

時空に依存した散乱長の下での 流体力学

K. Fujii & Y. Nishida, arXiv:1807.07983 (2018).

Keisuke Fujii (Tokyo Tech, RIKEN iTHEMS)

Collaborator: Yusuke Nishida (Tokyo Tech)

熱場の量子論とその応用

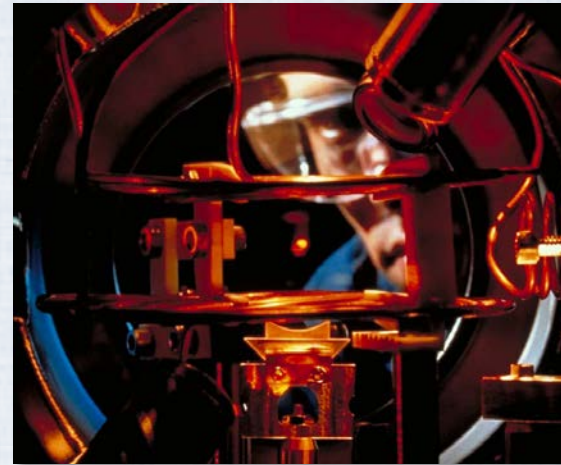
30 August 2018



RIKEN's
Programs for
Junior Scientists

1. 冷却原子系
2. 散乱長を伴う流体力学
3. 結果の解釈とその応用

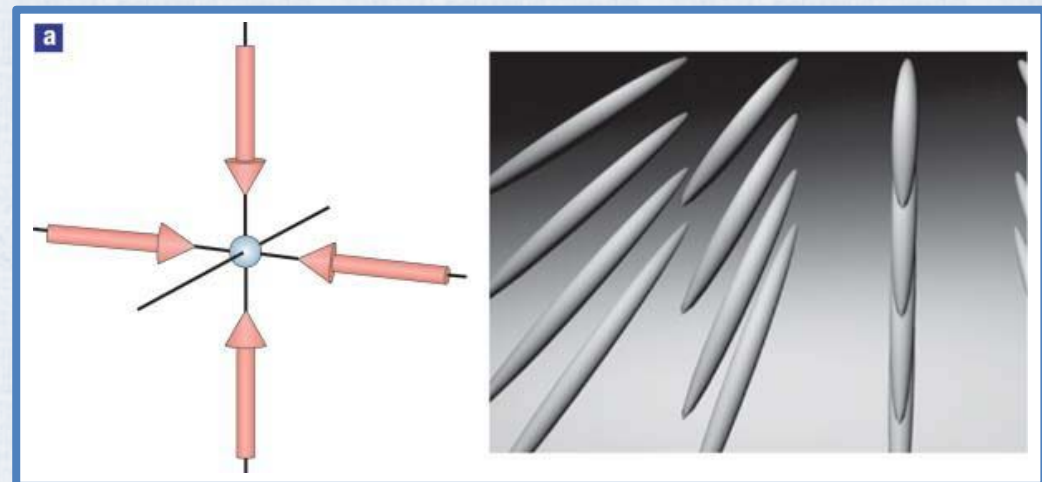
レーザー冷却等を用いて、
マイクロケルビン程度まで
冷やされた原子気体



<https://physics.aps.org/story/v21/st11>

冷却原子系では、系の様々なパラメータを制御できる

- ・ 空間次元
- ・ 粒子の統計性とスピン数
- ・ 相互作用の強さ



I. Bloch, Nat. Phys. 1, 23-30 (2005)

相互作用と散乱長

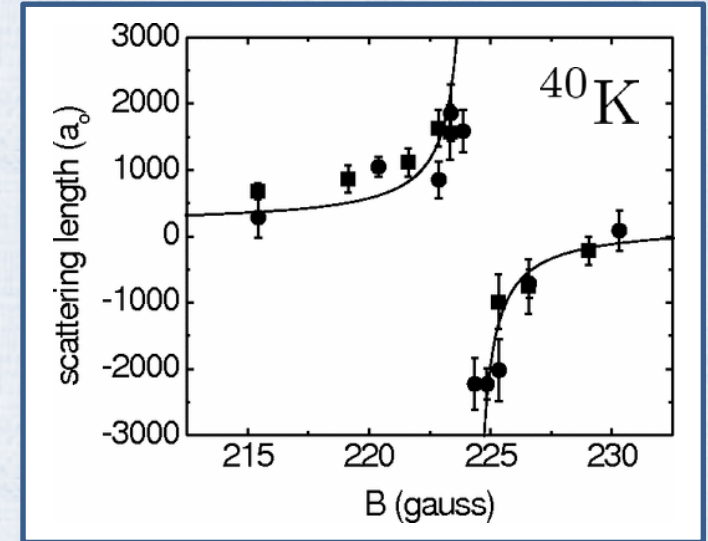
4/24

相互作用ポテンシャル： $V(r)$

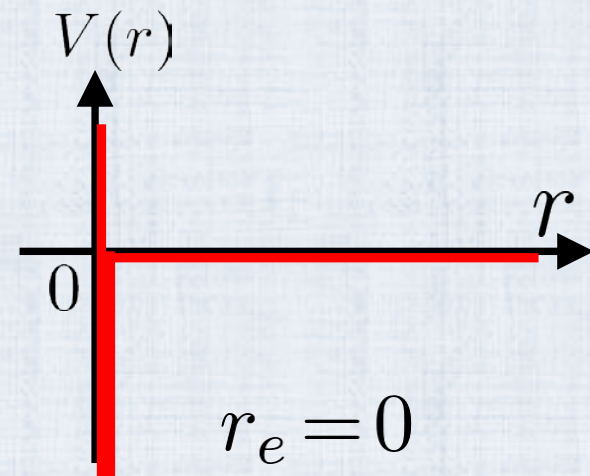
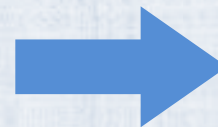
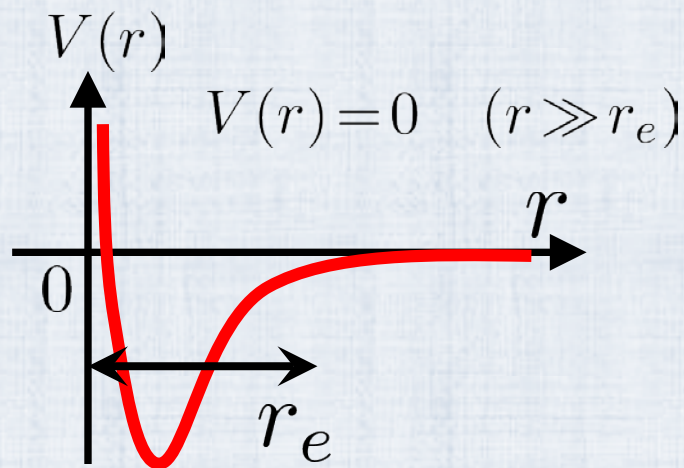
→ 散乱長： a ~~到達距離： r_e~~

フェッシュバッハ共鳴により調節可能

到達距離 $\ll$ { 平均粒子間距離
熱ドブroy波長
散乱長



C.A. Regal & D.S. Jin PRL90 (2003)

