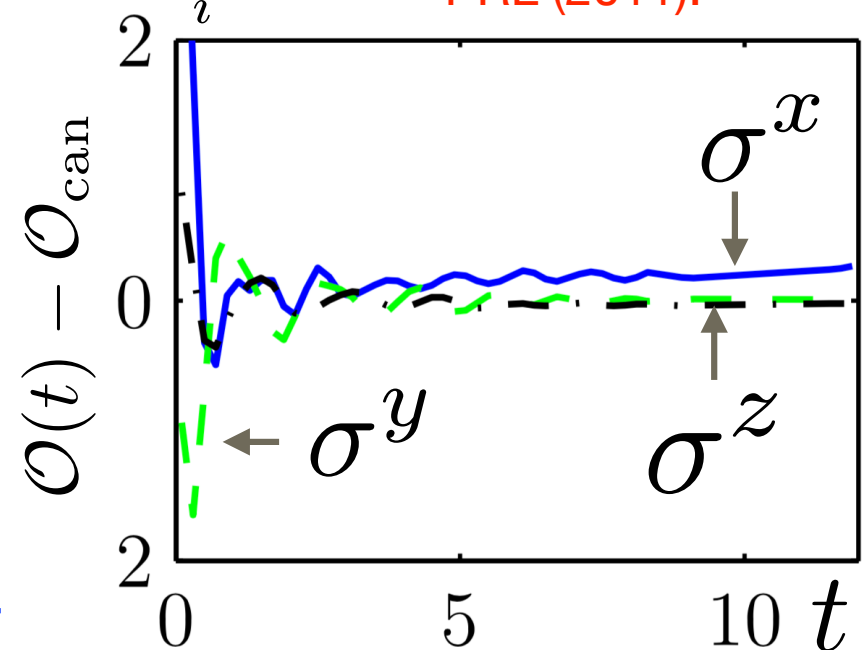
初期状態：全てのスピンの+x

物理量の量子期待値と

カノニカル分布の予言を比較

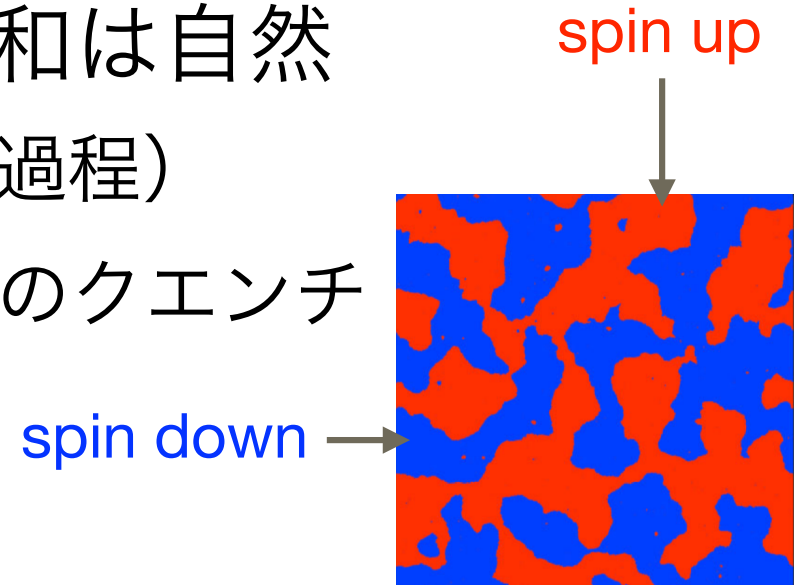
→ σ^x の熱平衡化は見られない

緩和時間に達していない可能性



緩和時間の問題

- ❖ (無限に待てば緩和するが) 長い緩和時間
 - ・ 系が可積分系に近い場合など... “Prethermalization”
M. Kollar, F. Alexander, and M. Eckstein, PRB (2011).
 - ・ 時間発展に非自明な拘束のある系... ガラスに近い状態
C. J. Turner et al., Nat. Phys. (2018).; N. Shiraishi and T. Mori, PRE (2017).
- ❖ 古典ダイナミクスでは遅い緩和は自然
 - ・ Coarsening dynamics (秩序化過程)
対称性の保たれた相 → 破れた相へのクエンチ
→ 多くのトポロジカル欠陥
→ 欠陥の緩和は一般に非常に遅い



