

↙ Kardar-Parisi-Zhang

界面成長のKPZ普遍クラス

— 実験と可積分模型の邂逅 —

竹内一将 (東京工業大学)

共同研究者

佐野雅己 (東大)

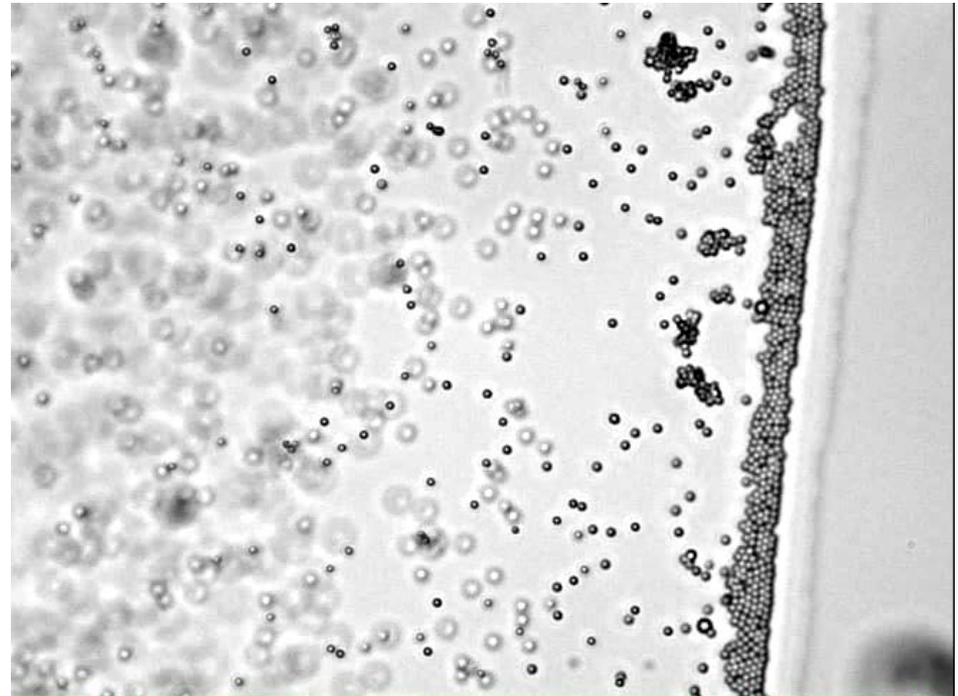
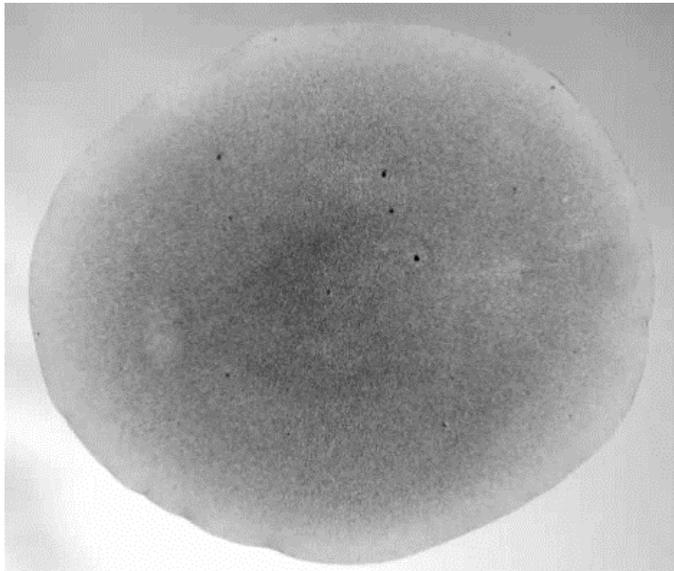
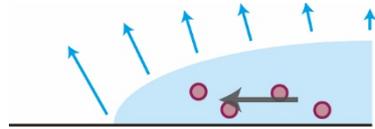
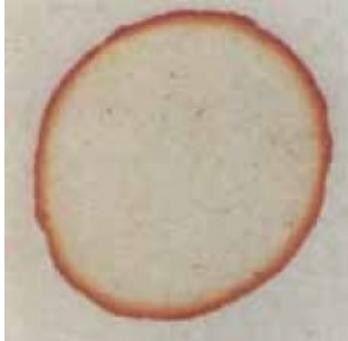
笹本智弘 (東工大)、Herbert Spohn (ミュンヘン工科大)

Jacopo De Nardis, Pierre Le Doussal (パリENS)



キーワード：「ゆらぎを伴う界面成長」

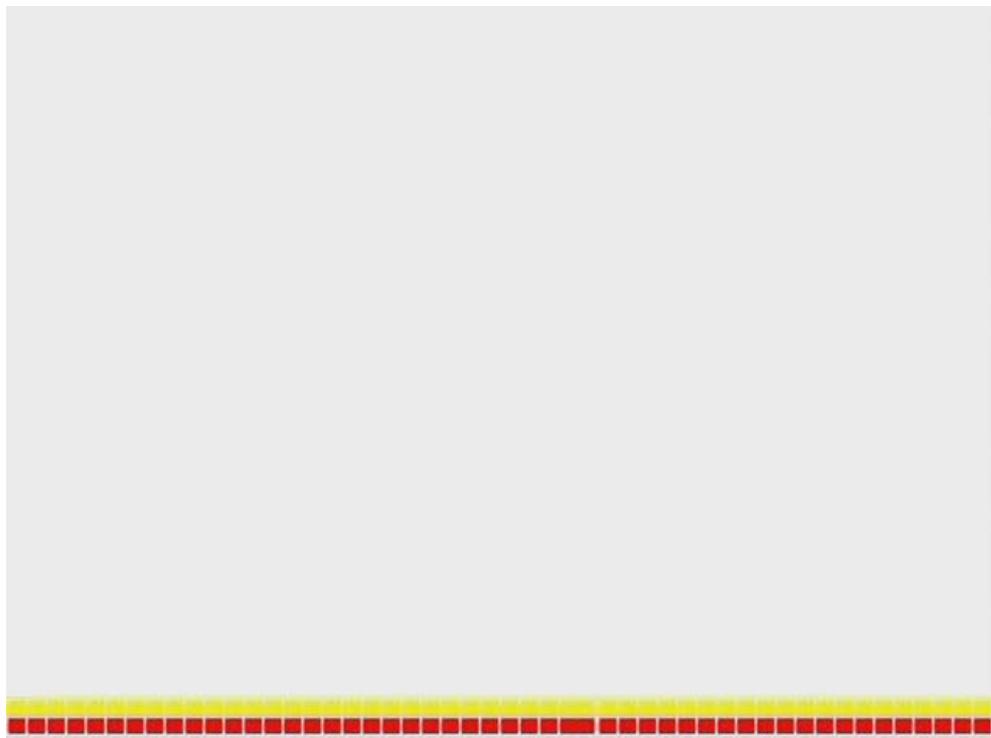
例I: 粒子堆積 (身近な例：コーヒーリング効果)



ポリスチレンビーズによる再現実験 [Yunker et al. Nature 2011, PRL 2013]

キーワード：「ゆらぎを伴う界面成長」

例2: 単純な格子模型



例) Edenモデル

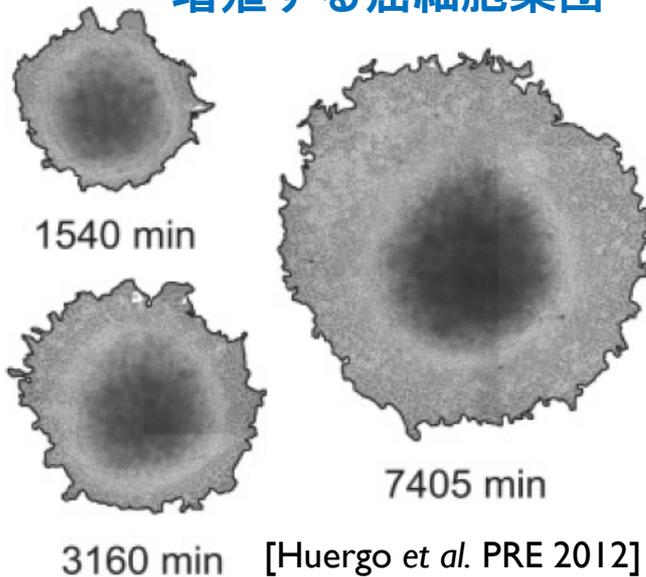
既存粒子（赤）に隣接する
空サイト（黄色）をランダムに
選び、粒子を追加していく。

[movie taken from web]

キーワード：「ゆらぎを伴う界面成長」

ランダム界面成長（短距離相互作用）の様々な例

増殖する癌細胞集団



紙の燃烧

[Maunuksela et al. 1997-]
(森林火災と関連?)