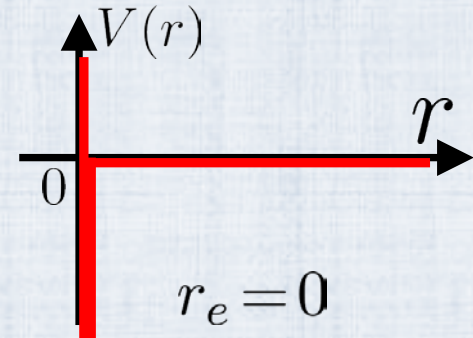


相互作用ポテンシャル: $V(r)$



散乱長: a

~~到達距離: r_e~~



✓ ハミルトニアン: 接触型相互作用 $(x) = (t, \vec{x})$

$$\hat{H}(t) = \int d^d \vec{x} \sum_{\sigma} \left[\frac{\partial_i \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \partial_i \hat{\psi}_{\sigma}(x)}{2m} + \frac{\lambda}{2m} \sum_{\tau} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\tau}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\tau}(x) \hat{\psi}_{\sigma}(x) \right]$$

✓ **コンタクト** ... 短距離相関を特徴付ける量

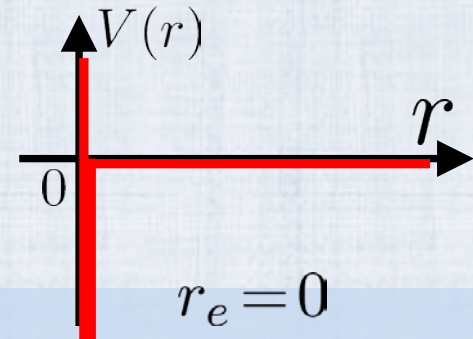
$$C_{\text{eq}} \equiv \int d^d \vec{x} C_{\text{eq}}(\vec{x}) \quad C_{\text{eq}}(\vec{x}) \equiv \left\langle \frac{\lambda^2}{2} \sum_{\sigma, \tau} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\tau}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\tau}(x) \hat{\psi}_{\sigma}(x) \right\rangle_{\text{eq}}$$