緩和時間の問題

半古典レベルでは遅い緩和ダイナミクスは自然

例：超流動相にあるspinor Bose-Hubbard模型を
常磁性相から強磁性相へクエンチ

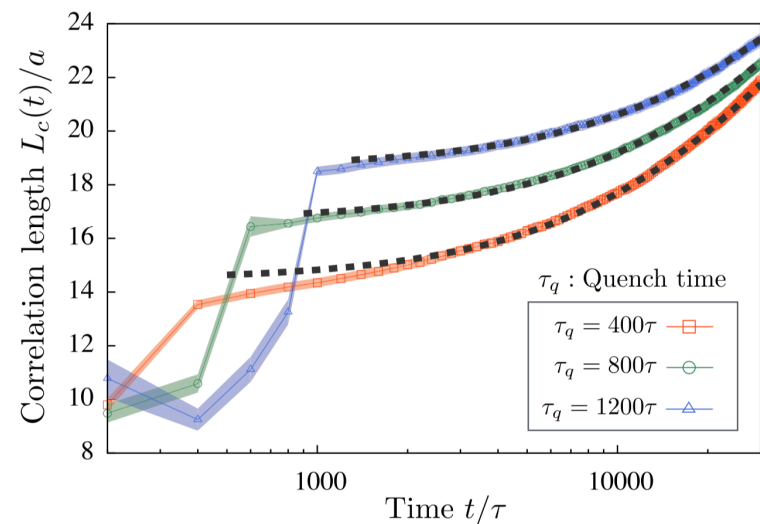
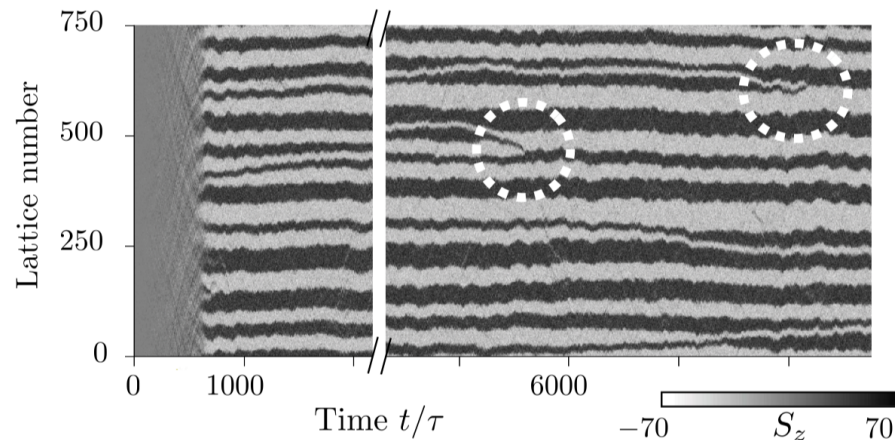
→ 磁化間のドメインの遅い秩序化過程 (coarsening)

(Experiment) J. Guzman et al., PRA (2011).

(2D, Gross-Pitaevskii) L. A. Williamson and P. B. Blakie, PRL (2016).

(1D, Truncated Wigner approximation) K. Fujimoto, RH and M. Ueda, PRL (2018).

(b) Distribution of the z -component of the spin vector



近可積分系での実験

T Kinoshita et al. Nature 440.7086 (2006): 900-903.