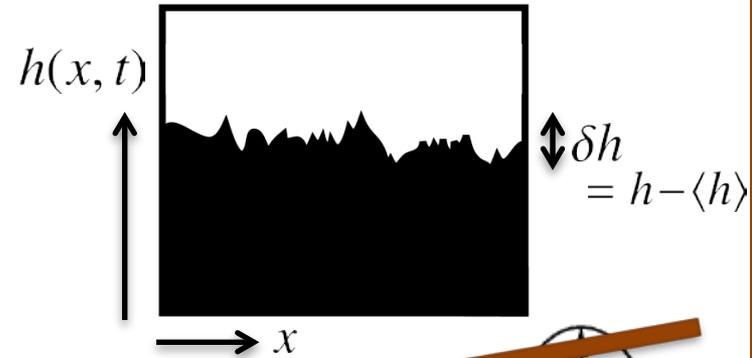


共通点：ランダム界面成長の結果、凸凹の界面が現れる！

スケール不変

⇒ 普遍的なスケーリング則

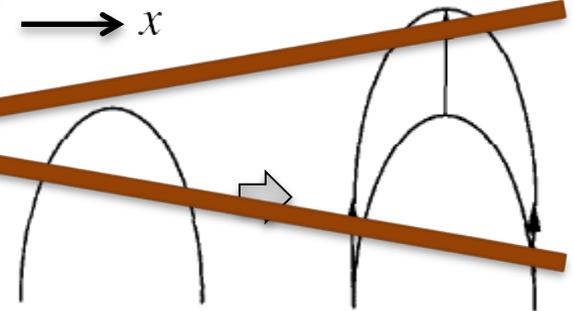
連続体記述



- 線形理論: ~~Edwards-Wilkinson 方程式~~

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = v_0 + \nu \nabla^2 h + \xi(x, t)$$

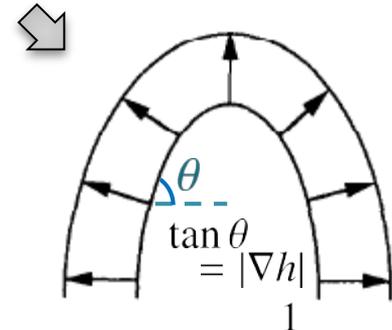
$$\langle \xi(x, t) \xi(x', t') \rangle = D \delta(x - x') \delta(t - t')$$



- Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = \cancel{v_0} + \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \xi(x, t)$$

※変換 $h \rightarrow h + v_0 t$ により、 $v_0 = 0$ として良い。



- スケール不変性: 変換 $x \rightarrow bx, t \rightarrow b^z t, \delta h \rightarrow b^\alpha (\delta h)$ で統計的性質が不変 $\frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}}$

- (1+1)次元では指数が計算可能 $\alpha = 1/2, z = 3/2, \beta \equiv \frac{\alpha}{z} = 1/3$

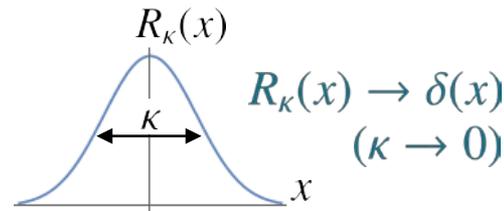
特に、 $\delta h \sim t^\beta \sim t^{1/3}$

- 様々な界面成長モデルがKPZ指数を示す \Rightarrow KPZ 普遍クラス

ブレークスルー（2000年～）

- KPZ方程式は解けないと思われていた。 [Barabási & Stanley, textbook 1995]
- 2000: いくつかの1次元離散モデルに厳密解。「確率的可積分性」
[Johansson CMP 2000, Prähofer & Spohn PRL 2000]
 - ゆらぎ δh の分布関数に解析的表現（同時刻多点分布にも厳密解）
 - ランダム行列理論、組合せ論などとの関係も判明
 - 非平衡スケールリング則に厳密解。「普遍サブクラス」など新たな性質。
- 2010: 1次元KPZ方程式にも厳密解 [Sasamoto & Spohn 2010, Amir et al. 2011]
 - Bethe仮説を用いた別解 [Calabrese et al. EPL 2010, Dotsenko EPL 2010]

KPZ方程式 & Bethe仮説



ID KPZ、ノイズを平滑化（長さ κ で相関、後で $\kappa \rightarrow 0$ ）

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \xi \quad \text{with} \quad \langle \xi(x, t) \xi(x', t') \rangle = R_\kappa(x - x') \delta(t - t')$$

↕ Cole-Hopf 変換 $Z(x, t) = e^{h(x, t)}$ （形式的に...）

確率熱方程式

伊藤積ovich積

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \xi \circ Z = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \xi \circ Z - \frac{1}{2} R_\kappa(0) Z$$

KPZ方程式の「解」

$$h(x, t) := \log Z(x, t) \text{ と定義}$$

（別の方法：
Hairer のラフパス法）

↓ Feynman-Kac 公式

$$Z(x, t) = \int \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \xi(x, t) + \frac{1}{2} R_\kappa(0) \right] dt \right\}$$

↓ N体レプリカ

初期条件

$$\langle Z(x_1, t) \cdots Z(x_N, t) \rangle_\xi = \langle \vec{x} | e^{-H_\kappa t} | \vec{x}_0 \rangle \quad \text{with}$$

$$H_\kappa = -\frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} R_\kappa(x_n - x_m)$$

↓ $\kappa \rightarrow 0$

$$H_\kappa \rightarrow H_{LL} = -\frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \equiv \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \int \xi \delta(x_n - x_m) e^{-\sum_{n,m} \xi x_n x_m}$$

Lieb-Linigerモデル (引力版) 可積分！

$$\exp \left[\frac{1}{2} \sum_{n,m} R_\kappa(x_n - x_m) \right]$$

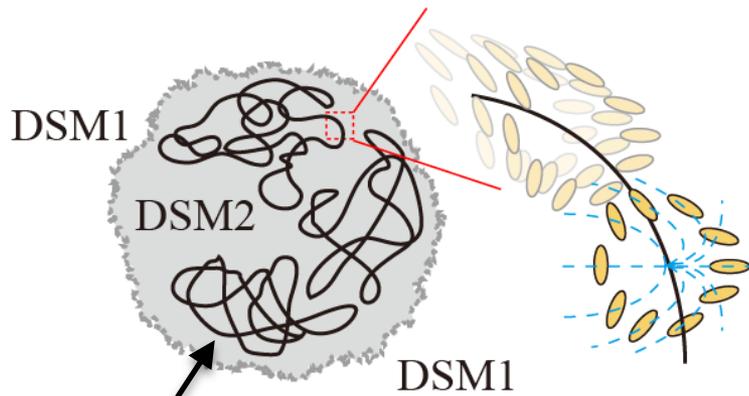
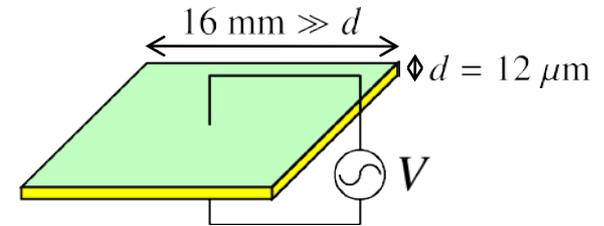
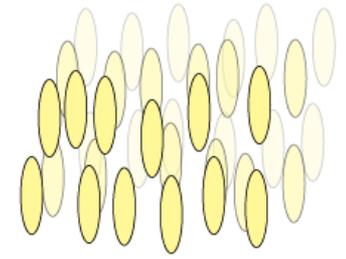
→ Bethe仮説により解ける

ブレークスルー（2000年～）

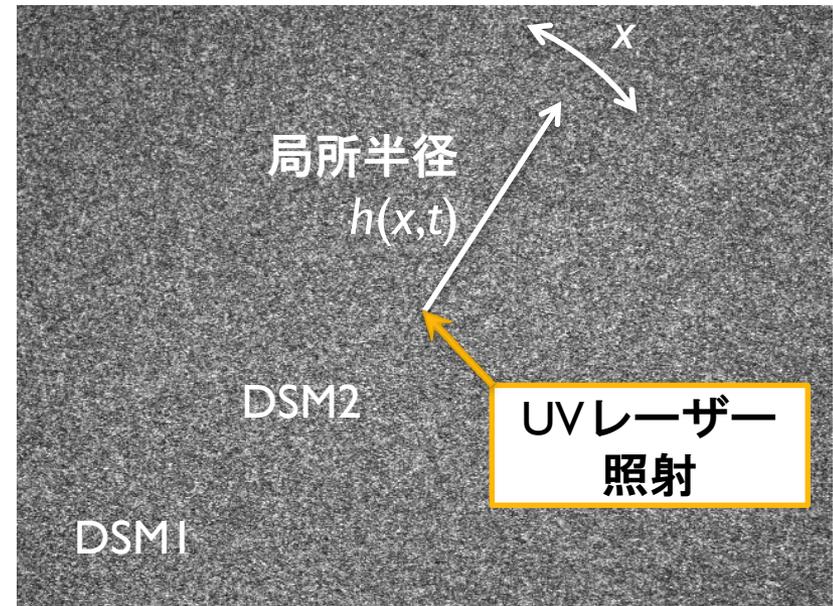
- KPZ方程式は解けないと思われていた。 [Barabási & Stanley, textbook 1995]
- 2000: いくつかの1次元離散模型に厳密解。「確率的可積分性」
[Johansson CMP 2000, Prähofer & Spohn PRL 2000]
 - ゆらぎ δh の分布関数に解析的表現（同時刻多点分布にも厳密解）
 - ランダム行列理論、組合せ論などとの関係も判明
 - 非平衡スケールリング則に厳密解。「普遍サブクラス」など新たな性質。
- 2010: 1次元KPZ方程式にも厳密解 [Sasamoto & Spohn 2010, Amir et al. 2011]
 - Bethe仮説を用いた別解 [Calabrese et al. EPL 2010, Dotsenko EPL 2010]
- 可積分性は特殊な性質。
厳密解の結果は普遍性をもつのか？ 実験してみよう！
 - 実験は、統計法則の普遍性を検証する、挑戦的かつ正当な方法
 - 実は、スケールリング指数ですら実験で確認された例は少ない。
 - 液晶の乱流の界面成長に注目し、実験する。

液晶乱流実験

- ネマチック液晶 = 棒状分子の向きが揃った、液体的状態
- 異方的な物性
 ⇒ 電場をかけて対流を駆動できる
- 高い電圧下で2種類の乱流状態
 DSM1 = 位相欠陥のない乱流 : 準安定
 DSM2 = 位相欠陥だらけの乱流 : 安定