相互作用ポテンシャル: $V(r)$



散乱長: a

~~到達距離: r_e~~



コンタクト ... 短距離相関を特徴付ける量

$$C_{\text{eq}} \equiv \int d^d \vec{x} \, C_{\text{eq}}(\vec{x}) \quad C_{\text{eq}}(\vec{x}) \equiv \left\langle \frac{\lambda^2}{2} \sum_{\sigma, \tau} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\tau}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\tau}(x) \hat{\psi}_{\sigma}(x) \right\rangle_{\text{eq}}$$

▶ 短距離と長距離の物理を結びつける普遍的関係式

例: 3次元2成分フェルミ系

S. Tan, Ann. Phys. 323, 2952 (2008); 323, 2971 (2008); 323, 2987 (2008),
E. Braaten, et al., PRL 100, 205301 (2008).

運動量分布 $n_{\sigma}(\vec{k}) = \frac{C_{\text{eq}}}{k^4} + \mathcal{O}(k^{-5}) \quad (k \rightarrow \infty)$

断熱関係式 $dE = TdS - pdV + \mu dN - \frac{C_{\text{eq}}}{4\pi m} d\left(\frac{1}{a}\right)$

圧力関係式 $PV = \frac{2}{3}E + \frac{C_{\text{eq}}}{12\pi m a}$

1. 冷却原子系
2. 散乱長を伴う流体力学
3. 結果の解釈とその応用

時空間に依存した散乱長

8/24

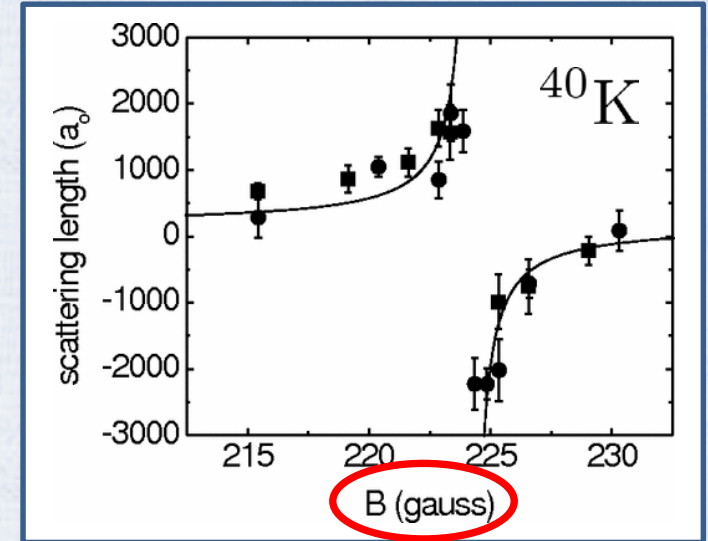
相互作用ポテンシャル： $V(r)$

→ 散乱長： a ~~到達距離： r_e~~

フェッシュバッハ共鳴により調節可能

磁場を時間的・空間的に変動させる

↓
時空間に依存した散乱長



C.A. Regal & D.S. Jin PRL90 (2003)

時空間に依存した散乱長の影響は、理論にどのように現れるか？？

✓ 時空間に依存した散乱長を含む流体力学を構築する

✓ハミルトニアン (d 次元 N 成分 ボソン or フェルミオン)

$$\hat{H}(t) = \int d^d \vec{x} \sum_{\sigma} \left[\frac{D_i \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) D_i \hat{\psi}_{\sigma}(x)}{2m} - A_t(x) \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\sigma}(x) \right] + \hat{H}_{\text{int}}(x)$$