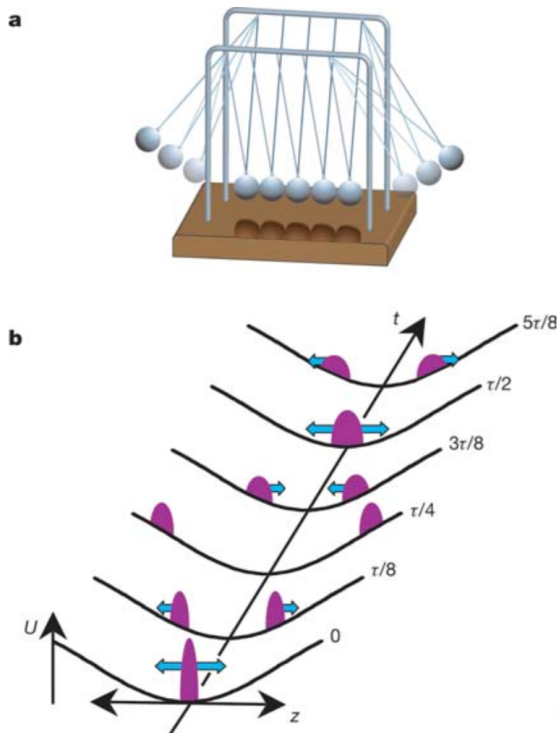
❖ 一次元ボーズ気体

$$\hat{H} = \hat{H}_{LL} + \hat{V}$$

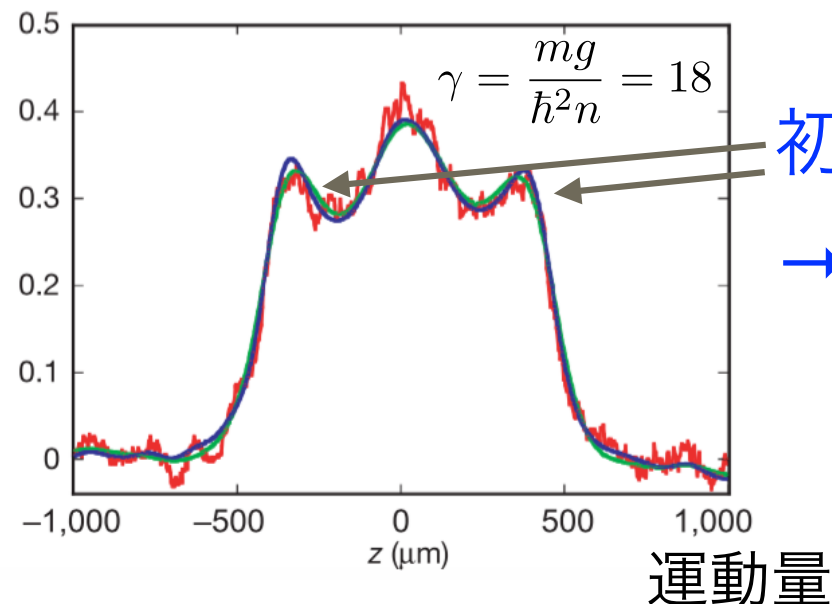
$$\hat{H}_{LL} = - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i>j} g \delta(x_i - x_j)$$

: Lieb-Liniger模型 (可積分)