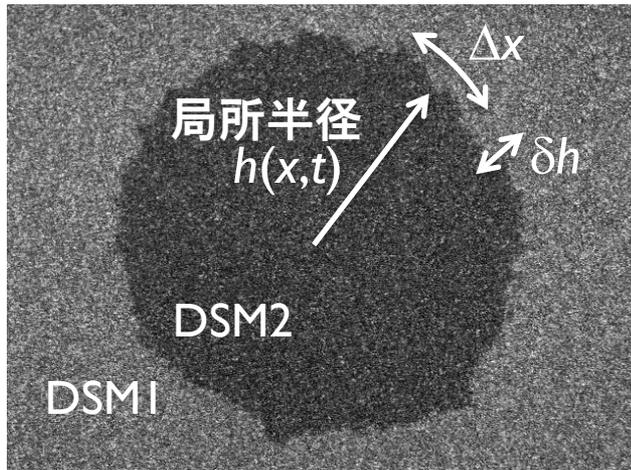
液晶配向場における
線状の位相欠陥



凸凹の界面が出現！

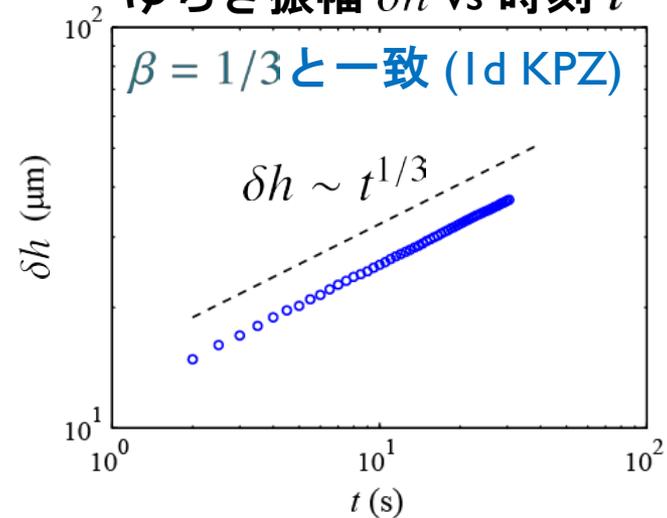
26V, 250Hz Speed x2, — 200μm

スケーリング指数



$\delta h \sim t^\beta, \delta h \sim \Delta x^\alpha$ を使う

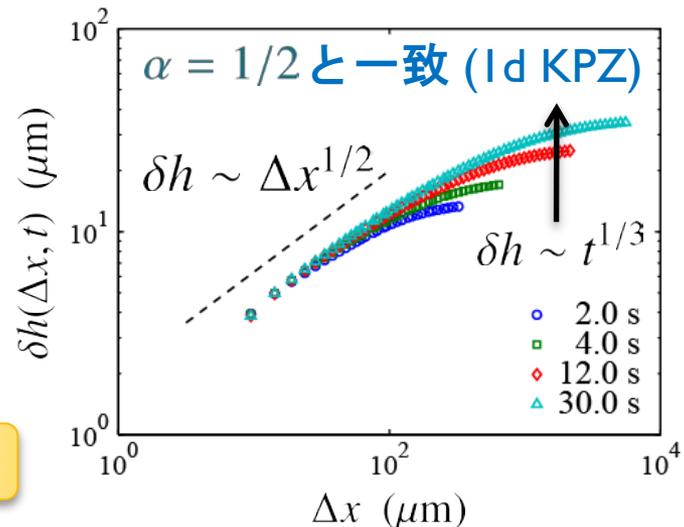
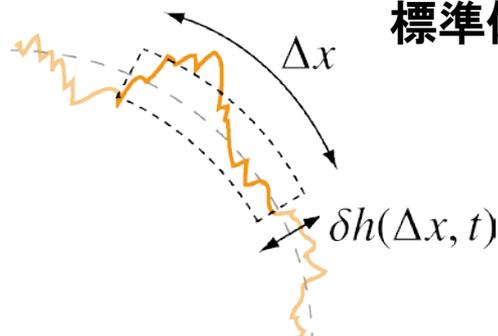
ゆらぎ振幅 δh vs 時刻 t



$h(t) \simeq v_\infty t + (\Gamma t)^{1/3} \chi$ v_∞, Γ : 定数
 χ : 確率変数

$\delta h(\Delta x, t)$: 長さ Δx の領域内の振幅

= その領域内で、 $h(x, t)$ の標準偏差を測定



この実験系はKPZクラスに属する!

ゆらぎ分布の測定へ

Key quantity: n 次キュムラント $\langle h^n \rangle_c$

$$\langle h^2 \rangle_c \equiv \langle \delta h^2 \rangle \quad (\delta h \equiv h(x, t) - \langle h \rangle)$$

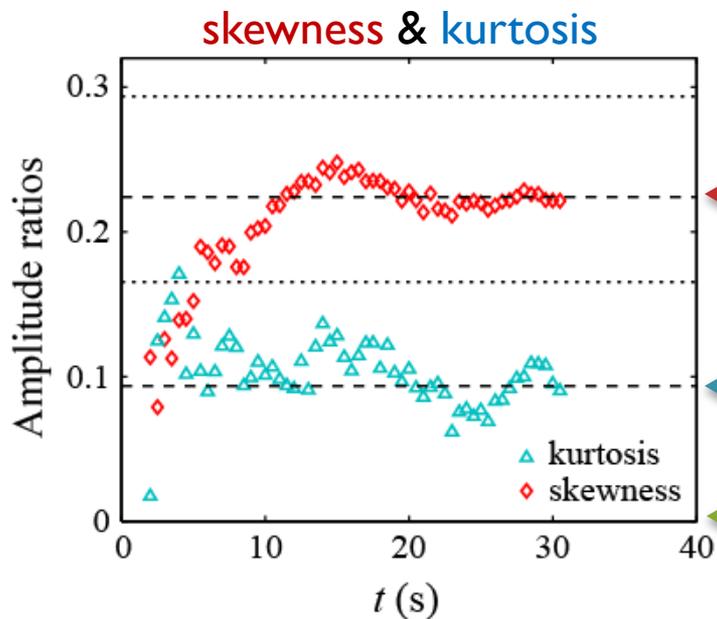
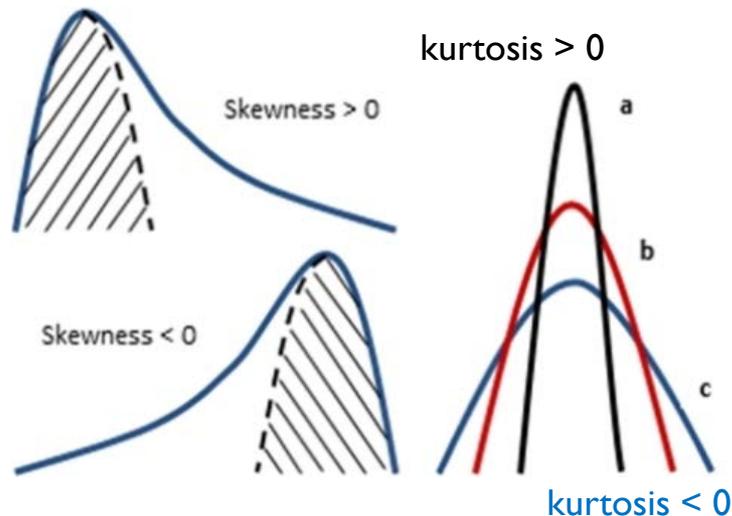
$$\langle h^3 \rangle_c \equiv \langle \delta h^3 \rangle$$

$$\langle h^4 \rangle_c \equiv \langle \delta h^4 \rangle - 3\langle \delta h^2 \rangle^2$$

歪度 skewness = $\langle h^3 \rangle_c / \langle h^2 \rangle_c^{3/2}$

尖度 kurtosis = $\langle h^4 \rangle_c / \langle h^2 \rangle_c^2$

(Gauss分布では両方ゼロ)



破線：
ランダム行列理論における
GUE Tracy-Widom 分布

← skewness

GUE Tracy-Widom分布

← kurtosis

← Gauss分布
の場合

$$h(t) \simeq v_\infty t + (\Gamma t)^{1/3} \chi$$

確率変数 χ は
GUE Tracy-Widom 分布に従う？

Tracy-Widom分布とは？

[Tracy & Widom,
Commun. Math. Phys. 159, 151 (1994)]

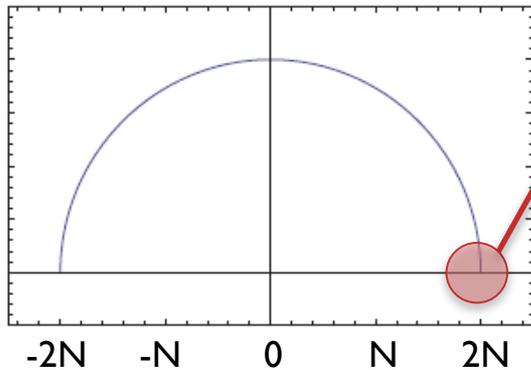
Gauss型ランダム行列の最大固有値が従う分布

例：Gaussian Unitary Ensemble (GUE) の場合

Hermite行列 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}$

対角成分 $A_{ii} = a_{ii}$ Gauss分布 平均0 分散 N
 非対角成分 $A_{ij} = \bar{A}_{ji} = a_{ij} + ib_{ij}$ 平均0 分散 $N/2$

全固有値の確率分布
(Wignerの半円則)



$$\lambda_{\max} \simeq 2N + N^{1/3} \chi_{\text{GUE}}$$

$\text{pdf}(\chi_{\text{GUE}}) \equiv$
GUE Tracy-Widom分布

$t \leftrightarrow N$
対応関係？
 $\chi = \chi_{\text{GUE}} ?$



Remark:

Tracy-Widom分布は
Fredholm 行列式で記述される

$$\text{Prob}(\chi_{\text{GUE}} \leq s) = \det(1 - P_s K_{\text{Ai}} P_s)$$

$P_s : [s, \infty)$ への射影

$$K_{\text{Ai}}(x, y) = \int_0^\infty d\lambda \text{Ai}(x + \lambda) \text{Ai}(y + \lambda)$$