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \int d^d \vec{x} \frac{\lambda(x)}{2m} \sum_{\sigma, \tau} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\tau}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\tau}(x) \hat{\psi}_{\sigma}(x)$$

$$(x) = (t, \vec{x})$$

$$D_i \hat{\psi}_{\sigma}(x) = [\partial_i - iA_i(x)] \hat{\psi}_{\sigma}(x)$$

▶ 相互作用と散乱長 (次元正則化)

$$\lambda(x) = (d-2) \Omega_{d-1} a(x)^{d-2}$$

$$\Omega_{d-1} \equiv \frac{(4\pi)^{d/2}}{2\Gamma(2-d/2)}$$

▶ ハイゼンベルグ方程式

$$i\partial_t \hat{\psi}_{\sigma}(x) = \left[-\frac{\Delta}{2m} - A_t(x) + \frac{\lambda(x)}{m} \hat{\psi}_{\tau}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\tau}(x) \right] \hat{\psi}_{\sigma}(x)$$

$$\Delta \equiv D_i D_i$$

$$[\hat{\psi}_{\sigma}(t, \vec{x}), \hat{\psi}_{\tau}^{\dagger}(t, \vec{y})]_{\pm} = \delta_{\sigma\tau} \delta^d(\vec{x} - \vec{y})$$

- ▶ 質量の連続の方程式

$$\partial_t \hat{\mathcal{M}}_\sigma(x) + \partial_i \hat{\mathcal{P}}_{\sigma i}(x) = 0$$

- ▶ 運動量の連続の方程式

$$\partial_t \hat{\mathcal{P}}_i(x) + \partial_j \hat{\Pi}_{ij}(x) = F_{it}(x) \frac{\hat{\mathcal{M}}(x)}{m} + F_{ij}(x) \frac{\hat{\mathcal{P}}_j(x)}{m} - \frac{\partial_i \mathbf{a}(x)}{\Omega_{d-1} \mathbf{a}(x)^{d-1}} \frac{\hat{\mathcal{C}}(x)}{m}$$

- ▶ エネルギーの連続の方程式

$$\partial_t \hat{\mathcal{H}}(x) + \partial_i \hat{\mathcal{Q}}_i(x) = F_{it}(x) \frac{\hat{\mathcal{P}}_i(x)}{m} + \frac{\partial_t \mathbf{a}(x)}{\Omega_{d-1} \mathbf{a}(x)^{d-1}} \frac{\hat{\mathcal{C}}(x)}{m}$$

- ▶ 応力テンソルのトレース

$$\delta_{ij} \hat{\Pi}_{ij}(x) = 2\hat{\mathcal{H}}(x) + \frac{\hat{\mathcal{C}}(x)}{m \Omega_{d-1} \mathbf{a}(x)^{d-2}} - d \frac{\Delta \hat{\mathcal{M}}(x)}{4m^2}$$

✓ **コンタクト密度演算子** $\hat{\mathcal{C}}(x) \equiv \frac{\lambda^2(x)}{2} \sum_{\sigma, \tau} \hat{\psi}_\sigma^\dagger(x) \hat{\psi}_\tau^\dagger(x) \hat{\psi}_\tau(x) \hat{\psi}_\sigma(x)$

密度演算子をかけてトレースをとる： $\mathcal{O}(x) \equiv \text{Tr}[\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{\rho}]$

→ 期待値に対しても，演算子の恒等式と同じ形の式が成立

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{M}_\sigma(x) + \partial_i \mathcal{P}_{\sigma i}(x) = 0 \\ \partial_t \mathcal{P}_i(x) + \partial_j \Pi_{ij}(x) = F_{it}(x) \frac{\mathcal{M}(x)}{m} + F_{ij}(x) \frac{\mathcal{P}_j(x)}{m} - \frac{\partial_i a(x)}{\Omega_{d-1} a(x)^{d-1}} \frac{\mathcal{C}(x)}{m} \\ \partial_t \mathcal{H}(x) + \partial_i \mathcal{Q}_i(x) = F_{it}(x) \frac{\mathcal{P}_i(x)}{m} + \frac{\partial_t a(x)}{\Omega_{d-1} a(x)^{d-1}} \frac{\mathcal{C}(x)}{m} \\ \delta_{ij} \Pi_{ij}(x) = 2\mathcal{H}(x) + \frac{\mathcal{C}(x)}{m \Omega_{d-1} a(x)^{d-2}} - d \frac{\Delta \mathcal{M}(x)}{4m^2} \end{cases}$$

各期待値を，流体を記述する変数で表した構成方程式を求める

$$\begin{cases} \text{速度場：} v_i(x) \\ \text{熱力学量：} \mathcal{M}_\sigma(x), \mathcal{E}(x), p(x), \dots \end{cases}$$

密度演算子をかけてトレースをとる： $\mathcal{O}(x) \equiv \text{Tr}[\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{\rho}]$