$\hat{V}$: トラップポテンシャル



定常状態の運動量分布



初期状態の記憶
→ 非熱的分布

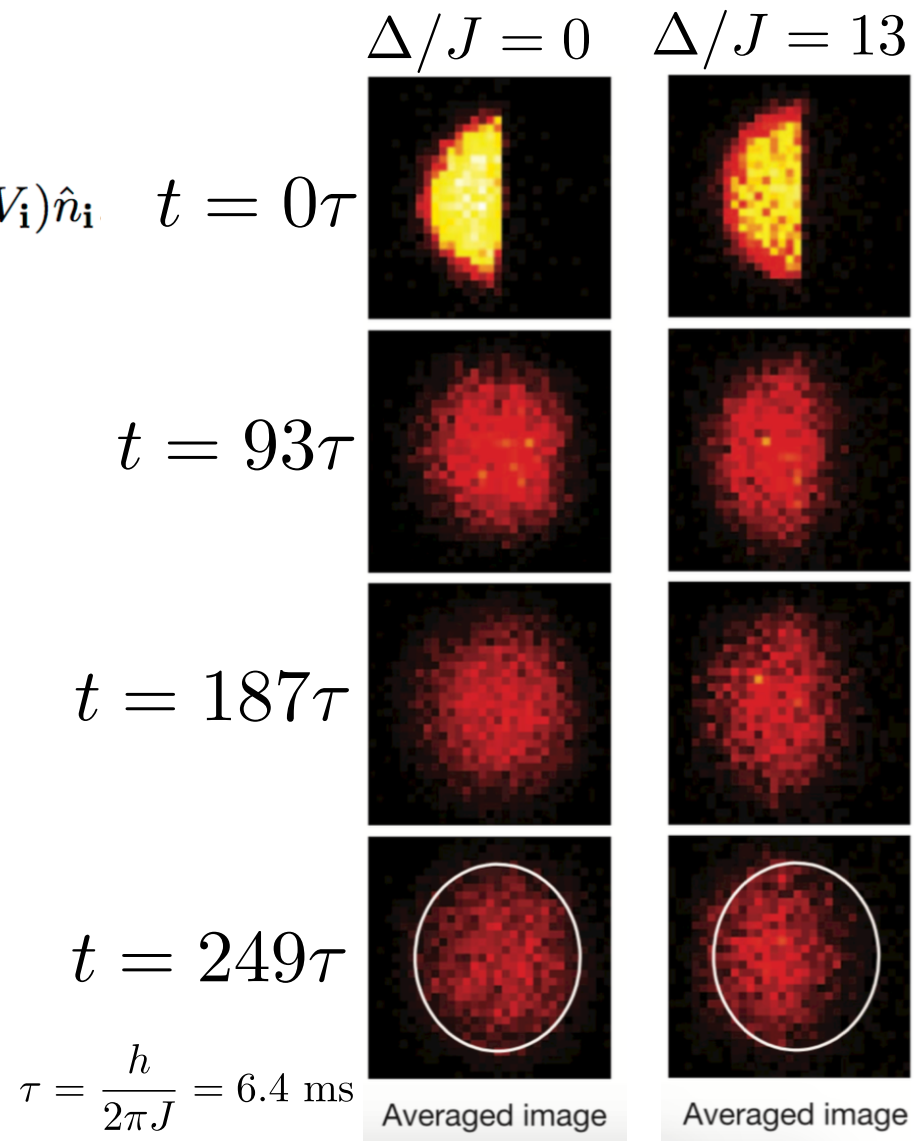
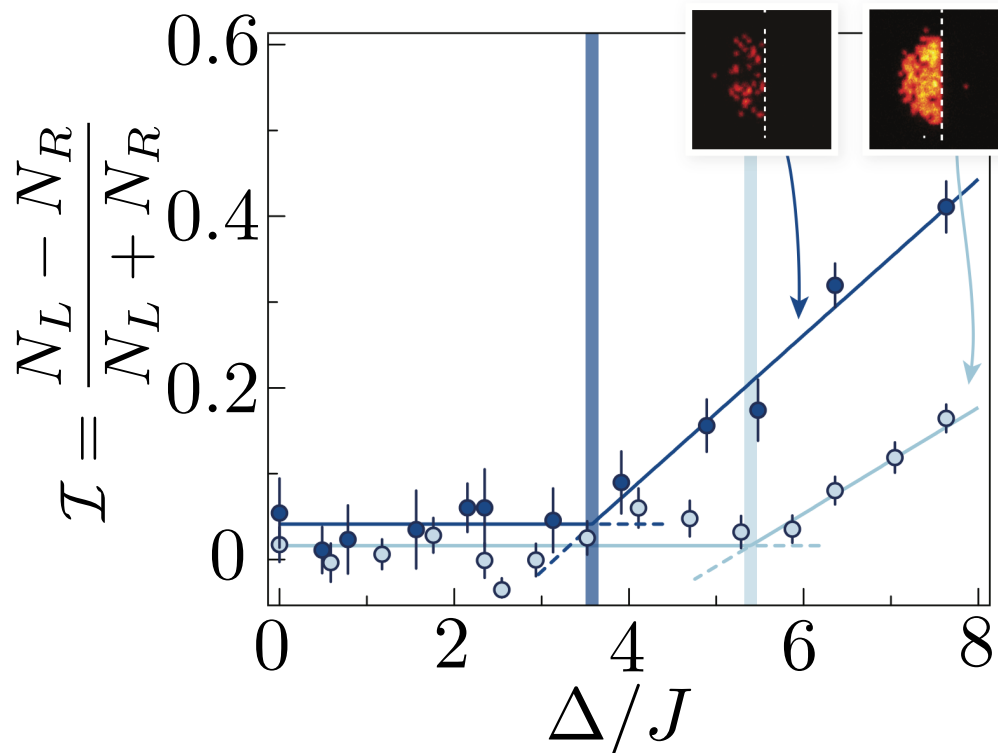
Many-body localizationの実験

J. Choi et al., Science 352.6293 (2016)

二次元Bose-Hubbard模型

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \frac{U}{2} \sum_i \hat{n}_i(\hat{n}_i - 1) + \sum_i (\delta_i + V_i) \hat{n}_i \quad t = 0\tau$$

MBL転移を観測



量子カオスの特徴づけの例

❖ 半古典極限

$$\hbar \rightarrow 0$$

“quantum chaology”

MV. Berry, Phys. Scr. (1989)

ダイナミクスによる特徴づけ

- ・ Wigner関数のダイナミクス W. H. Zurek, RMP (2003).