:Airyカーネル

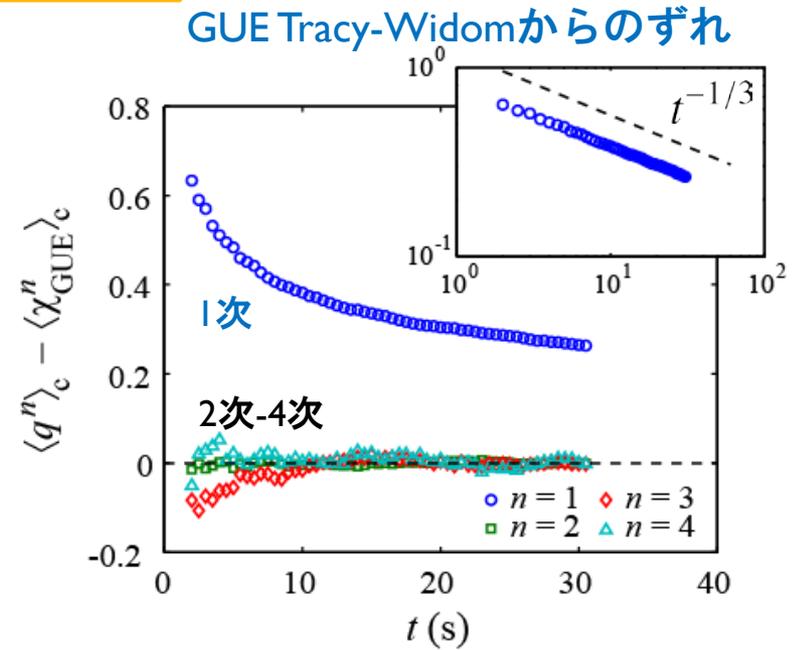
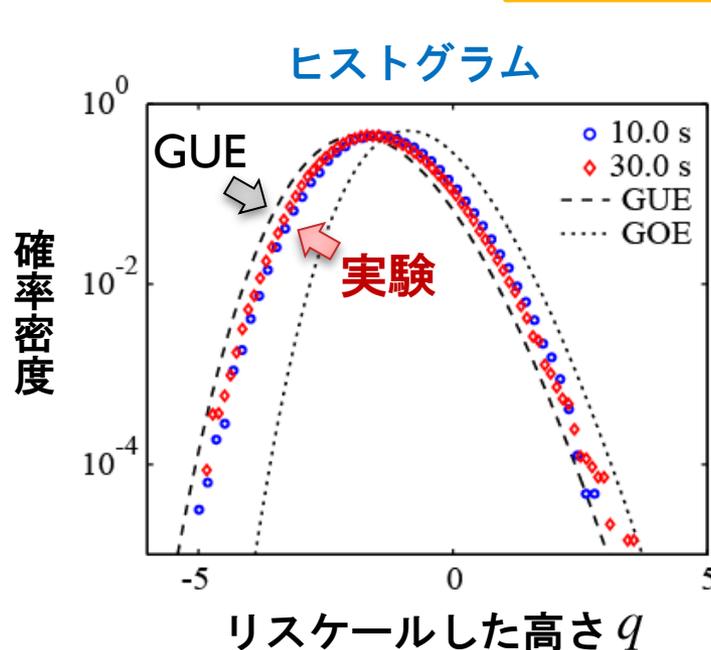
実験で得た
界面高さ

$$h(t) \simeq v_\infty t + (\Gamma t)^{1/3} \chi$$

Tracy-Widom分布の直接検証

$$h(t) \simeq v_\infty t + (\Gamma t)^{1/3} \chi$$

リスケールした高さ変数 $q \equiv (h - v_\infty t) / (\Gamma t)^{1/3} \simeq \chi$



界面ゆらぎは漸近的に GUE Tracy-Widom 分布を示す！
 (4次キュムラントまで確認)

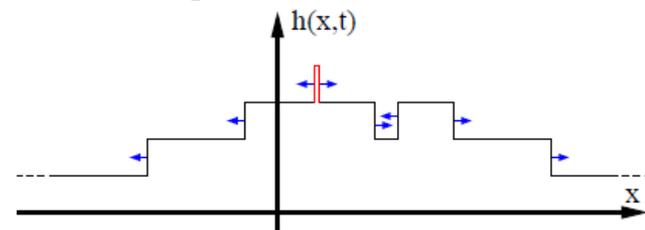
これは可積分模型に対する結果と一致 → 1次元KPZの普遍的性質！

Tracy-Widom を示す可積分模型

PNG (多核成長) モデルの場合 [Prähofer & Spohn, PRL 2000]

時間発展則

- (1) 確率的・局所的な核生成
- (2) 一定速度の横成長 (成長速度 1)

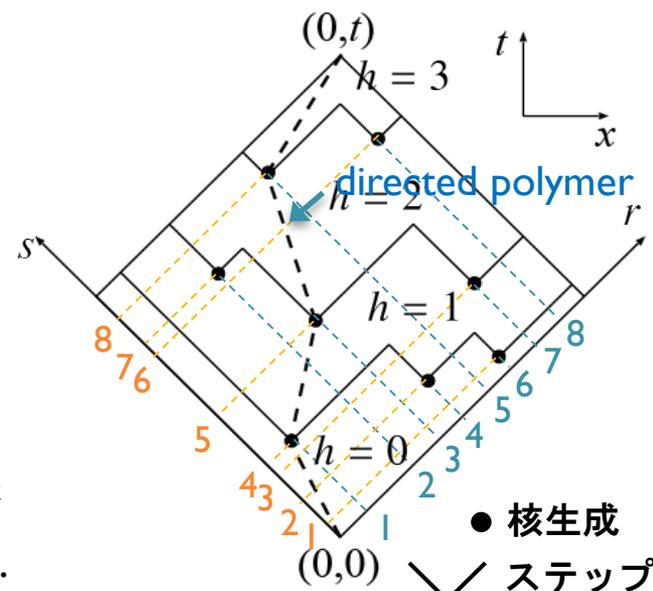


円形界面の作り方

核生成が起こる範囲を $|x| \leq t$ に制限

[または $(x,t) = (0,0)$ で生じたプラトー上に制限]

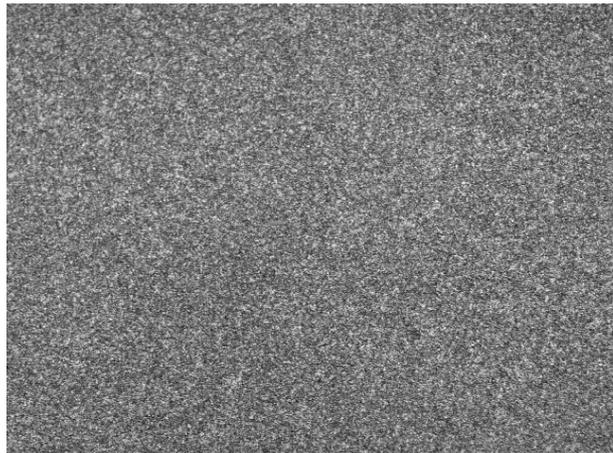
- $h(0, t)$ = $(0,0)$ から $(0,t)$ に到達するのに跨ぐ黒線の本数
- = $(0,0)$ と $(0,t)$ を結ぶ directed polymer (DP) が通る黒点の最大個数 (点-対-点の問題)
- = 長さが Poisson 分布するランダム順列の単調増加部分列の最大長さ
- = ... (Young 盤、Robinson-Schensted 対応など) ...
- = 漸近的に GUE Tracy-Widom 分布が出現



ランダム順列 $r: 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$
 $s: \underline{4}\ \underline{7}\ 5\ 2\ \underline{8}\ 1\ 3\ 6$

界面形状依存性

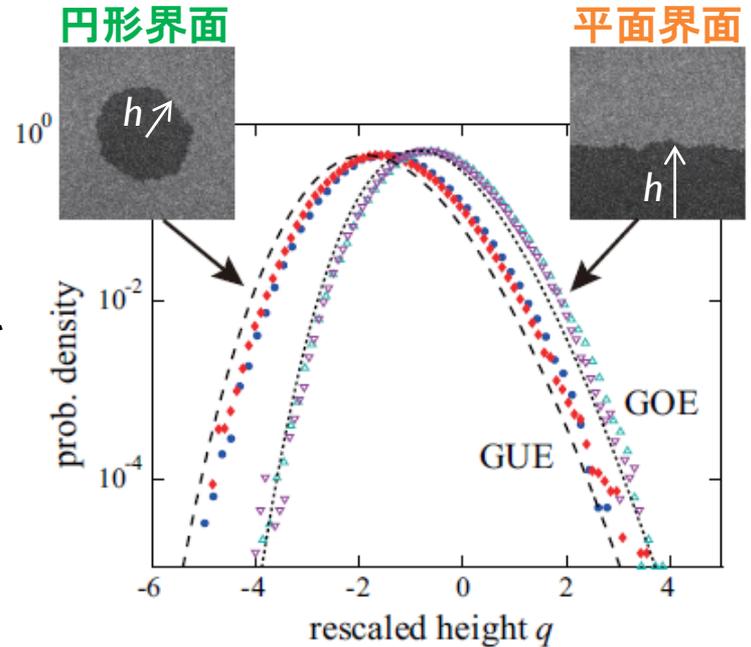
線状レーザーを打ち込むことにより平面界面成長も実現



26V, 250Hz Speed x5, — 200 μ m

円形界面と同じスケールング指数が現れる

しかし
ゆらぎ分布を測ると...



指数は同じだが、
ゆらぎ分布は異なる！

$$\begin{aligned} \text{円形} &: h(t) \simeq v_{\infty}t + (\Gamma t)^{1/3} \chi_{\text{GUE}} \\ \text{平面} &: h(t) \simeq v_{\infty}t + (\Gamma t)^{1/3} \chi_{\text{GOE}} \end{aligned}$$

注) GUE : 複素 Hermite 行列
GOE : 実対称行列

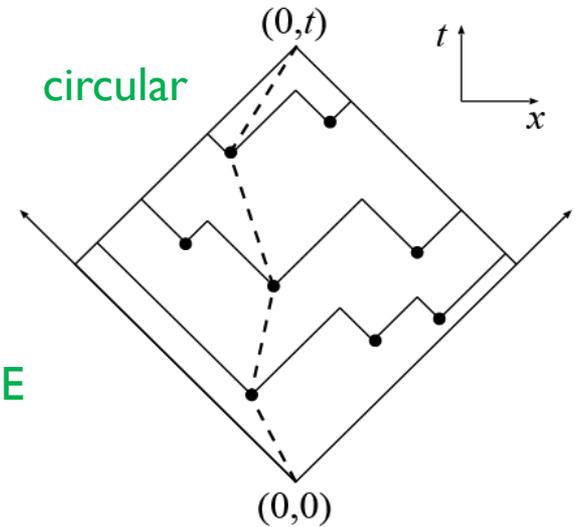
なぜ形状依存？

PNG 円形界面

核生成が領域 $|x| \leq t$ に制限



点 $(0,0)$ & $(0,t)$ で定まる正方形の時空間
= 点-対-点 DP \Rightarrow GUE



PNG 平面界面

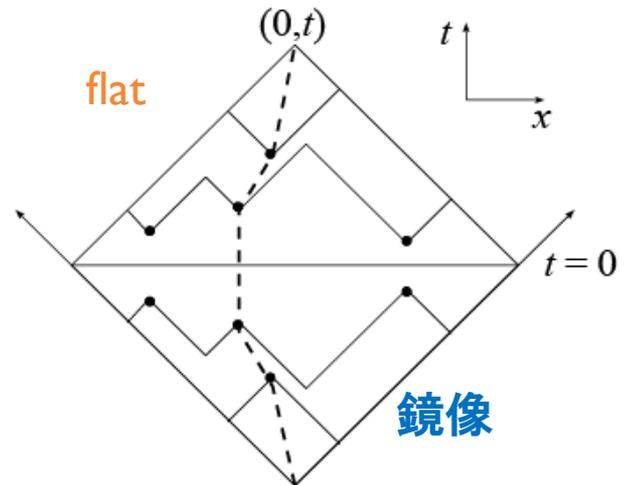
核生成に制限なし



直線 $t=0$ と点 $(0,t)$ で定まる三角形の時空間
= 線-対-点 DP



点 $(0,t)$ & $(0,-t)$ で定まる正方形の時空間
+ 時間反転対称性 \Rightarrow GOE



形状（または初期条件）が違う \Rightarrow 時空間の対称性が違う。
KPZクラスは、異なる「普遍サブクラス」に分離する！

なぜ形状依存？

[Calabrese et al. 2010, Dotsenko 2010, Calabrese & Le Doussal, PRL 2011]