➡ 期待値に対しても，演算子の恒等式と同じ形の式が成立

各期待値を，流体を記述する変数で表した**構成方程式**を求める

↑
速度場： $v_i(x)$
熱力学量： $\mathcal{M}_\sigma(x), \mathcal{E}(x), p(x), \dots$

質量密度： $\mathcal{M}_\sigma(x)$

運動量密度： $\mathcal{P}_{\sigma i}(x) = \mathcal{M}_\sigma(x)v_i(x)$

エネルギー密度： $\mathcal{H}(x) = \mathcal{E}(x) + \frac{\mathcal{M}(x)}{2}[v_i(x)]^2$

応力テンソル： $\Pi_{ij}(x) = p(x)\delta_{ij} + \mathcal{M}(x)v_i(x)v_j(x) + \pi_{ij}(x)$

エネルギー流： $\mathcal{Q}_i(x) = [\mathcal{H}(x) + p(x)]v_i(x) + \pi_{ij}(x)v_j(x) + q_i(x)$

コンタクト密度： $\mathcal{C}(x) = \dots$

コンタクトの構成方程式

13/24

密度演算子をかけてトレースをとる： $\mathcal{O}(x) \equiv \text{Tr}[\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{\rho}]$

➡ 期待値に対しても，演算子の恒等式と同じ形の式が成立

各期待値を，流体を記述する変数で表した**構成方程式**を求める

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{速度場：} v_i(x) \\ \text{熱力学量：} \mathcal{M}_\sigma(x), \mathcal{E}(x), p(x), \dots \end{array} \right.$$

$$\text{コンタクト密度：} \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}_{\text{eq}}(x) + m\Omega_{d-1} \mathbf{a}(x)^{d-2} \underline{\pi_{ii}(x)} + O(\partial^2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \delta_{ij} \Pi_{ij}(x) = 2\mathcal{H}(x) + \frac{\mathcal{C}(x)}{m\Omega_{d-1} \mathbf{a}(x)^{d-2}} - d \frac{\Delta \mathcal{M}(x)}{4m^2} \\ \Pi_{ij}(x) = p(x)\delta_{ij} + \mathcal{M}(x)v_i(x)v_j(x) + \pi_{ij}(x) \\ \mathcal{H}(x) = \mathcal{E}(x) + \frac{\mathcal{M}(x)}{2} [v_i(x)]^2 \\ \frac{\mathcal{C}_{\text{eq}}(x)}{m\Omega_{d-1} \mathbf{a}(x)^{d-2}} \equiv d \cdot p(x) - 2\mathcal{E}(x) \end{array} \right.$$

▶ 熱力学の関係式

$$\begin{cases} \mathcal{E}(x) + p(x) = T(x)\mathcal{S}(x) + \sum_{\sigma} \mu_{\sigma}(x)\mathcal{M}_{\sigma}(x) \\ d\mathcal{E}(x) = T(x)d\mathcal{S}(x) + \sum_{\sigma} \mu_{\sigma}(x)d\mathcal{M}_{\sigma}(x) + \frac{\mathcal{C}_{\text{eq}}(x)}{m\Omega_{d-1}a(x)^{d-1}}da(x) \end{cases}$$

✓ エントロピー生成の式

$$\partial_t \mathcal{S}(x) + \partial_i \left[\mathcal{S}(x)v_i(x) + \frac{q_i(x)}{T(x)} \right] = \frac{\Phi(x)}{T(x)}$$

▶ 散逸関数： $\Phi(x)$

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & -q_i(x) \frac{\partial_i T(x)}{T(x)} - \pi_{ij}(x) \partial_i v_j(x) \\ & + \pi_{ii}(x) [\partial_t \ln a(x) + v_j(x) \partial_j \ln a(x)] + O(\partial^2) \end{aligned}$$

熱力学第二法則より, $\Phi(x) \geq 0$ が課される

▶ 散逸関数： $\Phi(x)$... 熱力学第二法則より, $\Phi(x) \geq 0$ が課される

$$\Phi(x) = - \underline{q_i(x)} \frac{\partial_i T(x)}{T(x)} - \underline{\pi_{ij}(x)} \partial_i v_j(x) \\ + \underline{\pi_{ii}(x)} [\partial_t \ln \mathbf{a(x)} + v_j(x) \partial_j \ln \mathbf{a(x)}] + O(\partial^2)$$

$$\text{散逸補正 : } \left\{ \begin{array}{l} q_i(x) = -\kappa(x) \partial_i T(x) + O(\partial^2) \\ \pi_{\langle ij \rangle}(x) = -\eta(x) V_{ij}(x) + O(\partial^2) \\ \pi_{ii}(x) = -d \cdot \zeta(x) \mathbf{V_a(x)} + O(\partial^2) \end{array} \right.$$