古典的運動方程式の成立限界 $t_E \sim \log \hbar^{-1}$ Ehrenfest
時間

統計性による特徴づけ

- ・ 固有値・固有状態の統計
カオス系 $\leftrightarrow$ ランダム行列

O. Bohigas, MJ. Giannoni, and C. Schmit (1984); MV. Berry (1977)

❖ 半古典極限から離れた量子多体系

非可積分性による特徴付けが有効と期待されている

非可換性に関する先行研究

- ❖ 量子多体系のいくつかの性質の特徴づけ
(ただし、カオスとの関係は不明)

- 情報伝播の特徴づけ

非可積分系における光円錐状の

情報の伝播 (Lieb-Robinson限界)を可視化

$$C_{AB}(t) = -\text{Tr}[[\hat{S}_i^z(t), \hat{S}_0^z(0)]^2]$$

- MBL相の特徴付け etc...

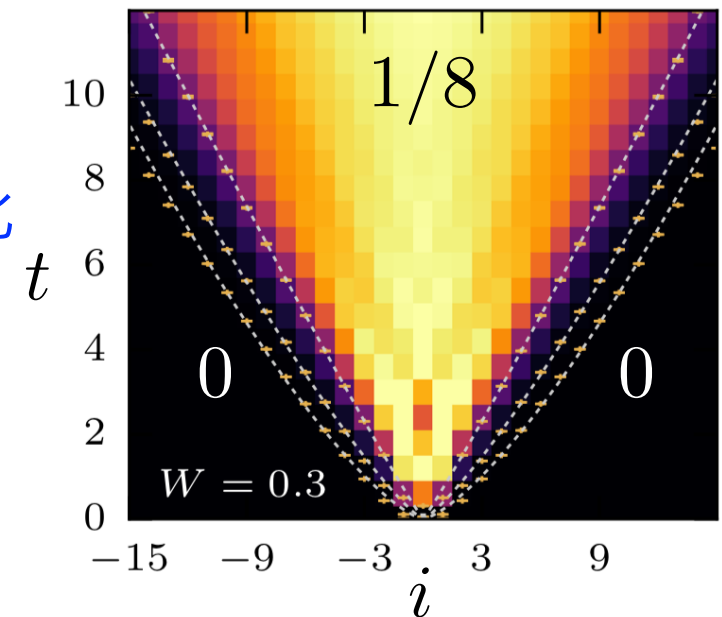
R. Fan et al., Science Bulletin (2016).

- ❖ 実験もなされている

- イオンやNMRでの測定、その他多くの理論提案

M. Gärttner et al., Nat. Phys. (2017).; J. Li et al., PRX (2017).; ...

D. J. Luitz and Y. B. Lev, PRB (2017).



Out-of-ordered time correlators (OTOC)

❖ 交換子の二乗を展開

→ 3種類の異時刻相関関数

$$C(t) = -2\text{Re}F(t) + \langle \hat{B}^\dagger \hat{A}(t)^\dagger \hat{A}(t) \hat{B} \rangle + \langle \hat{A}(t)^\dagger \hat{B}^\dagger \hat{B} \hat{A}(t) \rangle$$