KPZ 方程式の場合：背後にある対称性は同じ

$Z(x, t) = e^{h(x, t)}$ に対する Feynman-Kac公式

$$Z(0, t) = e^{-\frac{1}{2}R_\kappa(0)t} \left\langle \exp \left[- \int_0^t -\xi(b_\tau, \tau) d\tau \right] Z(b_{\tau=0}, 0) \right\rangle_b$$

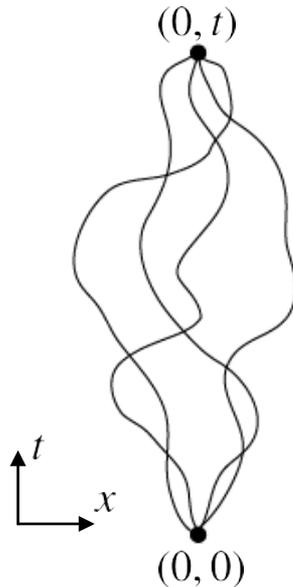
b_τ : ブラウン運動
終条件 $b_{\tau=t} = 0$

$Z(b_\tau, t)$: 「分配関数」
 $\langle \dots \rangle_b$: b_τ について平均

円形

$$h(x, 0) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ -\infty & (x \neq 0) \end{cases} \Rightarrow Z(x, 0) = \delta(x)$$

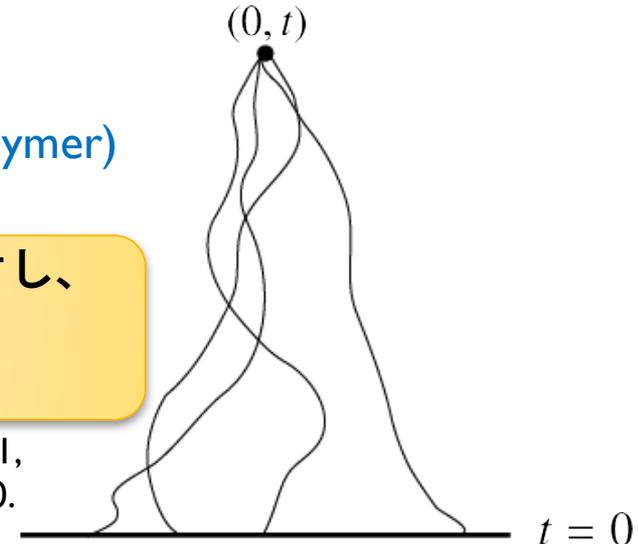
点-対-点 DP



平面

$$h(x, 0) = 0 \Rightarrow Z(x, 0) = \text{const.}$$

線-対-点 DP



ランダムポテンシャル
 $-\xi(x, t)$ の下での DP (directed polymer)

DP自由エネルギー $h = \log Z$ に対し、
GUE/GOE Tracy-Widom 分布が
実際導出されている。

円形: Sasamoto & Spohn 2010, Amir et al. 2011,
Calabrese et al. 2010, Dotsenko 2010.

平面: Calabrese & Le Doussal, PRL 2011

Bethe仮説による導出（円形界面）

KPZ eq \rightarrow 引力的 Lieb-Liniger モデル

$$H_N = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n \neq n'}^N \delta(x_n - x_{n'})$$

初期条件

$$\langle Z(0, t)^N \rangle = \langle \vec{0} | e^{-H_N t} | \vec{0} \rangle = \sum_{\mu} e^{-E_{\mu} t} |\langle \vec{0} | \psi_{\mu} \rangle|^2$$

を計算したい。（ μ : 固有状態）

Bethe仮説:

$$\psi_{\mu}(x_1, \dots, x_N) \propto \sum_P A_P \exp\left(i \sum_{n=1}^N \lambda_{P(n)} x_n\right)$$

P : 置換

λ_n : (擬) 運動量

引力的 Lieb-Linigerの場合: $A_P = (-1)^P \prod_{n < n'} [\lambda_{P(n)} - \lambda_{P(n')} + i \operatorname{sgn}(x_n - x_{n'})]$

束縛粒子の“string”ができる (j 番stringに M_j 粒子)

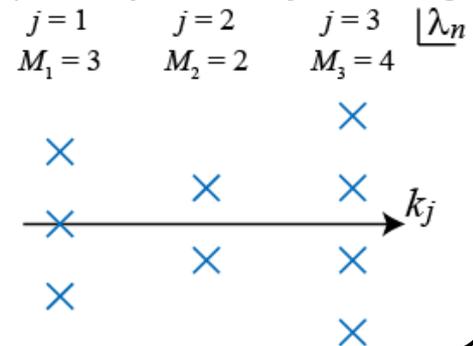
$$\lambda_n = k_j + \frac{i}{2}(M_j + 1 - 2m_j) \quad (m_j = 1, 2, \dots, M_j)$$

$$E_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J M_j k_j^2 - \frac{1}{24} \sum_{j=1}^J M_j^3 + \frac{N}{24}$$

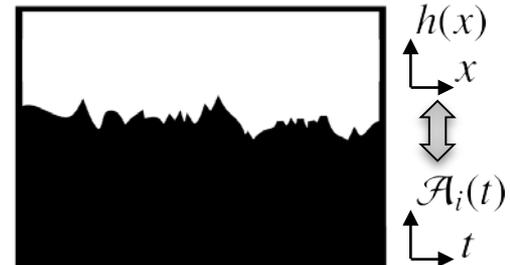
$$\exp(n^3/3) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{Ai}(y) e^{ny}$$

Tracy-Widom分布の Airy カーネル
 $K(x, y) = \int_0^{\infty} d\lambda \operatorname{Ai}(x + \lambda) \operatorname{Ai}(y + \lambda)$

e.g.) $N=9$ particles, $J=3$ strings



空間相関関数



可積分模型の厳密解

- KPZ 空間相関は、Airy過程という確率過程 $\mathcal{A}_i(t)$ の時間相関と等価
- 平面界面・円形界面は異なるAiry過程で記述
 - 平面 : Airy₁ 過程 $\mathcal{A}_1(t)$ [Sasamoto, JPA 2005]
 - 円形 : Airy₂ 過程 $\mathcal{A}_2(t)$ [Prähofer & Spohn, JSP 2002]

- Airy₂ 過程
= GUEランダム行列のブラウン運動（Dysonブラウン運動）として書ける。

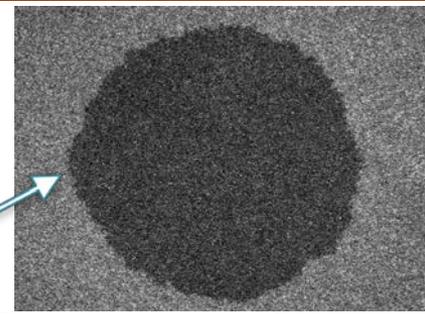
- Airy₁ と GOE の間にこの関係はない。

$$A^{\text{GUE}}(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1N}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}(t) & \cdots & A_{NN}(t) \end{pmatrix}$$

Airy₂ = A^{GUE} の最大固有値の運動
(を適切にリスケールしたもの)

空間相関関数

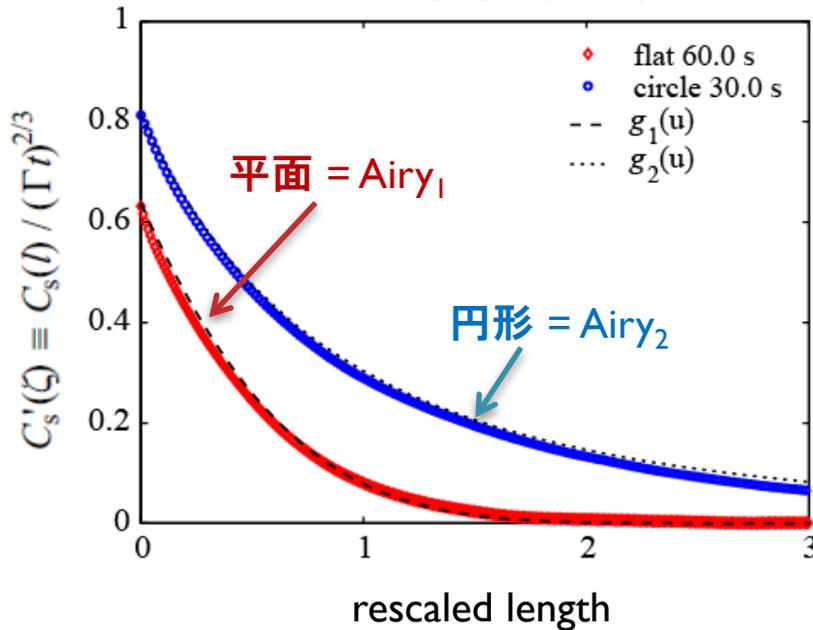
Airy₂ 過程、すなわち Dyson ブラウン運動が見えている！



可積分模型の厳密解

- KPZ 空間相関は、Airy過程という確率過程 $\mathcal{A}_i(t)$ の時間相関と等価
- 平面界面・円形界面は異なるAiry過程で記述
 - 平面 : Airy₁ 過程 $\mathcal{A}_1(t)$ [Sasamoto, JPA 2005]
 - 円形 : Airy₂ 過程 $\mathcal{A}_2(t)$ [Prähofer & Spohn, JSP 2002]