$$\text{散逸係数 : } \kappa(x), \eta(x), \zeta(x) \geq 0 \quad \pi_{\langle ij \rangle}(x) \equiv \pi_{ij}(x) - \frac{\delta_{ij}}{d} \pi_{kk}(x)$$

$$\left[\begin{array}{l} V_{ij}(x) \equiv \partial_i v_j(x) + \partial_j v_i(x) - \delta_{ij} \frac{2}{d} \partial_k v_k(x) \\ V_a(x) \equiv \partial_k v_k(x) - \underline{d \cdot [\partial_t \ln \mathbf{a(x)} + v_j(x) \partial_j \ln \mathbf{a(x)}]} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \kappa(x) \frac{[\partial_i T(x)]^2}{T(x)} + \frac{\eta(x)}{2} [V_{ij}(x)]^2 + \zeta(x) [\mathbf{V_a(x)}]^2 + O(\partial^2)$$

流体力学 = 連続の式 + 構成方程式

▶ 質量の連続の方程式

$$\partial_t \mathcal{M}_\sigma(x) + \partial_i \mathcal{P}_{\sigma i}(x) = 0$$

▶ 運動量の連続の方程式

$$\partial_t \mathcal{P}_i(x) + \partial_j \Pi_{ij}(x) = F_{it}(x) \frac{\mathcal{M}(x)}{m} + F_{ij}(x) \frac{\mathcal{P}_j(x)}{m} - \frac{\partial_i \mathbf{a}(x)}{\Omega_{d-1} \mathbf{a}(x)^{d-1}} \frac{\mathcal{C}(x)}{m}$$

▶ エネルギーの連続の方程式

$$\partial_t \mathcal{H}(x) + \partial_i \mathcal{Q}_i(x) = F_{it}(x) \frac{\mathcal{P}_i(x)}{m} + \frac{\partial_t \mathbf{a}(x)}{\Omega_{d-1} \mathbf{a}(x)^{d-1}} \frac{\mathcal{C}(x)}{m}$$

流体力学 = 連続の式 + 構成方程式

▶ 体積粘性項

$$\pi_{ij}(x) = -\eta(x)V_{ij}(x) - \zeta(x)\delta_{ij}V_a(x)$$

$$V_a(x) \equiv \partial_k v_k(x) - d \cdot [\partial_t \ln a(x) + v_j(x)\partial_j \ln a(x)]$$

▶ コンタクト

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}_{\text{eq}}(x) + m\Omega_{d-1}a(x)^{d-2}\pi_{ii}(x)$$

1. 冷却原子系

2. 散乱長を伴う流体力学

3. 結果の解釈とその応用

▶ 体積粘性項

$$\pi_{ij}(x) = -\eta(x)V_{ij}(x) - \zeta(x)\delta_{ij}V_a(x)$$

$$V_a(x) \equiv \partial_k v_k(x) - d \cdot [\partial_t \ln a(x) + v_j(x)\partial_j \ln a(x)]$$