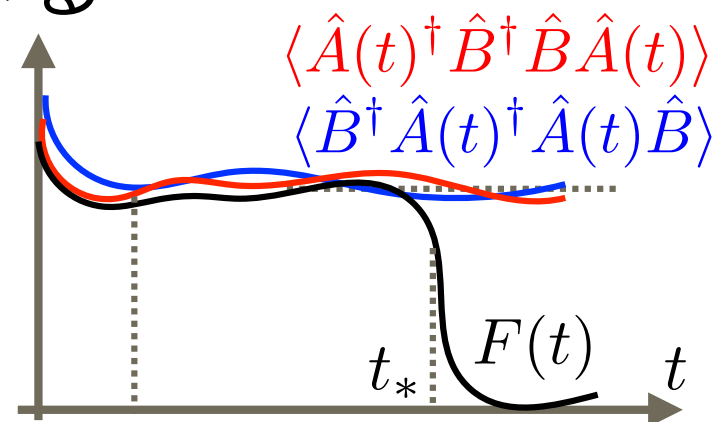
$$F(t) = \langle \hat{A}(t)^\dagger \hat{B}^\dagger \hat{A}(t) \hat{B} \rangle \quad \text{out-of-time-ordered correlator (OTOC)}$$

❖ $F(t)$ は $C(t)$ の非自明な振る舞いに寄与すると期待され、盛んに研究されている

例：有限温度

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z}$$

- $F(t)$ は $t \sim t_*$ で0に減衰
- 他の相関関数ははるかに早い時間 $t \ll t_*$ で一定値に



OTOCの例：高エネルギー物理

- Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) モデル @ 有限温度

$$H = \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq N} j_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l, \quad \langle j_{ijkl}^2 \rangle_{\text{disorder}} = \frac{J^2 3!}{N^3}$$

Majorana fermions

OTOCは $t \sim t_*$ で $\sim a + be^{\lambda' t}$ のように振る舞う

他の相関関数をはるかに早い時間

$t \ll t_*$ で一定値に

$$\lambda' > 0$$

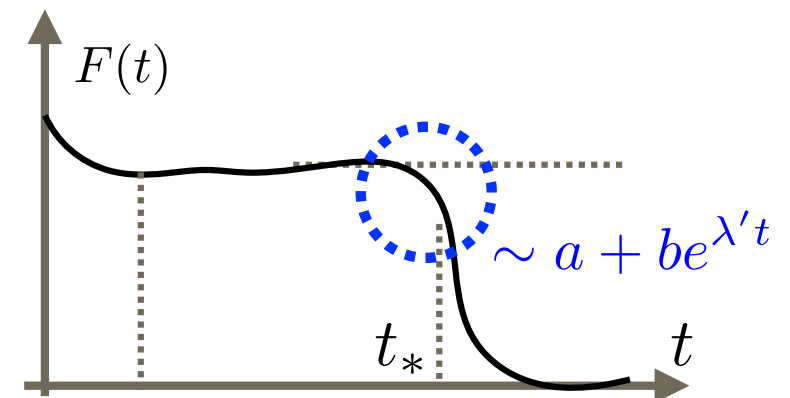
カオスを想起？

- 普遍的なバウンド $\lambda' \leq \frac{2\pi k_B T}{\hbar}$

Maldacena et al., JHEP (2016).

- Blackholeはこのバウンドを達成
- SYKもこのバウンドを達成 (holographic duality?)

“a bound on chaos”



OTOCの例: 物性物理

- ❖ スピン系、ボゾン系でも多くの研究

$$F(t) = \langle \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z(t) \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z(t) \rangle$$

$$\begin{aligned} & \langle \hat{\sigma}_j^z(t) \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z(t) \rangle \\ &= \langle \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z(t) \hat{\sigma}_j^z(t) \hat{\sigma}_i^z \rangle = 1 \end{aligned}$$

- ❖ 量子多体系のいくつかの性質の特徴づけ
(ただし、カオスとの関係は不明)