2点 空間相関関数 @実験



$$C_s(l, t) \equiv \langle h(x+l, t)h(x, t) \rangle - \langle h \rangle^2$$

Airy₁ / Airy₂ 空間相関が
実験でも現れた！
KPZの普遍的性質！

※質的に異なる減衰

円形: $C_s(l) \sim l^{-2}$ (べき減衰)

平面: 指数関数より速く減衰

KPZ普遍サブクラス

[レビュー: I. Corwin,
Rand. Mat. Theor. Appl. **1**, 1130001 (2012)]

指数は同じ、しかし**分布関数・相関関数が異なる。**

円形界面

- 初期条件 : 点  または (無限に細い) 楔形  例えば
$$h(x, 0) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ -\infty & (x \neq 0) \end{cases}$$
- ゆらぎ分布 : GUE Tracy-Widom 分布
- 空間相関 : Airy₂ 過程と等価

平面界面

- 初期条件 : 直線  $h(x, 0) = 0$
- ゆらぎ分布 : GOE Tracy-Widom 分布
- 空間相関 : Airy₁ 過程と等価

定常界面

- 初期条件 : 定常状態界面  $h(x, 0) = b_x$ (ブラウン運動と等価)
- ゆらぎ分布 : Baik-Rains 分布

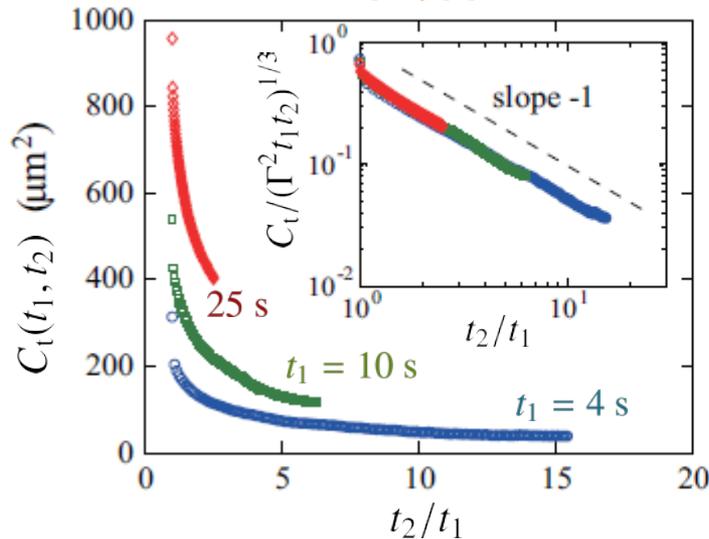
注1) 他のサブクラスもある。

注2) 時間相関はよくわかっていない。

時間相関関数

$$C_t(t_1, t_2) \equiv \langle \delta h(x, t_1) \delta h(x, t_2) \rangle \quad \delta h(x, t) \equiv h(x, t) - \langle h(x, t) \rangle$$

平面界面



• スケーリング仮説

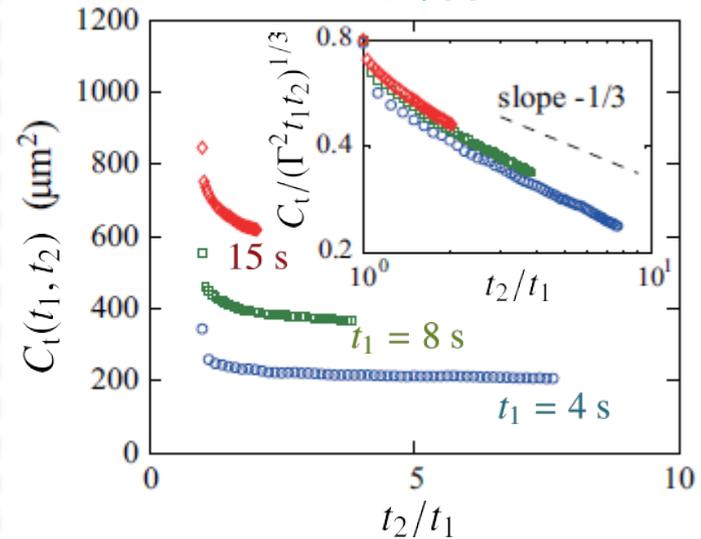
$$C_t(t_1, t_2) \simeq (\Gamma^2 t_1 t_2)^{1/3} \tilde{C}_t(t_2/t_1)$$

• 長時間挙動 $t_2/t_1 \gg 1$

$$\tilde{C}_t(t_2/t_1) \sim (t_2/t_1)^{-1}$$

$$\therefore C_t(t_1, t_2) \sim t_2^{-1} t_2^{1/3} = t_2^{-2/3} \rightarrow 0$$

円形界面



同じスケリング仮説。ただし

$$\tilde{C}_t(t_2/t_1) \sim (t_2/t_1)^{-1/3}$$

(その後、理論でも確認

[Ferrari & Spohn, SIGMA 2016])

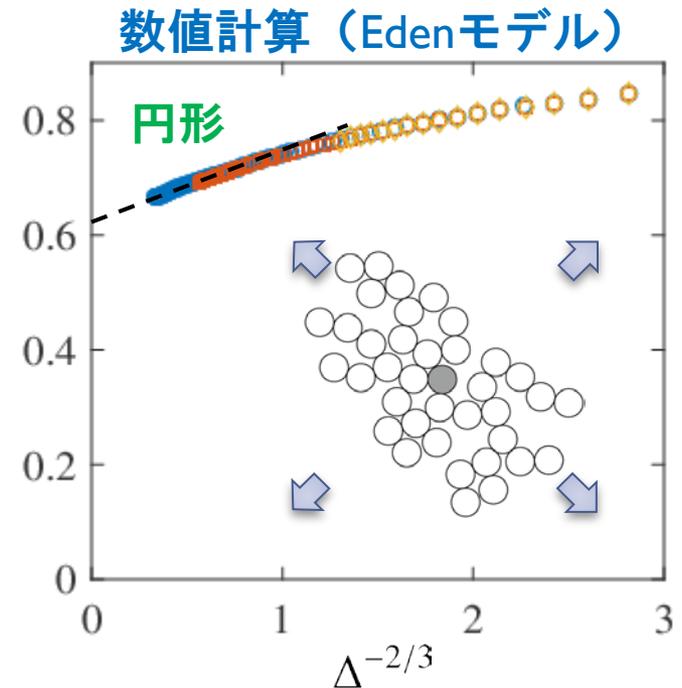
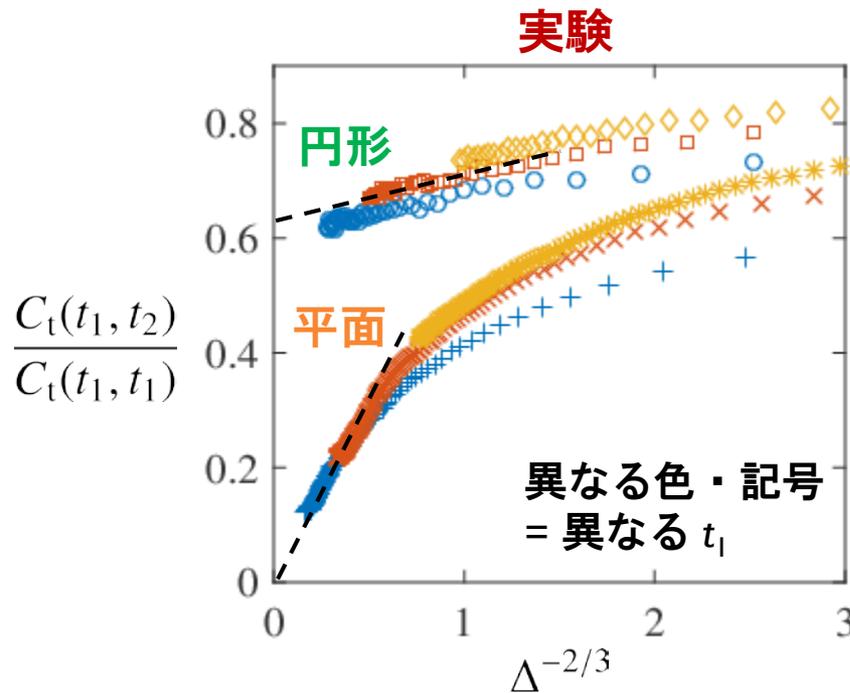
$$\therefore C_t(t_1, t_2) \sim t_2^{-1/3} t_2^{1/3} > 0 \quad (t_2 \rightarrow \infty) \quad (!)$$

無限に持続する時間相関

時間相関の持続性

経過時間を無次元化： $\Delta \equiv \frac{t_2 - t_1}{t_1}$,

$$\frac{C_t(t_1, t_2)}{C_t(t_1, t_1)} \sim \begin{cases} \Delta^{-2/3} & \text{(flat)} \\ \text{const.} + \Delta^{-2/3} & \text{(circular)} \end{cases}$$



円形界面では $\frac{C_t(t_1, t_2 \rightarrow \infty)}{C_t(t_1, t_1)} \approx 0.6 (> 0)$

時間相関が持続！ ある種のエルゴード性の破れ。理解できるか？

理論

[De Nardis, Le Doussal, KaT, PRL 118, 125701 (2017);
De Nardis & Le Doussal, J. Stat. Mech. 2017, 053212]

KPZ eq = 引力的 Lieb-Liniger モデル

$$H_N = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n \neq m}^N \delta(x_n - x_m)$$

• 1点分布 : $\langle Z(0, t)^N \rangle = \langle \vec{0} | e^{-H_N t} | \vec{0} \rangle = \sum_{\mu} e^{-E_{\mu} t} |\langle \vec{0} | \psi_{\mu} \rangle|^2$

string単位で足し合わせる \Rightarrow $= \sum_{J=1}^{\mu} \frac{1}{J!} \prod_{j=1}^J \left(\sum_{M_j} \int dk_j \right) e^{-E_{\mu} t} |\langle \vec{0} | \psi_{\mu} \rangle|^2$