▶ コンタクトの構成方程式

$$C(x) = C_{\text{eq}}(x) + m\Omega_{d-1}a(x)^{d-2}\pi_{ii}(x)$$

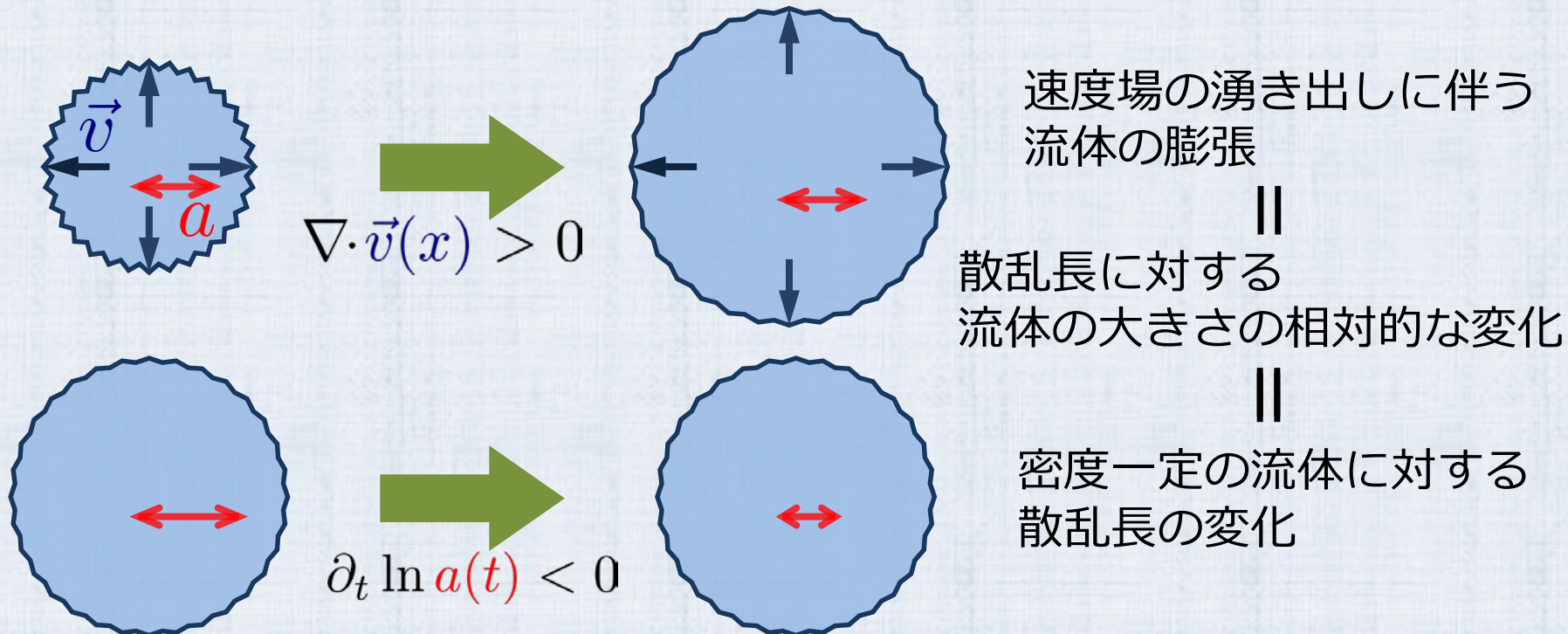
流体の膨張収縮と散乱長の伸縮

19/24

- ▶ 体積粘性項に散乱長依存性が加わる

$$\pi_{ij}(x) = -\eta(x)V_{ij}(x) - \zeta(x)\delta_{ij}V_a(x)$$

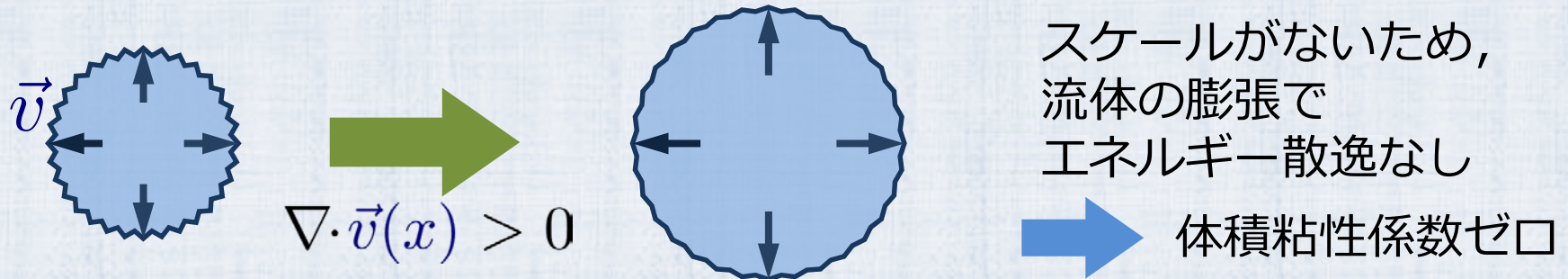
$$\left[\begin{array}{l} V_{ij}(x) \equiv \partial_i v_j(x) + \partial_j v_i(x) - \delta_{ij} \frac{2}{d} \partial_k v_k(x) \\ V_a(x) \equiv \partial_k v_k(x) - d \cdot [\partial_t \ln a(x) + v_j(x) \partial_j \ln a(x)] \end{array} \right]$$



- ▶ ユニタリー極限 ($|a| = \infty$) で, 体積粘性係数ゼロ

$$\pi_{ij}(x) = -\eta(x)V_{ij}(x) - \zeta(x)\delta_{ij}V_a(x)$$

$$V_a(x) \equiv \partial_k v_k(x) - d \cdot [\partial_t \ln a(x) + v_j(x)\partial_j \ln a(x)]$$