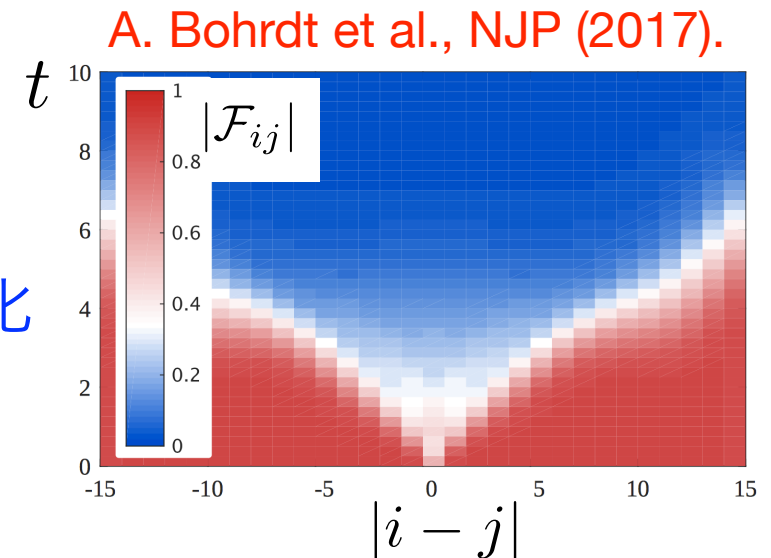
- 情報伝播の特徴づけ

非可積分系における光円錐状の

情報の伝播 (Lieb-Robinson限界)を可視化

$$\mathcal{F}_{ij} = \langle \hat{a}_j^\dagger(t) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j(t) \hat{a}_i \rangle$$

- MBL相の特徴付け etc...

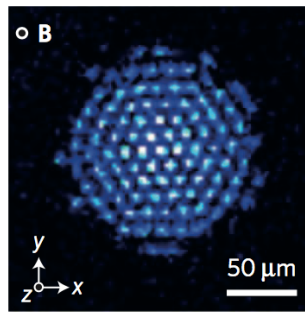


OTOCの例: 実験

- イオントラップ

M. Gärttner et al.,
Nat. Phys. (2017).

$$\hat{H}_{zz} = \frac{J}{N} \sum_{i < j} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z$$



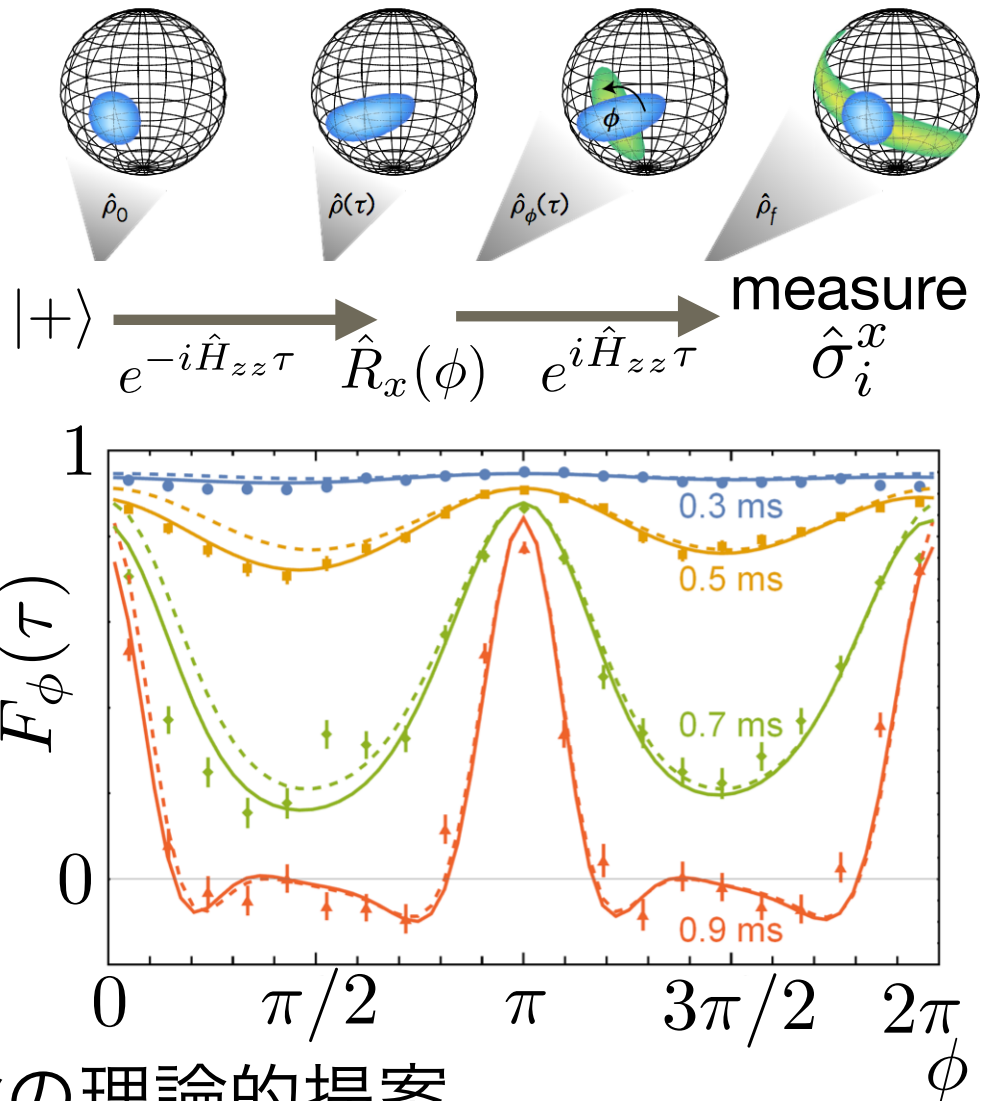
$$\hat{W}_\phi(\tau) = e^{i\hat{H}_{zz}\tau} \hat{R}_x(\phi) e^{-i\hat{H}_{zz}\tau}$$