• 2点 (2時刻) 分布 :

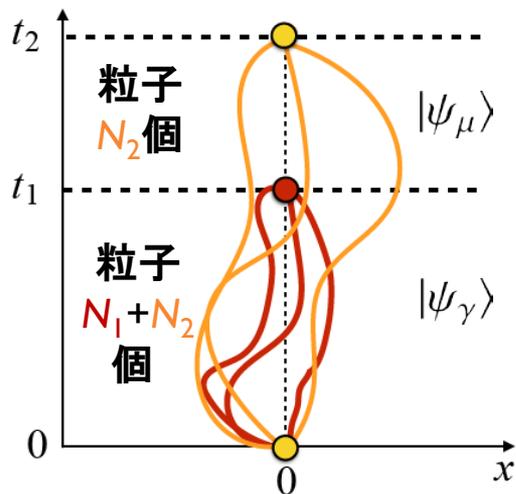
$$\langle Z(0, t_1)^{N_1} Z(0, t_2)^{N_2} \rangle = \int d\vec{x} \langle \vec{0} | e^{-H_{N_2}(t_2-t_1)} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x}, \vec{0} | e^{-H_{N_1+N_2}t_1} | \vec{0}, \vec{0} \rangle$$

$$= \int d\vec{x} \sum_{\mu} \sum_{\gamma} \langle \vec{0} | \psi_{\mu} \rangle \langle \psi_{\mu} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x}, \vec{0} | \psi_{\gamma} \rangle \langle \psi_{\gamma} | \vec{0}, \vec{0} \rangle e^{-E_{\mu}(t_2-t_1)} e^{-E_{\gamma}t_1}$$

$$= \sum_{J_{\mu}=1}^{N_2} \sum_{J_{\gamma}=1}^{N_1+N_2} \frac{1}{J_{\mu}! J_{\gamma}!} \prod_{j=1}^{J_{\mu}} \left(\sum_{M_j} \int dk_j \right) \prod_{j'=1}^{J_{\gamma}} \left(\sum_{M_{j'}} \int dk_{j'} \right) \int d\vec{x} \dots$$

\Rightarrow 母関数 \Rightarrow 2点分布の確率密度

解を閉じた形で書けていない



I-String 近似

[De Nardis, Le Doussal, KaT, PRL 118, 125701 (2017);
De Nardis & Le Doussal, J. Stat. Mech. 2017, 053212]

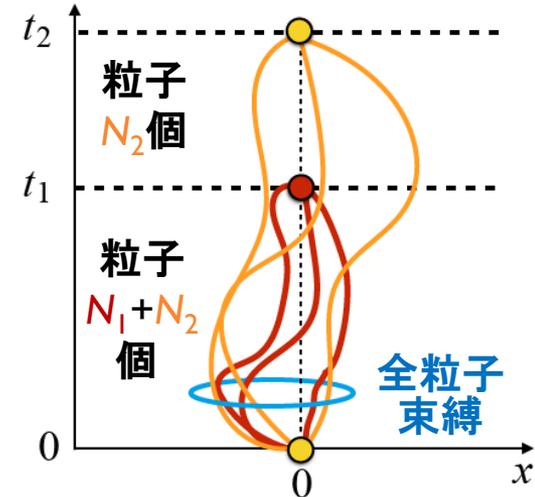
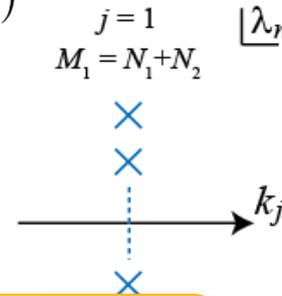
$$\langle Z_1^{N_1} Z_2^{N_2} \rangle := \langle Z(0, t_1)^{N_1} Z(0, t_2)^{N_2} \rangle$$

$$= \sum_{J_\gamma=1}^{N_1+N_2} \sum_{J_\mu=1}^{N_2} \frac{1}{J_\mu! J_\gamma!} \prod_{j=1}^{J_\mu} \left(\sum_{M_j} \int dk_j \right) \prod_{j'=1}^{J_\gamma} \left(\sum_{M_{j'}} \int dk_{j'} \right) \int d\vec{x} \langle \vec{0} | \psi_\mu \rangle \langle \psi_\mu | \vec{x} \rangle \langle \vec{x}, \vec{0} | \psi_\gamma \rangle \langle \psi_\gamma | \vec{0}, \vec{0} \rangle e^{-E_\mu(t_2-t_1) - E_\gamma t_1}$$

1つめの和の主要項 : $J_\gamma = 1$
(N_1+N_2 個の全粒子が束縛)



- 閉じた形の解が求まる!
- $h(0, t_1)$ が大きめでさえあれば
非常に良い近似になっている。



- 高さ $h(0, t_1)$ と、高さの増加量 $h(0, t_2) - h(0, t_1)$ をリスケール : $\tilde{h}_1, \tilde{h}_{12}$
- 同時確率密度 $P_\Delta(\tilde{h}_1, \tilde{h}_{12})$ がほしい。 ($\Delta = (t_2 - t_1)/t_1$ を固定、 $t_1, t_2 \rightarrow \infty$.)
- 母関数 $g_\Delta(\tilde{h}_1, \tilde{h}_{12}) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left\langle \exp\left[-Z_1 e^{-t_1^{1/3} \tilde{h}_1}\right] \exp\left[-Z_2 e^{-t_1^{1/3} (\tilde{h}_1 + \Delta^{1/3} \tilde{h}_{12})}\right] \right\rangle_\xi$



$$g_\Delta(\tilde{h}_1, \tilde{h}_{12}) = g_\Delta^{(1)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_{12}) + O(e^{-\frac{8}{3} \tilde{h}_1^{3/2}})$$

本来の母関数 **I-string 近似の母関数**

近似解の表式

[De Nardis, Le Doussal, KaT, PRL 118, 125701 (2017);
De Nardis & Le Doussal, J. Stat. Mech. 2017, 053212]

母関数の 1-string 近似解 :

$$g_{\Delta}^{(1)}(\sigma_1, \sigma) = \Delta^{1/3} F_2(\sigma) \text{Tr} \left[P_{\sigma} K_{\sigma_1}^{\Delta} P_{\sigma} (I - P_{\sigma} K_{\text{Ai}} P_{\sigma})^{-1} \right] - F_2(\sigma) \text{Tr} [P_{\sigma_1} K_{\text{Ai}}]$$

ここで

$P_{\sigma} : [\sigma, \infty) \rightarrow$ の射影

$F_2(\sigma) = \text{Prob}[\chi_{\text{GUE}} < \sigma] : \text{GUE Tracy-Widom 分布}$

$$K_{\text{Ai}}(x, y) = \int_0^{\infty} d\lambda \text{Ai}(x + \lambda) \text{Ai}(y + \lambda)$$

新たに現れたカーネル

$$K_{\sigma_1}^{\Delta}(x, y) = \int_0^{\infty} d\xi d\eta \text{Ai}(-\xi + x) K_{\text{Ai}}(\xi \Delta^{1/3} + \sigma_1, \eta \Delta^{1/3} + \sigma_1) \text{Ai}(-\eta + y)$$

時間差 $\Delta = (t_2 - t_1)/t_1$ に対する同時確率密度 $P_{\Delta}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_{12})$ の近似解 :

$$P_{\Delta}^{(1)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_{12}) = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{h}_1} \frac{\partial}{\partial \tilde{h}_{12}} - \Delta^{-1/3} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{h}_{12}^2} \right) g_{\Delta}^{(1)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_{12})$$

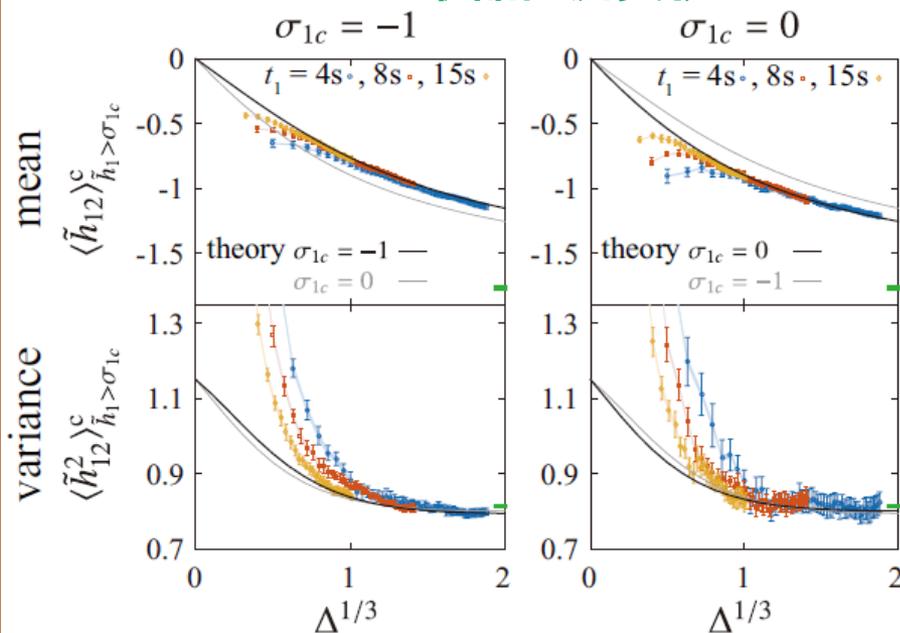
値を数値的に評価し、実験・シミュレーションと比較

検証：条件つきキュムラント

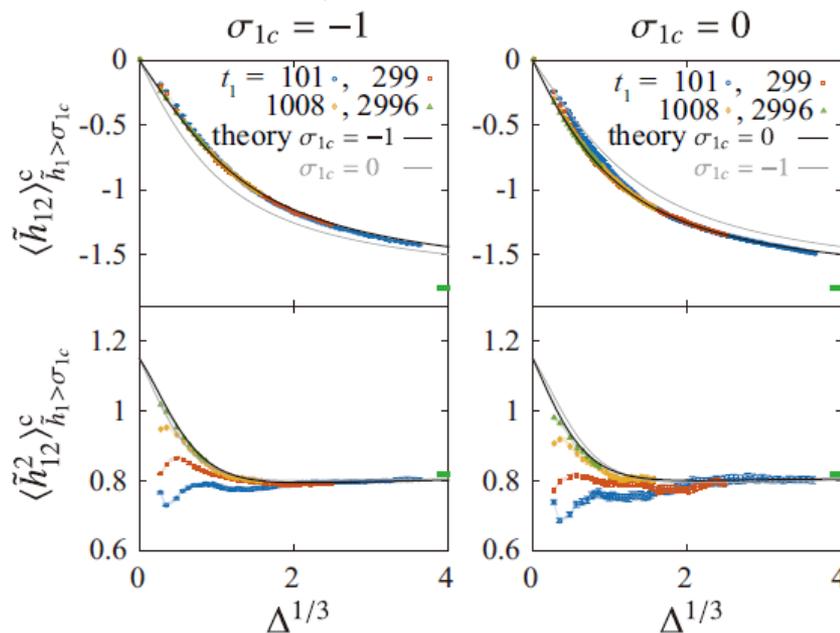
[De Nardis, Le Doussal, KaT,
PRL 118, 125701 (2017)]