理論的には, 共形変換のもとで $\nabla \cdot \vec{v}(x)$ が特異な変換をする

共形不変な理論では,

この特異性を消すために, 体積粘性係数ゼロ

D. T. Son, PRL **98**, 020604 (2007)

散乱長により共形不変性が破れた理論では,

散乱長を人為的に変換する量と見做すことで「共形不変」

$V_a(x)$ が特異ではない唯一の体積粘性項

1. 冷却原子系

2. 散乱長を伴う流体力学

3. 結果の解釈とその応用

▶ 体積粘性項

$$\pi_{ij}(x) = -\eta(x)V_{ij}(x) - \zeta(x)\delta_{ij}V_a(x)$$

$$V_a(x) \equiv \partial_k v_k(x) - d \cdot [\partial_t \ln a(x) + v_j(x)\partial_j \ln a(x)]$$

▶ コンタクトの構成方程式

$$C(x) = \mathcal{C}_{\text{eq}}(x) + m\Omega_{d-1}a(x)^{d-2}\pi_{ii}(x)$$

▶ コンタクトの構成方程式

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x) &= \mathcal{C}_{\text{eq}}(x) + m\Omega_{d-1} \mathbf{a}(\mathbf{x})^{d-2} \pi_{ii}(x) \\ &= \mathcal{C}_{\text{eq}}(x) - d \cdot m\Omega_{d-1} \zeta(x) \mathbf{a}(\mathbf{x})^{d-2} V_a(x) \\ &\quad (V_a(x) \equiv \partial_k v_k(x) - d \cdot [\partial_t \ln \mathbf{a}(\mathbf{x}) + v_j(x) \partial_j \ln \mathbf{a}(\mathbf{x})]) \end{aligned}$$

▶ 線形応答 : $a_0 \rightarrow a(t) = a_0 + \delta a(t)$

$$C(t) = \text{Tr} \left[\left(\hat{C}_0 + \frac{\hat{C}_0}{\partial a_0} \right) \hat{\rho}_0 \right] - \frac{i}{m\Omega_{d-1}} \int dt' \text{Tr} \left[\underline{[\hat{C}_0(t), \hat{C}_0(t')]} \hat{\rho}_0 \right] \theta(t-t') \delta a(t') + O(\delta^2 a)$$



$$\left[\begin{aligned} \delta_{ij} \hat{\Pi}_{ij}(x) &= 2\hat{\mathcal{H}}(x) + \frac{\hat{\mathcal{C}}(x)}{m\Omega_{d-1} \mathbf{a}(\mathbf{x})^{d-2}} - d \frac{\Delta \hat{\mathcal{M}}(x)}{4m^2} \\ \zeta &\equiv \lim_{\omega \rightarrow 0} \int d^d \vec{x} \int_0^\infty dt \frac{e^{i\omega t} - 1}{d^2 \cdot \omega} \text{Tr} \left[[\hat{\Pi}_{ii}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}_{jj}(0, \vec{0})] \hat{\rho}_0 \right] \end{aligned} \right]$$

$$C(t) = \mathcal{C}_{\text{eq}}[a(t)] + V d^2 \cdot m\Omega_{d-1} \underline{\zeta} \mathbf{a}(t)^{d-2} \partial_t \ln \mathbf{a}(t) + O(\delta^2 a, \delta \ddot{a})$$

散乱長の伸縮  体積粘性による散逸

$$\text{体積粘性係数: } \zeta = \zeta' \frac{1}{a^2} + O(a^{-3}) \quad (a^{-1} \rightarrow 0)$$

K. Dusling and T. Schäfer, PRL. **111**, 120603 (2013).

▶ 一様系, 散乱長 $a(t)$ 時間依存性のみ

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = -\frac{\mathcal{C}_{\text{eq}}(t)}{m\Omega_{d-1}a(t)^{d-3}}\partial_t[1/a(t)] + d^2 \cdot \underbrace{\zeta(t)a(t)^2}_{a^{-1} \rightarrow 0 \text{ でも有限}} \left[\partial_t[1/a(t)] \right]^2 + O(\dot{a}^3)$$

エネルギー散逸の測定  体積粘性係数の測定

✓ 時空間に依存した散乱長を伴う流体力学の構築

▶ 体積粘性項

- ・ 流体の膨張収縮と散乱長の伸縮の対応
- ・ 共形不変性との関連

▶ コンタクトの構成方程式

- ・ 線形応答
- ・ 散乱長の伸縮を利用した体積粘性係数の測定

✓ 超流動流体力学に対しても、同様の拡張が可能

✓ 「場の量子論的視点からの流体力学」としての理解？

✓ 散乱長の時空間依存性の制御により新奇な振る舞いは現れるか？