ϕ だけ回転

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \langle \hat{S}_x \rangle &= F_\phi(\tau) = \langle \hat{W}_\phi^\dagger(\tau) \hat{\sigma}_i^x \hat{W}_\phi(\tau) \rangle_0 \\ &= \langle \hat{W}_\phi^\dagger(\tau) \hat{\sigma}_i^x \hat{W}_\phi(\tau) \hat{\sigma}_i^x \rangle_0 \end{aligned}$$

- NMR J. Li et al., PRX (2017).

- 冷却原子などを用いた実験の理論的提案



非時間順序相関関数(OTOC)への示唆

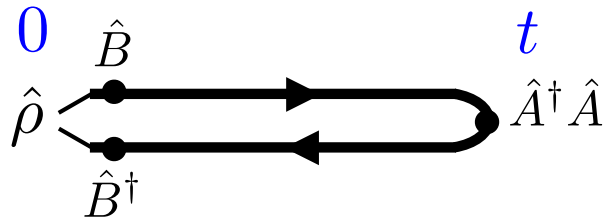
RH, K. Fujimoto and M. Ueda. arXiv:1807.02360

❖ 交換子の二乗を展開

$$C_{AB}(t) = I_{AB}(t) + D_{AB}(t) - 2\text{Re}[F_{AB}(t)]$$

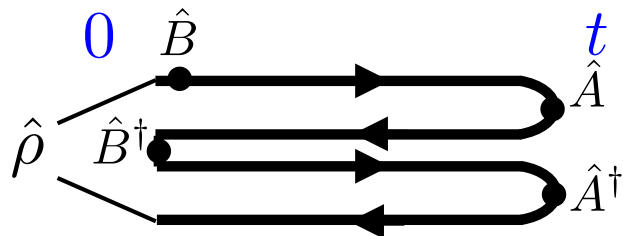
$$D_{AB}(t) = \langle \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger(t) \hat{A}(t) \hat{B} \rangle$$

→ 時間相関



$$F_{AB}(t) = \langle \hat{A}^\dagger(t) \hat{B}^\dagger \hat{A}(t) \hat{B} \rangle$$

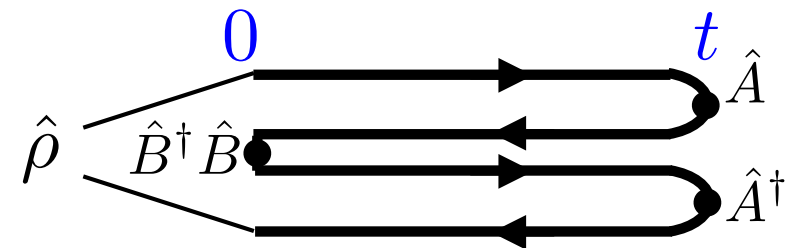
→ OTOC → 4-OTOC



$$I_{AB}(t) = \langle \hat{A}(t)^\dagger \hat{B}^\dagger \hat{B} \hat{A}(t) \rangle$$

→ $[\hat{\rho}, \hat{H}] \neq 0$ ならば OTOC

→ 3-OTOC



$[\hat{\rho}, \hat{H}] \neq 0$ ✗

$[\hat{\rho}, \hat{H}] = 0$ ↷