条件つきキュムラント $\langle \tilde{h}_{12}^n \rangle_{\tilde{h}_1 > \sigma_{1c}}^c$ ($\tilde{h}_1 > \sigma_{1c}$ を満たす時系列に対して平均)

液晶乱流実験



Edenモデル シミュレーション



I-string近似解と一致！

※ 有限時間効果の軽減のため、
 $\text{Prob}[h > h_{1c}] = \text{Prob}[\chi_{\text{GUE}} > \sigma_{1c}]$
 を満たす $h > h_{1c}$ で平均をとった。

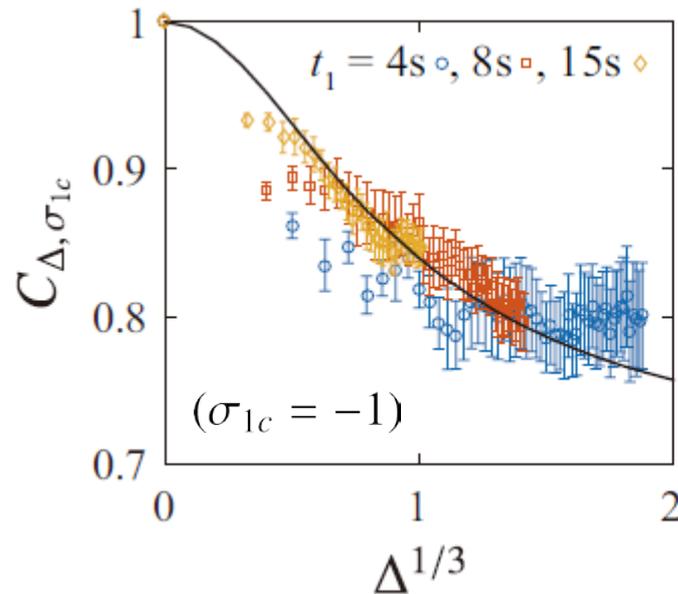
検証：条件付き相関関数

[De Nardis, Le Doussal, KaT,
PRL 118, 125701 (2017)]

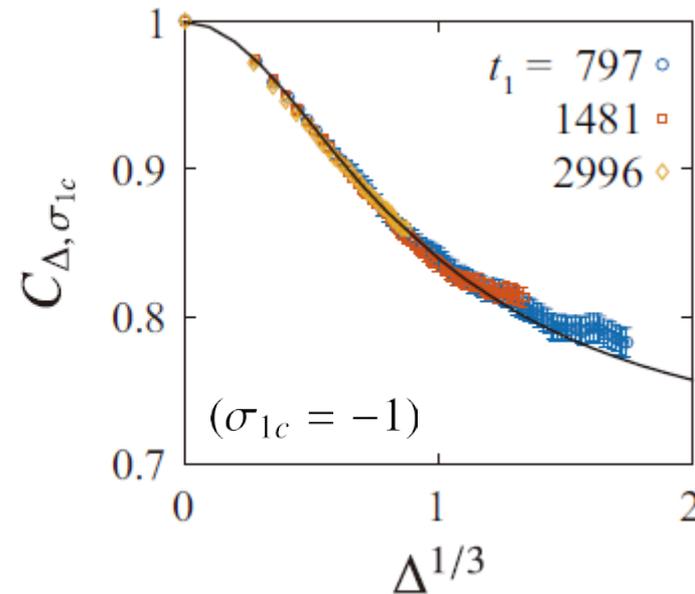
$$C_{\Delta, \sigma_{1c}} := \frac{C_t(t_1, t_2)_{\tilde{h}_1 > \sigma_{1c}}}{C_t(t_1, t_1)_{\tilde{h}_1 > \sigma_{1c}}} = 1 + \Delta^{1/3} \frac{\text{cov}[\tilde{h}_1, \tilde{h}_{12}]_{\tilde{h}_1 > \sigma_{1c}}}{\langle \tilde{h}_1^2 \rangle_{\tilde{h}_1 > \sigma_{1c}}^c}$$

($\tilde{h}_1 > \sigma_{1c}$ を満たす
時系列に対して計算)

液晶実験



Edenモデル シミュレーション



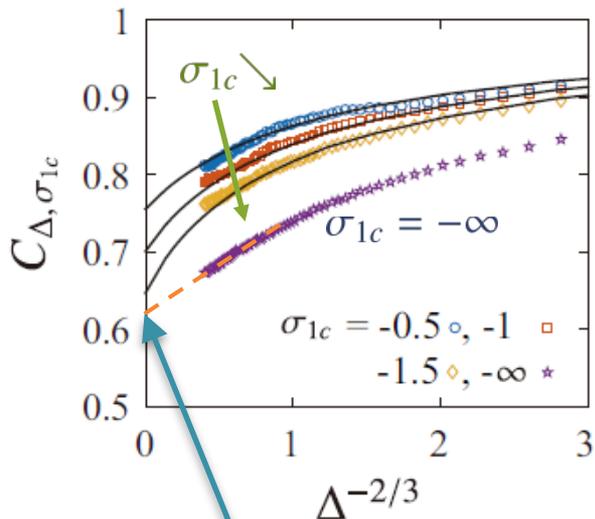
I-string近似解と一致！

相関関数の持続性

[De Nardis, Le Doussal, KaT, PRL 118, 125701 (2017);
De Nardis & Le Doussal, J. Stat. Mech. 2017, 053212]

$$C_{\Delta, \sigma_{1c}} := \frac{C_t(t_1, t_2)_{\tilde{h}_1 > \sigma_{1c}}}{C_t(t_1, t_1)_{\tilde{h}_1 > \sigma_{1c}}} \xrightarrow{(\sigma_{1c} \rightarrow -\infty)} \text{本来の (条件なし) 相関関数}$$

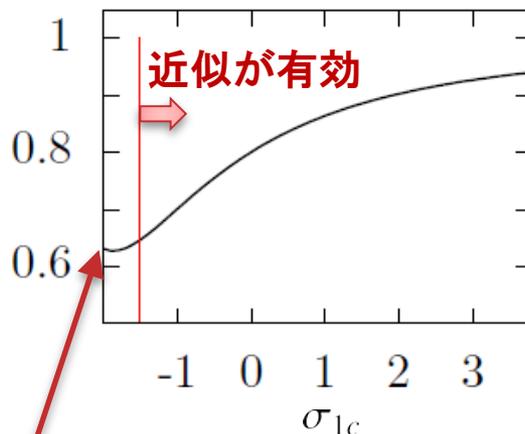
Eden シミュレーション



相関関数の残留値

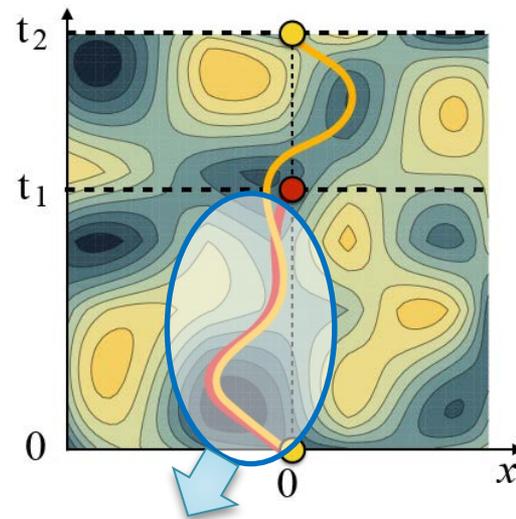
$$C_{\infty, -\infty} \approx 0.6$$

$C_{\Delta \rightarrow \infty, \sigma_{1c}}$ の
1-string 近似解



consistent

相関が残るメカニズム



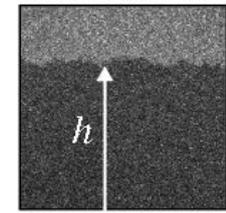
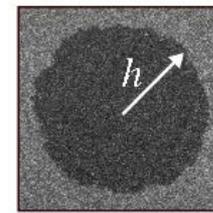
Directed polymer の重なり

⇒ 相関関数の持続性

- 相関関数の残留値を半定量的に再現できた。
- 相関が残るメカニズムも明らかにできた。

[see also Ferrari & Spohn, SIGMA 12, 074 (2016)]

まとめ



1次元KPZ: 可積分性と普遍性が両立
可積分モデルの諸性質が（非可積分な）実験も記述する！

KPZ統計法則の実験検証 [KaT & Sano, PRL 110, 210604; J. Stat. Phys. 147, 853]

- 可積分モデルで示された諸性質を実験的に発見
（KPZ指数、GUE/GOE Tracy-Widom 分布、Airy 過程など）
- KPZ クラスは複数の「普遍サブクラス」に分離する（円形・平面・定常...）

理論の未解決問題へ：時間相関

[De Nardis, Le Doussal, KaT,
PRL 118, 125701 (2017)]

- 円形界面実験：時間相関関数の持続性 $\frac{C_t(t_1, t_2 \rightarrow \infty)}{C_t(t_1, t_1)} > 0$ を発見
- KPZ方程式 + Bethe仮説 + 1-string近似により
2時刻分布の解析的な近似解が初めて計算できた。
実験・数値計算データを精度よく再現
- 相関が残るメカニズムも明らかにできた。

実験と厳密解が定量的に比較でき、相補的に発展！

[非専門家向けのKPZ講義ノート：KaT, arXiv:1708.06060]